COURS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

COURS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

M. H. ANDOYER

MEMBRE DE L'INSTITUT
ET DU BUREAU DES LONGITUDES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

TOME II

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1926

COURS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

LIVRE III.

THÉORIE DES PLANÈTES

(SUITE)

CHAPITRE XIV.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES SUIVANT LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES. THÉORÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX PERTURBATIONS.

93. Comme nous l'avons rappelé au n° 86, le mouvement relatif du point M par rapport au Soleil est celui d'un point de masse égale à l'unité, sous l'action d'une fonction de forces égale à $\frac{f(1+m)}{r} + V$, c'est-à-dire un mouvement keplerien altéré par la fonction perturbatrice V, égale à la somme des termes tels que $fm'R$, qui proviennent de l'action des planètes M', M'', ... et que nous avons appris à développer dans le Chapitre précédent.

Nous pouvons, suivant la méthode de Lagrange, étudier ce mouvement comme un mouvement képlerien aux éléments osculateurs variables n, a, e, ε, ϖ, j, θ, dont il est inutile de rappeler la signification, n et a étant liés par la relation $n^2a^3 = f(1+m)$, et, de ce point de vue, nous devons donc chercher à déterminer analytiquement ces éléments variables.

Nous savons à cet effet, d'après le n° 14, que si l'on pose, en modi-

fiant légèrement les notations,

$$
\begin{aligned}
A &= na^2 = a^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(1+m)},\\
B &= A(\cos\varphi - 1),\\
C &= (A+B)(\cos j - 1),
\end{aligned}
$$

on a, pour déterminer l, ϖ, θ, A, B, C, les équations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= n - \frac{\partial V}{\partial A},\\
\frac{dB}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \varpi}, & \frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial B},\\
\frac{dC}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \theta}, & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial C},
\end{aligned}
\right.
$$

pour rendre ce système canonique, il suffit de remplacer V par $H = V + \frac{f^2(1+m)^2}{2A^2}$, en effaçant le terme n qui figure dans la valeur de $\frac{dl}{dl}$

En faisant

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \sqrt{-B}\, e^{-i\varpi},\\
B_2 &= \sqrt{-B}\, e^{i\varpi},\\
C_1 &= \sqrt{-C}\, e^{-i\theta},\\
C_2 &= \sqrt{-C}\, e^{i\theta},
\end{aligned}
$$

les équations (1) deviennent sans peine, d'après le n° 9

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dA}{i\,dt} &= \frac{\partial V}{\partial(il)}, & \frac{d(il)}{i\,dt} &= n - \frac{\partial V}{\partial A},\\
\frac{dB_2}{i\,dt} &= \frac{\partial V}{\partial B_1}, & \frac{dB_1}{i\,dt} &= -\frac{\partial V}{\partial B_2},\\
\frac{dC_2}{i\,dt} &= \frac{\partial V}{\partial C_1}, & \frac{dC_1}{i\,dt} &= -\frac{\partial V}{\partial C_2},
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on est encore ramené à la forme canonique comme précédemment, en remplaçant aussi l et t par il et it

La forme des équations (1) et (2) présente de grands avantages théoriques, et nous aurons à en faire usage de ce point de vue, mais le choix des variables est pratiquement incommode Il convient de mettre en évidence l'excentricité et l'inclinaison, on aurait les résultats les plus simples en prenant $2\sin\frac{\varphi}{2}$ et $2\sin\frac{j}{2}\sqrt{\cos\varphi}$ comme nouvelles variables pour remplacer B et C, mais, en examinant la question sous ses divers aspects, on se convainc qu'il est encore préférable,

malgré l'introduction de coefficients à la vérité peu gênants, de conserver avec l, ϖ, θ les éléments képlériens ordinaires déjà considérés précédemment, $\log a$ (ou n), $\varepsilon = \sin\varphi$, $\gamma = 2\sin\frac{I}{2}$, et l'on remplacera aussi avec avantage ε, ϖ, γ, θ par les éléments équivalents ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 définis au n° 90. On obtient ainsi, toujours par application des mêmes principes, les nouvelles équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d(\log a)}{dt} &= \frac{2}{na^2}\frac{\partial V}{\partial l} \qquad \left(\text{ou } \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial V}{\partial l}\right),\\
\frac{dl}{dt} &= n - \frac{2}{na^2}\left(a\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \frac{\varepsilon\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} + \frac{\gamma\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial \gamma},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{\cos\varphi}{na^2\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial \varpi} - \frac{\varepsilon\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial l},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na^2\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} + \frac{\gamma\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial \gamma},\\
\frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\sec\varphi}{na^2\gamma}\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\gamma\sec\varphi}{2na^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varpi} + \frac{\partial V}{\partial l}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\sec\varphi}{na^2\gamma}\frac{\partial V}{\partial \gamma},
\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$\frac{d(\log a)}{i\,dt} = \frac{2}{na^2}\frac{\partial V}{\partial (il)} \qquad \left(\text{ou } \frac{dn}{i\,dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial V}{\partial (il)}\right),$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d(il)}{i\,dt} &= n - \frac{2}{na^2}\left(a\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \frac{\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2}\right)\\
&\qquad + \frac{\sec\varphi}{2na^2}\left(\gamma_1\frac{\partial V}{\partial \gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial V}{\partial \gamma_2}\right),\\
\frac{d\varepsilon_1}{i\,dt} &= -\frac{\cos\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial (il)}\\
&\qquad - \frac{\varepsilon_1\sec\varphi}{2na^2}\left(\gamma_1\frac{\partial V}{\partial \gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial V}{\partial \gamma_2}\right),\\
\frac{d\varepsilon_2}{i\,dt} &= \frac{\cos\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial (il)}\\
&\qquad + \frac{\varepsilon_2\sec\varphi}{2na^2}\left(\gamma_1\frac{\partial V}{\partial \gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial V}{\partial \gamma_2}\right),\\
\frac{d\gamma_1}{i\,dt} &= \frac{\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial \gamma_2} - \frac{\gamma_1\sec\varphi}{2na^2}\left(\frac{\partial V}{\partial (il)} - \varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2}\right),\\
\frac{d\gamma_2}{i\,dt} &= \frac{\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial \gamma_1} - \frac{\gamma_2\sec\varphi}{2na^2}\left(\frac{\partial V}{\partial (il)} - \varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2}\right)
\end{aligned}\right.$$

La fonction V, somme de termes de la forme $f m' \mathrm{R}$, est susceptible d'un développement analogue à celui de la fonction R, que nous avons étudiée au Chapitre précédent. Les seconds membres des équations (4) sont donc eux-mêmes développables immédiatement de la même façon, au facteur $\frac{1}{na^2}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{a^2}\right)$ près. Il suffit pour s'en convaincre de faire les remarques suivantes.

1° R étant le produit par $(aa')^{-\frac{1}{2}}$ d'une fonction du rapport α égal à $\frac{a}{a'}$ ou $\frac{a'}{a}$ suivant que l'on a $a < a'$ ou $a > a'$, on peut manifestement écrire

$$a \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a} = \left(\pm \mathrm{D} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{R},$$

le signe supérieur correspondant, comme on l'a déjà dit d'une façon générale, au cas de $a < a'$, le signe inférieur au cas contraire, et le symbole d'opération D étant toujours entendu de la même façon, c'est-à-dire que, si R est une somme de termes de la forme $\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{aa'}} \mathrm{D}^k b_n^p$, A étant indépendant de a et a', DR sera la somme des termes $\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{aa'}} \mathrm{D}^{k+1} b_n^p$.

2° On a

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial (il)} = \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda}.$$

3° Les coefficients $\cos\varphi$, $\sec\varphi$, $\cos\varphi \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ sont développables suivant les puissances de $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ par les formules telles que

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= (1 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \sum_0^\infty \frac{2}{p+1} \mathrm{C}_{2p}^p \varepsilon_1^{p+1} \varepsilon_2^{p+1} = 1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 4\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 - \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sec\varphi &= (1 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \sum_1^\infty \mathrm{C}_{2p}^p \varepsilon_1^p \varepsilon_2^p = 1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 6\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 20\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\varphi \sec^2 \frac{\varphi}{2} &= 2 + \frac{\cos\varphi - 1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \\
&= 1 - \sum_1^\infty \frac{1}{p+1} \mathrm{C}_{2p}^p \varepsilon_1^p \varepsilon_2^p = 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 5\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 - \ldots
\end{aligned}$$

Il sera tout aussi simple de former les seconds membres des équations (3) avec le même développement de R. Il suffit d'ajouter que l'on a

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2}, \qquad \gamma \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \gamma_1 \frac{\partial V}{\partial \gamma_1} + \gamma_2 \frac{\partial V}{\partial \gamma_2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varpi} = i\left(\varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2} - \varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = i\left(\gamma_2 \frac{\partial V}{\partial \gamma_2} - \gamma_1 \frac{\partial V}{\partial \gamma_1}\right)$$

Pour nous servir des équations (2), observons d'abord que l'on a

$$\varepsilon_1 = \frac{B_1}{2A}\sqrt{2A - B_1 B_2}, \qquad \gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2(A - B_1 B_2)}},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{B_2}{2A}\sqrt{2A - B_1 B_2}, \qquad \gamma_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2(A - B_1 B_2)}},$$

$$a = \frac{\lambda^2}{f(1+m)},$$

la fonction V peut donc se développer sous la même forme que précédemment, c'est-à-dire en ne tenant compte que des éléments de la planète M, suivant les puissances entières positives ou non de λ, et suivant les puissances entières non négatives de B_1, B_2, C_1, C_2, les coefficients de ce développement étant certaines fonctions de A.

Enfin, dans les équations (1), on a

$$B \frac{\partial V}{\partial B} = \frac{1}{2}\left(B_1 \frac{\partial V}{\partial B_1} + B_2 \frac{\partial V}{\partial B_2}\right), \qquad C \frac{\partial V}{\partial C} = \frac{1}{2}\left(C_1 \frac{\partial V}{\partial C_1} + C_2 \frac{\partial V}{\partial C_2}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varpi} = i\left(B_2 \frac{\partial V}{\partial B_2} - B_1 \frac{\partial V}{\partial B_1}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = i\left(C_2 \frac{\partial V}{\partial C_2} - C_1 \frac{\partial V}{\partial C_1}\right)$$

94. S'il est bien facile de former comme nous venons de le voir les équations qui déterminent les éléments osculateurs à chaque instant du mouvement keplérien troublé des diverses planètes M, M′, M″, ..., l'intégration analytique de ces équations présente des difficultés considérables, sinon insurmontables, et si même elle était effectuée, elle resterait pratiquement inutilisable. Écartant donc ce point de vue, nous allons chercher une méthode d'approximations successives dont le succès sera assuré par la petitesse des masses m, m', m'', ..., rapportées, comme nous l'avons dit, à la masse du Soleil prise pour unité. A la vérité, on ne peut se flatter d'obtenir ainsi une solution qui soit indéfiniment valable pour toute valeur du temps, mais il

nous suffit qu'elle le soit pour un intervalle de temps suffisamment grand

Soit μ une petite quantité, telle que les masses m, m', m'', puissent être considérées comme de l'ordre de μ Choisissons comme éléments du mouvement des planetes M, M', leurs moyens mouvements n, n', , leurs longitudes moyennes l, l', , et d'autres elements tels que ε, γ, ϖ, θ, ou des equivalents, dont nous désignerons l'ensemble par h, h', Ces inconnues sont determinees par des equations de la forme tres generale

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \mu N, & \dfrac{dl}{dt} = n + \mu L, & \dfrac{dh}{dt} = \mu H, \\ \dfrac{dn'}{dt} = \mu N', & \dfrac{dl'}{dt} = n' + \mu L', & \dfrac{dh'}{dt} = \mu H', \end{cases}$$

dans lesquelles N, N', , L, L', , H, H', sont des series telles que $\Sigma A e^{i(sl+s'l'+\;)}$, les coefficients A etant des fonctions de n, n', , h, h', , tandis que s, s', sont des entiers positifs, négatifs ou nuls Dans le cas qui nous occupe, deux de ces entiers au plus ne sont pas nuls, mais cette circonstance est actuellement sans interêt, ainsi que d'autres particularites sur lesquelles il est inutile de s'arrêter

Il est facile d'integrer les equations (5) par des series ordonnées suivant les puissances de μ Si l'on supposait cette quantité nulle, les inconnues n, n', , h, h', seraient des constantes, tandis que l, l', seraient des fonctions linéaires du temps, aux vitesses respectives n, n', Désignons donc par n_0, n'_0, , ν_0, ν'_0, , h_0, h'_0, , l_{00}, l'_{00}, des constantes, et par l_0, l'_0, les *arguments* linéaires par rapport au temps $\nu_0 t + l_{00}$, $\nu'_0 t + l'_{00}$ les différences $n_0 - \nu_0$, $n'_0 - \nu'_0$, sont nécessairement petites de l'ordre de μ au moins Supposons alors que l'on ait, en ordonnant suivant les puissances de μ, et appelant ν_1, ν_2, de nouvelles constantes,

$$\begin{aligned} n_0 &= \nu_0 + \mu\nu_1 + \mu^2\nu_2 + \;, & n &= n_0 + \mu n_1 + \mu^2 n_2 + \\ l &= l_0 + \mu l_1 + \mu^2 l_2 + \;, & h &= h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \end{aligned}$$

et, en substituant ces valeurs de n, l, h, (mais non de n_0,) dans N, L, H, ,

$$N = N_0 + \mu N_1 + \mu^2 N_2 + \;, \qquad L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \;,$$
$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 +$$

En portant ces expressions dans les équations (5), et égalant dans les deux membres de chacune les coefficients des mêmes puissances de μ, il viendra

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = N_0, & \dfrac{dl_1}{dt} = \nu_1 + n_1 + L_0, & \dfrac{dh_1}{dt} = H_0, \quad \dots, \\ \dfrac{dn_2}{dt} = N_1, & \dfrac{dl_2}{dt} = \nu_2 + n_2 + L_1, & \dfrac{dh_2}{dt} = H_1, \quad \dots, \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots \end{cases}$$

et l'on est ainsi en possession d'une méthode simple d'approximations successives, puisque N_p, L_p, H_p, ... sont connus dès que l'on a déterminé n_p, l_p, h_p, ..., de sorte que des quadratures suffisent pour obtenir ensuite n_{p+1}, l_{p+1}, h_{p+1}, ...

Les quantités $\mu^p n_p$, $\mu^p l_p$, $\mu^p h_p$, ... sont les *perturbations*, ou encore *inégalités d'ordre p*, des éléments l, n, h, ...

Pour étudier de plus près la nature de ces inégalités, il est tout d'abord nécessaire de donner quelques indications préliminaires. En premier lieu, nous supposerons que dans le développement des fonctions N, N', ..., sous la forme $\Sigma A e^{i(sl+s'l'+\dots)}$ indiquée ci-dessus, il n'existe aucun terme pour lequel on ait simultanément $s = s' = s'' = \dots = 0$; cette hypothèse est bien vérifiée dans les équations (3) ou (4) du numéro précédent, puisqu'on a alors

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial V}{\partial l},$$

ce qui montre, d'après la nature de V, que dans les différents termes de la fonction N, par exemple, l'entier s est nécessairement non nul.

De plus nous supposerons que les constantes ν_0, ν'_0, ... sont telles qu'il n'existe entre elles aucune relation linéaire homogène à coefficients entiers, c'est-à-dire que les arguments $sl_0 + s'l'_0 + \dots$ ne sont jamais indépendants du temps, si l'on n'a pas simultanément $s = s' = \dots = 0$.

Les fonctions N_0, L_0, H_0, ... sont alors des sommes de termes de la forme $Be^{i(sl_0+s'l'_0+\dots)}$, en désignant par B une constante fonction de n_0, h_0, ...; un tel terme ne peut être constant, d'après ce qui précède, que si l'on a $s = s' = \dots = 0$, sinon il est *périodique* par rapport aux arguments l_0, l'_0, ...; en particulier N_0, N'_0, ... sont des sommes de termes tous périodiques, d'après l'hypothèse faite sur les fonctions N, N', ...

Plus généralement, nous serons amenés à considérer des termes de la forme $C t^p e^{i(s l_0 + s' l'_0 + \dots)}$, C étant une constante quelconque, et p un entier non négatif : si $p = 0$, c'est un terme constant ou périodique comme ci-dessus, et s'il est périodique, nous le représenterons généralement par P, si l'on a $p > 0$, et $s = s' = \dots = 0$, c'est un terme *séculaire* de *rang* [1] p, soit S_p, si l'on a $p > 0$, sans que les nombres $s, s', \dots$ soient tous nuls, c'est un terme *mixte* de *rang* p aussi, soit M_p.

Enfin, remarquons que l'on a, en appelant p un entier positif ou nul, ω une constante donnée, et c une constante arbitraire,

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\int t^p\, dt = \frac{t^{p+1}}{p+1} + c, \qquad \int e^{\omega t}\, dt = \frac{e^{\omega t}}{\omega} + c, \\
&\int t^p e^{\omega t}\, dt = \frac{t^p e^{\omega t}}{\omega} - \frac{p t^{p-1} e^{\omega t}}{\omega^2} + \frac{p(p-1) t^{p-2} e^{\omega t}}{\omega^3} \\
&\qquad - \frac{p(p-1)(p-2) t^{p-3} e^{\omega t}}{\omega^4} + \dots + c,
\end{aligned}
\right.
$$

pour obtenir la dernière de ces formules, il suffit de différentier la précédente p fois par rapport à ω.

Revenons alors aux équations (6) : d'après la nature des fonctions $N_0, L_0, H_0, \dots$ précisée ci-dessus, on voit immédiatement que les $n_1, n'_1, \dots$ seront de la forme $c + \Sigma P$, tandis que les $l_1, h_1, \dots$ contiendront en outre des termes séculaires S_1.

Formons maintenant $N_1, L_1, H_1, \dots$; si X désigne généralement une quelconque des fonctions N, L, H, ..., on a

$$
X_1 = \frac{\partial X_0}{\partial n_0} n_1 + \dots + \frac{\partial X_0}{\partial l_0} l_1 + \dots + \frac{\partial X_0}{\partial h_0} h_1 + \dots,
$$

où les dérivées partielles de X_0 sont composées de la même façon que X_0 $\left(\frac{\partial X_0}{\partial l_0}\right.$ toutefois ne contenant jamais de termes constants$\left.\right)$, d'autre part, le produit de deux termes périodiques est lui-même périodique ou constant, il est donc clair que les $N_1, N'_1, \dots$ seront de la forme $C + \Sigma P + \Sigma M_1$, tandis que les $L_1, H_1, \dots$ contiendront en outre des termes S_1. Par suite, les quantités $n_2, n'_2, \dots$ seront elles-

---

[1] La terminologie employée ici et plus loin diffère un peu de celle introduite par H. Poincaré dans ses *Leçons de Mécanique céleste*.

mêmes de la forme $c + S_1 + \Sigma P + \Sigma M_1$, tandis que les l_2, h_2, contiendront en outre des termes S_2

On a ensuite, en n'écrivant que quelques termes types,

$$X_2 = \frac{\partial X_0}{\partial n_0} n_2 + \dots + \frac{\partial X_0}{\partial l_0} l_2 + \dots + \frac{\partial X_0}{\partial h_0} h_2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_0}{\partial n_0^2} n_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 X_0}{\partial h_0 \, \partial h'_0} h_1 h'_1 + \dots,$$

donc N_2, N'_2, ... seront de la forme $C + S_1 + \Sigma (P + M_1 + M_2)$, et les L_2, H_2, ... contiendront en outre des termes S_2, par suite,

$$\left.\begin{matrix} n_3 \\ n'_3 \\ \dots \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + \Sigma (P + M_1 + M_2),$$

$$\left.\begin{matrix} l_3 \\ h_3 \\ \dots \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + S_3 + \Sigma (P + M_1 + M_2).$$

Le raisonnement peut être poursuivi sans aucune difficulté, de sorte qu'on peut écrire généralement

$$\left.\begin{matrix} n_p \\ n'_p \\ \dots \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + \dots + S_{p-1} + \Sigma (P + M_1 + M_2 + \dots + M_{p-1}),$$

$$\left.\begin{matrix} l_p \\ h_p \\ \dots \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + \dots + S_p + \Sigma (P + M_1 + M_2 + \dots + M_{p-1}).$$

En d'autres termes, les perturbations d'ordre p des éléments l, h, ... contiennent, outre une constante arbitraire, des termes périodiques, des termes séculaires jusqu'au rang p, et des termes mixtes jusqu'au rang $p - 1$, et s'il s'agit des éléments n, n', ... il en est de même, sauf que les termes séculaires ne vont que jusqu'au rang $p - 1$

Plus généralement, soit f une fonction quelconque des éléments n, l, h, ..., périodique par rapport aux l, ..., comme les L, N, H, ..., en y remplaçant ces éléments par leurs valeurs et en ordonnant suivant les puissances de μ, on a

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots,$$

et par suite les perturbations d'ordre p de f comprennent un terme constant, des termes périodiques, ainsi que des termes séculaires et

mixtes jusqu'au rang p. Si, comme les N, la fonction f ne contient aucun terme indépendant des l, , les termes séculaires de f_p ne vont que jusqu'au rang $p-1$; si f est indépendante des l, , ce sont les termes mixtes qui ne vont que jusqu'au rang $p-1$; si enfin f ne dépend que des n, , les termes séculaires comme les termes mixtes s'arrêtent au rang $p-1$.

En particulier, dans le problème qui nous occupe, les demi-grands axes a, a', jouissent des mêmes propriétés que les moyens mouvements n, n', , et n'ont de perturbations séculaires d'ordre p que jusqu'au rang $p-1$. C'est le théorème de l'*invariabilité des grands axes* reconnu d'abord partiellement par Laplace, puis énoncé par Lagrange sous la forme limitée suivante : les grands axes n'ont pas de perturbations séculaires de premier ordre. Plus tard, Poisson a complété ce théorème en démontrant que les grands axes n'ont pas davantage de perturbations séculaires du second ordre ; nous verrons en effet plus loin que, généralement, les termes séculaires de n_p, n'_p, ne dépassent pas le rang $p-2$; mais, pour arriver à ce résultat, il faut prendre les équations sous une forme moins générale que celle des équations (5).

Les différentes constantes arbitraires c introduites par l'intégration dans les formules précédentes sont, avec n_0, l_{00}, h_0, ν_1, ν_2, , en nombre surabondant ; s'il y a q équations (5), il n'existe que q de ces diverses constantes dont on ne puisse disposer à volonté. Dans leur ensemble, en effet, elles sont uniquement assujetties à la condition suivante : les données du problème étant en réalité les valeurs initiales des inconnues, c'est-à-dire les valeurs des éléments osculateurs n, l, h, à l'origine du temps, que l'on peut d'ailleurs faire coïncider avec une époque donnée quelconque, on doit retrouver ces valeurs quand on fait $t=0$ dans les formules. Il en résulte en particulier que les différences entre ces valeurs et les quantités n_0, l_{00}, h_0, doivent être petites de l'ordre de μ.

Si l'on veut comparer les développements que l'on obtient pour les inconnues en partant de deux systèmes distincts de constantes $n_0, \nu_0, l_{00}, h_0,$ d'une part, $n^0, \nu^0, l_0^0, h^0,$ d'autre part, il faudra commencer par remplacer, dans les formules qui correspondent à ce dernier choix, les arguments $l^0 = \nu^0 t + l_0^0$, par les arguments $l_0 = \nu_0 t + l_{00}$, ce qui se fera en écrivant par exemple

$$e^{il^0} = e^{il_0} \times e^{i(l^0-l_0)} = e^{il_0}\left[1 + \frac{i(l^0-l_0)}{1} + \quad \right],$$

cette substitution ne changera pas la forme des développements et leurs propriétés générales, puisque les différences $\nu^0 - \nu_0$, $l_0^0 - l_{00}$, sont de l'ordre de μ Une fois cette substitution faite, les deux développements d'une même inconnue, procédant suivant les puissances de t et celles des quantités e^{il_0}, $e^{il'_0}$, , devront être identiques, d'après la proposition générale que nous avons admise au n° 11 (3°)

95 Les développements que nous venons d'obtenir pour les inconnues n, l, h, doivent être limités, si l'on veut leur attribuer une valeur pratique il faut donc que les termes dont l'influence n'est pas négligeable, à un certain degré d'approximation fixé à l'avance, soient en nombre fini

C'est ce qui arrive dans le problème qui nous occupe, pour plusieurs raisons différentes En premier lieu, comme les excentricités et les inclinaisons des orbites des grosses planètes restent petites, il est clair qu'on peut sans inconvénient limiter le développement de la fonction perturbatrice V aux termes dont le degré par rapport à ces quantités ne dépasse pas un nombre donné, en tenant compte toutefois de ce qui sera dit plus loin En second lieu, observons que l'intégration d'un terme de la forme $Ce^{i(sl_0+s'l'_0+\ldots)}$ reproduit ce terme divisé par le coefficient de t dans l'argument, c'est-à-dire par $s\nu_0 + s'\nu'_0 + \ldots$, en laissant de côté le facteur i, et plus généralement la même observation s'applique, avec les modifications convenables, à l'intégration du même terme multiplié par t^p Par suite, on pourra se borner à considérer les termes pour lesquels ces *diviseurs* $s\nu_0 + s'\nu'_0 + \ldots$ ne dépassent pas une certaine limite

D'autre part, les masses des planètes sont petites par rapport à celle du Soleil, et cette circonstance rend insensibles les perturbations d'ordre élevé, on peut généralement se borner à la considération des perturbations du premier ordre, en y joignant quelques termes du second ordre, et exceptionnellement d'un ordre supérieur

En s'appuyant sur ces observations, on voit aisément que le nombre des termes utiles à prendre dans les divers développements du numéro précédent est limité, et l'on obtient ainsi une solution entièrement satisfaisante au point de vue pratique, mais valable seulement pour un intervalle de temps borné, puisque t figure directement dans les formules en dehors des signes de fonctions périodiques Pour obtenir davantage, si l'on estime ce résultat insuffisant, il faut procéder autrement, ainsi que nous le verrons plus tard

Il faut encore faire une remarque essentielle Nous venons de dire que l'intégration amenait des diviseurs dont l'effet était de diminuer les perturbations périodiques ou mixtes quand ils sont grands, c'est-à-dire évidemment quand leurs arguments sont à *courte période*, mais inversement, un petit diviseur grandira les perturbations correspondantes qui seront alors à *longue période* Il sera donc nécessaire de prêter une attention particulière aux inégalités de cette nature, surtout quand il s'agit des longitudes moyennes l, , en effet celles-ci sont déterminées par des équations de la forme

$$\frac{dl}{dt} = n + \mu L, \qquad ,$$

de sorte que celles de leurs inégalités qui proviennent des perturbations de n, nécessitent une double intégration

Ce sont les inégalités à longue période qui rendront nécessaire la considération des termes d'ordre supérieur ou de degré élevé par rapport aux excentricités et inclinaisons

On peut même concevoir que si leur inflation due à la petitesse des diviseurs n'était pas suffisamment compensée par la petitesse des masses et celle des excentricités et inclinaisons, leur présence rendrait illusoire la solution que nous venons de décrire mais ce n'est pas le cas dans la théorie des grosses planètes

96 Pour arriver au théorème de Poisson, qu'il nous reste à démontrer dans ce Chapitre sous sa forme générale, il faut d'abord modifier convenablement les équations qui déterminent le mouvement des planètes D'après les développements du n° 93, ces équations dépendent uniquement des fonctions perturbatrices V, V', V'', qui correspondent aux diverses planètes M, M', M'', ces fonctions sont toutes distinctes, et c'est là, au point de vue théorique, un grave inconvénient que nous devons chercher à faire disparaître A cet effet, en profitant de ce qui a été dit au n° 7, nous allons envisager non plus l'ensemble des mouvements relatifs de M, M', M'', par rapport au Soleil O, mais l'ensemble des mouvements suivants 1° mouvement relatif de M par rapport à O, 2° mouvement relatif de M' par rapport au centre de gravité G de O et de M, 3° mouvement relatif de M'' par rapport au centre de gravité G' de O, M et M', et ainsi de suite Il est clair que toute propriété appartenant à chacun

des mouvements de ce second ensemble appartiendra aussi à chacun de ceux de l'ensemble primitif, puisque le mouvement relatif de la planete quelconque M par rapport au Soleil est commun aux deux ensembles, et nous avons ainsi, en realisant l'unite des fonctions perturbatrices, le moyen de pousser plus loin l'analyse des numéros precedents, et de mettre en evidence de nouvelles et importantes proprietes de la solution generale du probleme que nous etudions

En nous reportant en effet au n° 7, nous voyons que les nouveaux mouvements envisages sont ceux de masses respectivement egales à $\frac{m}{1+m}$, $m' \frac{1+m}{1+m+m'}$, $m'' \frac{1+m+m'}{1+m+m'+m''}$, sous l'action d'une seule et même fonction de forces

$$F = \frac{fm}{\overline{OM}} + \frac{fm'}{\overline{OM'}} + \frac{fm''}{\overline{OM''}} + \quad + \frac{fmm'}{\overline{MM'}} + \frac{fmm''}{\overline{MM''}} + \quad + \frac{fm'm''}{\overline{M'M''}} +$$

Si d'ailleurs on appelle r, r', r'', les vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{GM'}$, $\overline{G'M''}$, et x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', leurs projections sur les axes, les projections de $\overline{OM'}$ $\overline{OM''}$, sont

$$x' + \frac{m}{1+m} x, \quad , \quad \text{pour } \overline{OM'},$$

$$x'' + \frac{m'}{1+m+m'} x' + \frac{m}{1+m} x, \quad , \quad \text{pour } \overline{OM''},$$

$$, \qquad ,$$

$$x' - \frac{x}{1+m}, \quad , \quad , \quad \text{pour } \overline{MM'},$$

$$x'' + \frac{m'}{1+m+m'} x' - \frac{x}{1+m}, \quad , \quad \text{pour } \overline{MM''},$$

$$x'' - \frac{1+m}{1+m+m'} x', \quad , \quad \text{pour } \overline{M'M''},$$

$$,$$

Posons alors

$$F = \frac{fm}{r} + \frac{fm'}{r'} \frac{(1+m')(1+m)}{1+m+m'} + \frac{fm''}{r''} \frac{(1+m'')(1+m+m')}{1+m+m'+m''} + \quad + \Phi,$$

puis

$$V = \Phi \frac{1+m}{m}, \qquad V' = \Phi \frac{1+m+m'}{m'(1+m)}, \qquad V'' = \Phi \frac{1+m+m'+m''}{m''(1+m+m')}, \qquad ,$$

les mouvements considérés sont des mouvements képlériens troublés de masses égales à l'unité, sous l'action de fonctions de forces égales respectivement à $f\frac{1+m}{r}$, $f\frac{1+m'}{r'}$, $f\frac{1+m''}{r''}$, ... augmentées des fonctions perturbatrices V, V′, V″ ... qui ne diffèrent entre elles que par des facteurs constants.

Il est évident d'ailleurs que la fonction Φ est du second ordre par rapport aux masses m, m', m'', ..., de sorte que les fonctions V, V′, V″, ... sont elles-mêmes du premier ordre, et par suite admettent le facteur μ. On s'assure aussi facilement que dans les équations mêmes du mouvement, telles que $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1+m}{m}\frac{\partial F}{\partial x}$, ..., les masses ne peuvent figurer en dénominateur, et par suite l'hypothèse d'une masse évanouissante ne peut susciter aucune difficulté. Enfin, on voit encore sans peine que les fonctions V, V′, ... actuelles sont susceptibles de développements jouissant de toutes les mêmes propriétés essentielles que celles qui figurent dans les différents systèmes d'équations du n° 93.

En résumé, pour étudier le mouvement relatif de la planète M par rapport au Soleil O, nous pouvons le considérer comme faisant partie d'un ensemble de mouvements en tous points analogue à celui des mouvements de M, M′, M″, ... par rapport au Soleil, mais pour lesquels les fonctions perturbatrices sont les mêmes à des facteurs constants près. Les nouveaux mouvements des points M′, M″, ... ne diffèrent des anciens que de quantités de l'ordre des masses m, m', m'', ..., puisqu'ils se confondraient avec eux si ces masses étaient nulles.

Prenons, pour déterminer notre nouvel ensemble de mouvements, des éléments canoniques tels que ceux qui figurent dans les équations (1) et (2), c'est-à-dire comprenant en particulier les longitudes moyennes l, l', ..., et leurs éléments conjugués, A, A′, ... Désignons par (B, C), (B′, C′), ... l'ensemble de tous les autres couples d'éléments conjugués deux à deux, et par α, α', ..., β, β', ..., des nombres constants, les équations de notre nouveau problème prennent la forme

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \alpha\frac{\partial V}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} = n - \alpha\frac{\partial V}{\partial A}, & \frac{dB}{dt} = \beta\frac{\partial V}{\partial C}, & \frac{dC}{dt} = -\beta\frac{\partial V}{\partial B}, \\ \frac{dA'}{dt} = \alpha'\frac{\partial V}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} = n' - \alpha'\frac{\partial V}{\partial A'}, & \frac{dB'}{dt} = \beta'\frac{\partial V}{\partial C'}, & \frac{dC'}{dt} = -\beta'\frac{\partial V}{\partial B'}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

V est une fonction perturbatrice de l'ordre de μ, et n, n', sont les fonctions bien connues de A, A', respectivement

97 Supposons plus generalement que les moyens mouvements n, n', dependent de l'ensemble des elements A, A', à l'exclusion des autres, faisons encore

$$l = \lambda + \varepsilon, \qquad l' = \lambda' + \varepsilon', \qquad ,$$

et determinons les variables nouvelles λ, ε, par les conditions

$$\frac{d\lambda}{dt} = n, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\alpha \frac{\partial V}{\partial A},$$

En modifiant les notations de façon à remplacer A, A', par exemple, par A_1, A_2, , les équations (8) deviennent

$$\frac{dA_p}{dt} = \alpha_p \frac{\partial V}{\partial l_p}, \qquad \frac{d\varepsilon_p}{dt} = -\alpha_p \frac{\partial V}{\partial A_p}, \qquad \frac{dB_q}{dt} = \beta_q \frac{\partial V}{\partial C_q}, \qquad \frac{dC_q}{dt} = -\beta_q \frac{\partial V}{\partial B_q},$$
$$\frac{d\lambda_p}{dt} = n_p, \qquad l_p = \lambda_p + \varepsilon_p,$$

les coefficients α_p, β_q étant des constantes numeriques, et les n_p dependant de l'ensemble des A_p

En vue de diminuer la prolixite des formules, designons encore par x_1, x_2, l'ensemble des variables A_p, ε_p, B_q, C_q, en remarquant que $\frac{\partial V}{\partial l_p}$ ne diffère pas de $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_p}$, nous pouvons écrire plus simplement les equations precedentes sous la forme

$$(9) \qquad \frac{dx_j}{dt} = \sum \alpha_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_k}, \qquad \frac{d\lambda_p}{dt} = n_p = \varphi_p(A_1, A_2, \quad) \qquad l_p = \lambda_p + \varepsilon_p,$$

en faisant

$$\begin{array}{lll}
\alpha_{jk} = \alpha_p & \text{quand on a} & x_j = A_p, \quad x_k = \varepsilon_p, \\
\alpha_{jk} = -\alpha_p & \text{»} & x_j = \varepsilon_p, \quad x_k = A_p, \\
\alpha_{jk} = \beta_q & \text{»} & x_j = B_q, \quad x_k = C_q, \\
\alpha_{jk} = -\beta_q & \text{»} & x_j = C_q, \quad x_k = B_q, \\
\alpha_{jk} = 0 & \text{dans tous les autres cas,} &
\end{array}$$

de sorte que généralement les nombres α_{jk} verifient la relation

$$\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 0$$

La fonction V et ses derivees partielles sont de la forme $\Sigma C e^{i(s_1 l_1 + s_2 l_2 + \quad)}$, les coefficients C dépendant des A_p, B_q, C_q, tandis que s_1, s_2, sont des entiers quelconques

Intégrant les équations (9) par approximations successives ordonnées suivant les puissances de μ, et appelant précisément A_p, B_q, les valeurs de première approximation obtenues en négligeant μ afin d'éviter la surcharge des notations, nous représenterons maintenant par

$$A_p + \delta A_p + \delta^2 A_p + \ldots, \qquad B_q + \delta B_q + \delta^2 B_q + \ldots,$$

les inconnues correspondantes, mettant ainsi en évidence leurs parties des divers ordres par rapport à μ.

A_p, B_q, C_q, ε_p sont des constantes, il en est de même des $n_p = \varphi_p(A_1, A_2, \ldots)$, et l'on peut prendre $l_p = n_p t + \varepsilon_p$, en faisant ici les quantités que nous devrions désigner par ν_p égales aux n_p. Comme précédemment, nous supposons essentiellement qu'il n'existe entre les n_p aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers, c'est-à-dire que l'argument $\omega = s_1 l_1 + s_2 l_2 + \ldots$, dans lequel le coefficient de t est $N = s_1 n_1 + s_2 n_2 + \ldots$, ne peut être indépendant du temps que si l'on a simultanément $s_1 = s_2 = \ldots = 0$. Par suite les fonctions $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_p}$ et toutes leurs dérivées partielles ne contiennent aucun terme constant, et sont composées uniquement de termes périodiques.

Les équations (8) deviennent maintenant

$$\frac{d(\delta x_j)}{dt} = \sum \alpha_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_k}, \qquad \frac{d(\delta \lambda_p)}{dt} = \sum \frac{\partial n_p}{\partial A_q} \delta A_q,$$

$$\frac{d(\delta^2 x_j)}{dt} = \sum \alpha_{jk} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q} \delta\lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} \delta x_m \right),$$

$$\frac{d(\delta^2 \lambda_p)}{dt} = \sum \left(\frac{\partial n_p}{\partial A_q} \delta^2 A_q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n_p}{\partial A_q \partial A_r} \delta A_q \delta A_r \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta^3 x_j)}{dt} = \sum \alpha_{jk} \Big(& \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q} \delta^2 \lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} \delta^2 x_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q \partial \varepsilon_r} \delta\lambda_q \delta\lambda_r \\ & + \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q \partial x_m} \delta\lambda_q \delta x_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n} \delta x_m \delta x_n \Big), \end{aligned}$$

et dans chaque somme on fait varier, comme dans ce qui suit, tous les indices autres que j ou p, suivant le cas, de toutes les façons possibles. De plus, nous conviendrons de prendre nulles toutes les constantes arbitraires c introduites par l'application des formules d'intégration (7); comme nous le savons, ceci ne saurait influer en rien

sur la généralité des conclusions relatives à la forme des résultats, pas plus que la restriction que nous avons déjà faite en prenant $\nu_p = n_p$.

On a en particulier

$$\frac{d(\delta \Lambda_p)}{dt} = \alpha_p \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_p},$$

et par suite $\delta \Lambda_p$ ne contient aucun terme séculaire, ainsi que nous l'avons déjà vu.

Considérons maintenant $\delta^2 \Lambda_p$, on a

$$\frac{d(\delta^2 \Lambda_p)}{dt} = \sum \alpha_p \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \, \partial \varepsilon_q} \delta \lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \, \partial x_j} \delta x_j \right),$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède,

$$\frac{d(\delta^2 \Lambda_p)}{dt} = \sum \alpha_p \alpha_j \frac{\partial n_q}{\partial \Lambda_j} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \, \partial \varepsilon_q} \int \int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_j} dt^2$$
$$+ \sum \alpha_p \alpha_{jk} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \, \partial x_j} \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt.$$

Il est clair que le second membre de cette formule ne contient aucun terme séculaire de rang un, nous allons faire voir qu'il ne contient aucun terme constant non plus.

Examinons en effet de plus près les deux sommes S_1 et S_2 dont se compose le second membre, et d'abord la première S_1. Posons

$$V = \Sigma C e^{i\omega} = \Sigma C' e^{i\omega'},$$

l'argument ω étant celui défini plus haut, dans lequel le coefficient du temps est N, et l'argument ω' étant analogue ; on peut écrire

$$S_1 = \sum \frac{i}{2} \alpha_p \alpha_j \frac{\partial n_q}{\partial \Lambda_j} C C' e^{i(\omega + \omega')} \left(\frac{s_p s_q s'_j}{N'^2} + \frac{s'_p s'_q s_j}{N^2} \right),$$

la sommation s'étendant à tous les indices q et j, comme nous l'avons déjà dit, et en outre à tous les arguments ω et ω' non nuls.

On voit alors que l'expression de S_1 est purement périodique, puisque si l'on suppose $\omega + \omega' = 0$, on a aussi $s_p + s'_p = 0$, $s_q + s'_q = 0$, $s_j + s'_j = 0$, $N + N' = 0$, de sorte que le coefficient placé entre parenthèses est nul ; les termes qui pourraient être constants disparaissent.

En permutant les indices j et k, on peut écrire maintenant

$$S_2 = \sum \frac{1}{2} \alpha_p \alpha_{jk} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \, \partial x_j} \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt - \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \, \partial x_k} \int \frac{\partial V}{\partial x_j} dt \right)$$

Faisons comme plus haut

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \Sigma\, C\, e^{i\omega}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_k} = \Sigma\, C'\, e^{i\omega'},$$

il vient, en supposant d'abord ω et ω' non nuls,

$$S_2 = \sum \frac{1}{2} \alpha_p\, \alpha_{jk}\, CC'\, e^{i(\omega+\omega')} \left(\frac{s_p}{N'} - \frac{s'_p}{N} \right),$$

et, comme tout à l'heure, ce résultat est purement périodique, les termes qui pourraient être constants disparaissant encore, pour une raison analogue.

Si l'on suppose nul l'un des arguments ω, ω', il en résulte pour S_2 des termes complémentaires mixtes, de rang *un*.

Cette analyse nous montre que $\delta^2 A_p$ ne contient aucun terme séculaire, mais seulement des termes périodiques et des termes mixtes de rang *un* ; c'est le théorème de Poisson, annoncé précédemment.

Pour obtenir la généralisation de ce théorème, il suffit de poursuivre de la même façon. On a

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta^3 A_p)}{dt} = \sum \alpha_p \Bigg(& \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q} \delta^2 \lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial x_j} \delta^2 x_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q\, \partial \varepsilon_s} \delta\lambda_q\, \delta\lambda_s \\ & + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q\, \partial x_j} \delta\lambda_q\, \delta x_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial x_j\, \partial x_m} \delta x_j\, \delta x_m \Bigg), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta^3 A_p)}{dt} = & \sum \frac{1}{2} \alpha_p\, \alpha_i\, \alpha_s \frac{\partial^2 n_q}{\partial A_i\, \partial A_s} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q} \int \left[\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r} dt \times \int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_s} dt \right] dt \\ & + \sum \frac{1}{2} \alpha_p\, \alpha_i\, \alpha_t \frac{\partial n_q}{\partial A_i} \frac{\partial n_s}{\partial A_t} \Bigg(2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q} \int\!\!\int \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_i\, \partial \varepsilon_s} dt^2 \int\!\!\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_t} dt^2 \\ & \qquad + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q\, \partial \varepsilon_s} \int\!\!\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} dt^2 \times \int\!\!\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_t} dt^2 \Bigg) \\ & + \sum \alpha_p\, \alpha_i\, \alpha_{jk} \frac{\partial n_q}{\partial A_i} \Bigg[\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q} \int\!\!\int \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_i\, \partial x_j} dt^2 \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt \\ & \qquad + \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial x_j} \int \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_q\, \partial x_k} dt \int\!\!\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} dt^2 \\ & \qquad + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial \varepsilon_q\, \partial x_j} \int\!\!\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r} dt^2 \times \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt \Bigg] \\ & + \sum \frac{1}{2} \alpha_p\, \alpha_{jk}\, \alpha_{mn} \Bigg[2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial x_j} \int \frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial x_m} dt \int \frac{\partial V}{\partial x_n} dt \\ & \qquad + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p\, \partial x_j\, \partial x_m} \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt \times \int \frac{\partial V}{\partial x_n} dt \Bigg] \end{aligned}$$

Si l'on cherche les termes séculaires qui peuvent exister dans cette expression, on n'en trouve aucun dans les deux premières sommes.

En représentant par $\overline{F}$ la partie constante d'une fonction périodique quelconque F, on trouve dans la troisième somme les termes de rang *un*

$$t\sum \alpha_p \alpha_i \alpha_{jk} \frac{\partial n_q}{\partial \Lambda_i} \frac{\partial V}{\partial x_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q} \int\int \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_i \partial x_j} dt^2} + \overline{\frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q \partial x_j}\int\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} dt^2}\right],$$

si l'on fait alors $V = \Sigma C e^{i\omega}$, $\frac{\partial V}{\partial x_j} = \Sigma C' e^{i\omega}$, on voit immédiatement, comme ci-dessus quand il s'agissait de la somme S_1, que la quantité entre crochets est effectivement nulle. Ces termes disparaissent donc.

Considérons maintenant la dernière somme, en échangeant dans le premier terme les indices j et k, et permutant ensuite simultanément j et m, k *et* n, elle peut s'écrire

$$\sum \frac{1}{2} \alpha_p \alpha_{jk} \alpha_{mn} \left[\frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j \partial x_m} \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt \times \int \frac{\partial V}{\partial x_n} dt \right.$$
$$- \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_k} \int \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_m} dt \int \frac{\partial V}{\partial x_n} dt$$
$$\left. - \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_n} \int \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_m} dt \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt \right]$$

Elle contient alors des termes séculaires de rang *un*, correspondant aux parties constantes de $\frac{\partial V}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial V}{\partial x_n}$, on peut les réunir sous la forme

$$t\sum \alpha_p \alpha_{jk} \alpha_{mn} \frac{\partial V}{\partial x_k}\left[\overline{\frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j \partial x_m}\int \frac{\partial V}{\partial x_n} dt} - \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_n}\int \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_m} dt}\right],$$

et si l'on fait

$$\frac{\partial V}{\partial x_j \partial x_m} = \Sigma C e^{i\omega}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_n} = \Sigma C' e^{i\omega'},$$

on constate que ces termes disparaissent, comme ci-dessus, quand il s'agissait de la somme S_2.

De là résulte que $\delta^3 A_p$ ne peut pas contenir de termes séculaires de rang supérieur à *un*; plus généralement, en poursuivant le même mode de raisonnement, on verrait que $\delta^n A_p$ ne saurait contenir de termes séculaires de rang supérieur à $n-2$, et il en est de même

pour une fonction quelconque des A_p, comme on le vérifie sans peine. C'est le théorème de Poisson généralisé.

Il est possible de préciser davantage cette généralisation quand on fait des hypothèses complémentaires sur les équations (8), en appliquant toujours la même méthode, mais les calculs deviennent prolixes, et il vaut mieux recourir à d'autres procédés, nous nous bornerons donc à ce qui précède, d'autant plus que nous sommes ainsi en possession de tout ce qui est nécessaire pour la suite.

CHAPITRE XV.

CALCUL EFFECTIF DES PERTURBATIONS DES ÉLÉMENTS PERTURBATIONS DES COORDONNÉES

98. Le calcul des perturbations du premier ordre est facile. Proposons-nous de déterminer les inégalités de cette nature qui sont dues à l'action de la planète M' sur la planète M. La fonction perturbatrice générale V qui détermine le mouvement de M doit être limitée à la partie $fm'R$ qui correspond à l'action de M', nous mettrons cette partie sous la forme $\frac{fm}{\sqrt{aa'}}\Sigma A$, en désignant par A un terme quelconque du développement de $R\sqrt{aa'}$ que nous avons appris à former.

D'après la formule (10) du Chapitre XIII, A est lui-même de la forme

$$B\lambda^s\lambda'^{s'}\varepsilon_1^{p_1}\varepsilon_2^{p_2}\varepsilon_1'^{p_1'}\varepsilon_2'^{p_2'}\gamma_1'^{q_1}\gamma_2'^{q_2}\gamma_1''^{q_1'}\gamma_2''^{q_2'},$$

et B est une fonction du rapport α, égal à $\frac{a}{a'}$ ou à $\frac{a'}{a}$ suivant que l'on a $a < a'$ ou $a > a'$, nous emploierons toujours la caractéristique D pour marquer la dérivée d'une telle fonction par rapport à α, et comme précédemment, les formules écrites correspondront à l'hypothèse $a < a'$, pour obtenir les résultats relatifs à l'hypothèse contraire, il suffira de changer partout D en $-$D.

Comme on a $f = \frac{n^2a^3}{1+m}$, si nous posons

$$\mu' = \frac{1}{2}\,\frac{m'}{1+m}\sqrt{\frac{a}{a'}},$$

les équations (4) du Chapitre précédent s'écrivent immédiatement,

en profitant de tout ce qui a déjà été dit, sous la forme

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dn}{i\,dt} = -6\mu' n^2 \Sigma s A \qquad \left(\text{ou } \frac{d(\log a)}{i\,dt} = 4\mu' n \Sigma s A\right),\\
&\frac{d(il)}{i\,dt} = n - 4\mu' n \Sigma D A + \mu' n \Sigma A[2 + p_1 + p_2 + r_1 + r_2\\
&\qquad\qquad - \varepsilon_1\varepsilon_2(p_1 + p_2 - 2r_1 - 2r_2) + \ldots],\\
&\varepsilon_2 \frac{d\varepsilon_1}{i\,dt} = \mu' n \Sigma A[-p_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(2p_2 - s - r_1 - r_2) + \ldots],\\
&\varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_2}{i\,dt} = \mu' n \Sigma A[p_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2(2p_1 + s - r_1 - r_2) + \ldots],\\
&\gamma_2 \frac{d\gamma_1}{i\,dt} = \mu' n(1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots)\Sigma A[-r_2 - \gamma_1\gamma_2(s - p_1 + p_2)],\\
&\gamma_1 \frac{d\gamma_2}{i\,dt} = \mu' n(1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots)\Sigma A[r_1 - \gamma_1\gamma_2(s - p_1 + p_2)],
\end{aligned}
\right.
$$

les coefficients dont nous n'avons écrit que les premiers termes sont des séries entières par rapport à $\varepsilon_1\varepsilon_2$.

Conservons alors, afin de ne pas surcharger les notations, les lettres n, a, l, ... pour désigner les valeurs de première approximation que l'on adopte pour les éléments des diverses planètes, et soit $l = \nu t + l_0$ (n, a, ν, l_0, ... sont des constantes), on a

$$n^2 a^3 = f(1 + m),$$

et la différence $n - \nu$, qui est de l'ordre des masses perturbatrices, sera appelée ν^0. Soient de plus n^0, l^0, ε_1^0, ... de nouvelles constantes, de l'ordre des masses perturbatrices encore, les inconnues n, l, ε_1, ... peuvent se mettre sous la forme

$$
\begin{aligned}
&n + n^0 + \delta n + \delta^2 n + \ldots,\\
&l + (n^0 + \nu^0)t + l^0 + \delta l + \delta^2 l + \ldots,\\
&\varepsilon_1 + \varepsilon_1^0 + \delta\varepsilon_1 + \delta^2\varepsilon_1 + \ldots
\end{aligned}
$$

en représentant par

$$n^0 + \delta n,\ \delta^2 n,\ \ldots \qquad (n^0 + \nu^0)t + l^0 + \delta l,\ \delta^2 l,\ \ldots \qquad \varepsilon_1^0 + \delta\varepsilon_1,\ \delta^2\varepsilon_1,\ \ldots$$

leurs perturbations des divers ordres par rapport aux masses, et pour

préciser, nous assujettirons les quantités

$$\delta n,\ \delta^2 n \quad \ldots,\ \delta l,\ \delta^2 l,\ \ldots,\ \delta\varepsilon_1,\ \delta^2\varepsilon_1,$$

à ne contenir que des termes purement périodiques, ou séculaires, ou mixtes, sans aucun terme constant. Ajoutons que la valeur de l'élément a ou de son logarithme sera

$$a\left(1+\frac{n^0+\delta n+\delta^2 n+\ldots}{n}\right)^{-\frac{2}{3}}=a+\delta a+\delta^2 a+\ldots,$$

ou bien

$$\log a-\frac{2}{3}\log\left(1+\frac{n^0+\delta n+\delta^2 n+\ldots}{n}\right)=\log a+\delta(\log a)+\delta^2(\log a)+\ldots,$$

en désignant, comme nous l'avons déjà dit, par a la constante liée à n par la relation $n^2a^3=f(1+m)$.

Dans les formules précédentes, figurent des constantes superflues dont le rôle peut être entendu dans plusieurs sens différents, et dont on peut par suite disposer de diverses façons. Si l'on veut obtenir une solution analytique ne dépendant que des constantes arbitraires ν, l_0, ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, et des autres semblables, on déterminera les constantes auxiliaires ν^0, n^0, l^0, ε_1^0, ε_2^0, ... de façon à vérifier certaines conditions que l'on pourra s'imposer arbitrairement. Mais avant d'entrer dans plus de détails à ce sujet, il importe de préciser quelques définitions.

Si, dans une fonction X composée d'une partie constante, de termes séculaires, et aussi de termes périodiques et mixtes par rapport à certains arguments, on supprime tous les termes périodiques et mixtes, on obtient, par définition, la valeur moyenne (X) de cette fonction à l'époque t ; en particulier, la partie constante de X en est la valeur moyenne à l'origine du temps, pour laquelle on peut d'ailleurs choisir une époque donnée quelconque. Cette définition est légitime, car il en résulte que la valeur moyenne (X) est indépendante de l'origine du temps ; et en effet, si l'on change t en $t-t_0$, les termes constants et séculaires d'une part, les termes périodiques et mixtes d'autre part, se changent en termes de la même catégorie. Mais il faut observer avec soin que si Y, Z, ... sont analogues à X, et si l'on

à $X = f(Y, Z, \ldots)$, la valeur moyenne (X) n'est pas égale en général à $f[(Y), (Z), \ldots]$, si l'on pose en effet

$$F = f[(Y), (Z) \ldots], \qquad y = Y - (Y), \qquad z = Z - (Z), \quad \ldots,$$

on a

$$X = F + \frac{\partial F}{\partial (Y)} y + \frac{\partial F}{\partial (Z)} z + \ldots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial (Y)^2} y^2 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial (Y) \partial (Z)} y z + \ldots,$$

et l'on voit que si $y, z, \ldots$ ne contiennent que des termes périodiques ou mixtes, il n'en est pas de même en général de $y^2, \ldots, yz, \ldots$ En particulier, dans les problèmes qui nous occupent, on peut dire que l'on n'aura $(X) = F$ que si l'on néglige les perturbations du second ordre.

Revenons maintenant aux questions posées ci-dessus. Le choix le plus simple au point de vue des calculs sera celui qui consiste à faire $n^0 = l^0 = \varepsilon_1^0 = \ldots = 0$, de façon que les constantes $n, l_0, \varepsilon_1, \ldots$ soient précisément les valeurs moyennes pour $t = 0$ des inconnues $n, l, \varepsilon_1, \ldots$, en outre on prendra la quantité ν^0 égale et de signe contraire à la partie séculaire de rang *un* de la somme $\delta l + \delta^2 l + \ldots$, afin que la valeur moyenne à l'origine du temps de la vitesse de la longitude l soit ν, c'est-à-dire la vitesse même de l'argument l. Ce résultat ne pourra être obtenu que par approximations successives, et il en sera de même dans tous les cas analogues.

Mais on peut faire d'autres choix, dans le même ordre d'idées, comme nous le verrons ultérieurement.

On peut aussi regarder les quantités $\nu, n, l_0, \varepsilon_1, \ldots$ comme des constantes purement numériques, et alors $n^0, l^0, \varepsilon_1^0, \ldots$ sont les constantes d'intégration, il y a intérêt évident à ce que ces constantes soient en fait aussi petites que possible, et aussi à ce que la partie séculaire de rang *un* de l'expression complète de la longitude l soit aussi voisine que possible de νt; ces conditions seront réalisées par un choix convenable des constantes primitives $\nu, n, l_0, \varepsilon_1, \ldots$

Dans tous les cas, la détermination effective des constantes qui resteront dans les formules, comme aussi celle des masses des diverses planètes, ne pourra résulter que de la comparaison de la théorie aux observations les plus précises.

Ces généralités dites, les équations (1) permettent d'écrire immédiatement les parties de $\delta n, \delta l, \ldots$, qui proviennent de l'action de la

planète M'. On a

$$\frac{\delta n}{n} = -3\mu' \sum \frac{snA}{s\nu + s'\nu'},$$

$$(2)\quad \begin{cases} \delta(l) = -3\mu' \sum \frac{sn^2 A}{(s\nu + s'\nu')^2} - 2\mu' \sum \frac{n\,DA}{s\nu + s'\nu'} \\ \qquad + \mu' \sum \frac{nA}{s\nu + s'\nu'} [2 + p_1 + p_2 + r_1 + r_2 \\ \qquad\qquad - \varepsilon_1\varepsilon_2(p_1 + p_2 - 2r_1 - 2r_2) + \ldots], \\ \varepsilon_2(\delta\varepsilon_1) = \mu' \sum \frac{nA}{s\nu + s'\nu'} [-p_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(2p_2 - s - r_1 - r_2) + \ldots], \\ \varepsilon_1(\delta\varepsilon_2) = \mu' \sum \frac{nA}{s\nu + s'\nu'} [\;\; p_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2(2p_1 + s - r_1 - r_2) + \ldots], \\ \gamma_2(\delta\gamma_1) = \mu' \sum \frac{nA}{s\nu + s'\nu'} [-r_2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 r_2 - \gamma_1\gamma_2(s - p_1 + p_2) + \ldots], \\ \gamma_1(\delta\gamma_2) = \mu' \sum \frac{nA}{s\nu + s'\nu'} [\;\; r_1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 r_1 - \gamma_1\gamma_2(s - p_1 + p_2) + \ldots]; \end{cases}$$

de plus, la partie de $\delta(\log a)$ qui provient de même de l'action de M' est $-\frac{2}{3}\frac{\delta n}{n}$.

Ces formules supposent que les deux nombres s et s' ne sont pas nuls simultanément; dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il s'agit d'un terme séculaire A de la fonction perturbatrice, il est clair que l'on doit mettre partout $2Ant$ au lieu de $\frac{nA}{s\nu + s'\nu'}$, et l'on obtient ainsi les inégalités séculaires du premier ordre des divers éléments.

Rien n'est plus simple que de ramener les résultats précédents à la forme réelle. Les termes A sont conjugués deux à deux, et par suite, l'expression de $\frac{\delta n}{n}$, en premier lieu, se présente comme une somme $\Sigma C e^{i\omega}$ de termes conjugués deux à deux, les coefficients C étant réels, contenant le facteur

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2}\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{p'_1+p'_2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{r_1+r_2}\left(\frac{\gamma'}{2}\right)^{r'_1+r'_2},$$

et les arguments ω étant

$$sl + s'l' + (p_2 - p_1)\varpi + (p'_2 - p'_1)\varpi' + (r_2 - r_1)\theta + (r'_2 - r'_1)\theta',$$

on a donc sous forme trigonométrique symétrique (n° 78)

$$\delta n = \Sigma C \cos\omega$$

De même, $\delta(il)$ est une somme analogue $\Sigma C e^{i\omega} + it \Sigma C' e^{i\omega'}$, s et s' étant nuls dans ω', mais le résultat est purement imaginaire, de sorte que l'on a encore le développement trigonométrique réel *symétrique*

$$\delta l = \Sigma C \sin\omega + t \Sigma C' \cos\omega'$$

L'expression de $\varepsilon_1(\delta\varepsilon_2)$ est aussi une somme analogue

$$\Sigma C e^{i\omega} + it \Sigma C' e^{i\omega'},$$

mais complexe, et l'expression de $\varepsilon_2(\delta\varepsilon_1)$ en est la conjuguée. Si l'on prend les valeurs des inconnues ε et ϖ sous la forme

$$\varepsilon + \delta\varepsilon + \delta^2\varepsilon + \quad \varpi + \delta\varpi + \delta^2\varpi +$$

ou bien celles de $\varepsilon \cos\varpi$ et $\varepsilon \sin\varpi$ sous la forme

$$\varepsilon\cos\varpi + \delta(\varepsilon\cos\varpi) + \delta^2(\varepsilon\cos\varpi) + \ldots, \quad \varepsilon\sin\varpi + \delta(\varepsilon\sin\varpi) + \delta^2(\varepsilon\sin\varpi) + \ldots$$

les constantes ε et ϖ correspondant aux constantes ε_1 et ε_2 par les relations $2\varepsilon_1 = \varepsilon e^{-i\varpi}$, $2\varepsilon_2 = \varepsilon e^{i\varpi}$, on a immédiatement pour les parties de $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\delta\varpi$, $\delta(\varepsilon\cos\varpi)$, $\delta(\varepsilon\sin\varpi)$, qui proviennent de l'action de la planète M', les développements trigonométriques réels non symétriques

$$\delta\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon}(\Sigma C \cos\omega - t\Sigma C' \sin\omega'),$$

$$\varepsilon\delta\varpi = \frac{4}{\varepsilon}(\Sigma C \sin\omega + t\Sigma C' \cos\omega'),$$

$$\delta(\varepsilon\cos\varpi) = \frac{4}{\varepsilon}[\Sigma C \cos(\omega + \varpi) - t\Sigma C' \sin(\omega' + \varpi)]$$

$$\delta(\varepsilon\sin\varpi) = \frac{4}{\varepsilon}[\Sigma C \sin(\omega + \varpi) + t\Sigma C' \cos(\omega' + \varpi)]$$

On peut répéter la même chose sur les éléments γ, θ, $\gamma\cos\theta$, $\gamma\sin\theta$, en partant du développement de $\gamma_1(\delta\gamma_2)$

99 Il n'y a aucune difficulté dans ce qui précède. Pour en montrer une application simple, cherchons les perturbations indépendantes de λ', en ne dépassant pas le premier degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons

En raison de l'abaissement de degré qui se produit quand on passe d'un terme A de la fonction perturbatrice au terme correspondant de $\delta\varepsilon_1$ ou $\delta\varepsilon_2$, $\delta\gamma_1$ ou $\delta\gamma_2$, il faut prendre, en profitant des résultats

du n° 91,

$$\begin{aligned}\Sigma A = {} & b_0^{\frac12} + (\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma'_2 + \gamma_2\gamma'_1)\, b_1^{\frac32} - (\varepsilon_1\varepsilon'_2 + \varepsilon_2\varepsilon'_1)\, b_2^{\frac32} \\ & + (\varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^{-1})\left(\frac12 - D\right) b_0^{\frac12} + (\varepsilon'_1\lambda + \varepsilon'_2\lambda^{-1})\left(-\frac32 + D\right) b_1^{\frac12} \\ & + (\varepsilon_1^2\lambda^2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2})\left(\frac78 - 2D + \frac12 D^2\right) b_0^{\frac12} \\ & + (\varepsilon_1\varepsilon'_1\lambda^2 + \varepsilon_2\varepsilon'_2\lambda^{-2})\left(-\frac{15}{4} + 4D - D^2\right) b_1^{\frac12} \\ & + \frac12(\gamma_1^2\lambda^2 + \gamma_2^2\lambda^{-2})\, b_1^{\frac32} - (\gamma_1\gamma'_1\lambda^2 + \gamma_2\gamma'_2\lambda^{-2})\, b_1^{\frac32},\end{aligned}$$

conformément à une observation faite à la fin du n° 90, les nombres $D^k b_1^{\frac12}$ qui figurent ici n'ont pas besoin d'être corrigés en raison de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice, et c'est ce que rend encore évident la présence du facteur $\frac32 - D$ dans tous les coefficients symboliques de $b_1^{\frac12}$.

Il vient alors pour les perturbations séculaires

$$\begin{aligned}\delta l &= \mu' nt(2 - 4D)\, b_0^{\frac12}, \\ \delta\varepsilon_2 &= \mu' nt\left(\varepsilon_2 b_1^{\frac32} - \varepsilon'_2 b_2^{\frac32}\right), \\ \delta\gamma_2 &= \mu' nt(\gamma'_2 - \gamma_2)\, b_1^{\frac32},\end{aligned}$$

et pour les perturbations périodiques, en confondant encore n avec ν

$$\begin{aligned}\frac{\delta n}{n} &= \mu'(\varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^{-1})(-3 + 6D)\, b_0^{\frac12} + \mu'(\varepsilon'_1\lambda + \varepsilon'_2\lambda^{-1})(9 - 6D)\, b_1^{\frac12}, \\ \delta(l) &= \mu'(\varepsilon_1\lambda - \varepsilon_2\lambda^{-1})\left(-\frac32 + D + 4D^2\right) b_0^{\frac12} \\ & \quad + \mu'(\varepsilon'_1\lambda - \varepsilon'_2\lambda^{-1})(6 + 2D - 4D^2)\, b_1^{\frac12}, \\ \delta\varepsilon_2 &= \mu'\lambda\left(\frac12 - D\right) b_0^{\frac12} + \mu'\varepsilon_1\lambda^2\left(\frac78 - 2D + \frac{D^2}{2}\right) b_0^{\frac12} \\ & \quad + \mu'\varepsilon'_1\lambda^2\left(-\frac{15}{8} + 2D - \frac{D^2}{2}\right) b_1^{\frac12} \\ \delta\gamma_2 &= \frac12\mu'(\gamma_1 - \gamma'_1)\lambda^2 b_1^{\frac32}\end{aligned}$$

On voit que les termes qui dépendent des inclinaisons disparaissent

quand on fait l'hypothèse $\gamma_1 = \gamma'_1$, $\gamma_2 = \gamma'_2$. C'est un fait général, car si les plans des orbites osculatrices de deux planètes sont confondus à un certain instant, ils le seront toujours, du moins tant que l'on ne tiendra compte que de leurs actions mutuelles.

Cherchons encore l'expression générale des inégalités de degré zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, qui dépendent de λ'. Elles correspondent à

$$\Sigma A = \Sigma \lambda^s \lambda'^{-s} \left[1 + \varepsilon_1 \lambda \left(2s + \frac{1}{2} - D \right) + \varepsilon_2 \lambda^{-1} \left(-2s + \frac{1}{2} - D \right) \right] b_s^{\frac{1}{2}},$$

l'indice s prenant toutes les valeurs entières non nulles.

Confondant toujours n avec ν, n' avec ν', et faisant pour abréger

$$\beta = \frac{n}{n - n'}, \qquad B_s = \mu' \lambda^s \lambda'^{-s} b_s^{\frac{1}{2}},$$

il en résulte immédiatement

$$\frac{\delta n}{n} = \sum -6 \beta B_s, \qquad \delta(il) = \sum \frac{2 - 4D - 6\beta}{s} \beta B_s,$$

$$\lambda\, \delta\zeta_1 = \sum \frac{2s - \frac{1}{2} + D}{s - \beta} \beta B_s, \qquad \lambda^{-1}\, \delta\zeta_2 = \frac{2s + \frac{1}{2} - D}{s + \beta} \beta B_s$$

Pour nous rendre un compte plus exact des réalités du problème, supposons que les planètes M et M′ soient respectivement Jupiter et Saturne, et donnons aux lettres leurs valeurs numériques, d'après Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. X).

Les unités sont l'unité astronomique de longueur déjà définie, la masse du Soleil, et l'année julienne de 365,25 jours solaires moyens; l'époque est 1850,0. On a

$$m = \frac{1}{1050}, \qquad m' = \frac{1}{3512},$$

$$n = \nu = 109256'',72, \qquad n' = \nu' = 43996'',13,$$

d'où

$$a = [0,7162369], \qquad a' = [0,9794961],$$

$$\alpha = [\bar{1},73674], \qquad \mu' = [\bar{4},02137],$$

de plus

$$\varepsilon = 0,0482388, \qquad \varepsilon' = 0,0559956,$$

$$j = 1^\circ 18' 40'',31, \qquad j' = 2^\circ 29' 28'',14$$

La valeur de α conduit d'abord aux résultats suivants, complétés

plus loin

$$b_0^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},90586], \qquad b_1^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},36030], \qquad b_1^{\frac{3}{2}} = [\bar{1},80749],$$

$$D b_0^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},75245], \qquad D b_1^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},61637], \qquad b_2^{\frac{3}{2}} = [\bar{1},62291]$$

$$D^2 b_0^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},92594], \qquad D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},97103]$$

Mais les coefficients $D^h b_1^{\frac{1}{2}}$ doivent être corrigés comme l'on sait, pour tenir compte de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice, pour l'action de Saturne sur Jupiter, ils deviennent

$$b_1^{\frac{1}{2}} = [\bar{2},44460], \qquad D b_1^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},04614] \qquad D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},68332],$$

et pour l'action de Jupiter sur Saturne, ils sont

$$b_1^{\frac{1}{2}} = [0,00518 -], \qquad D b_1^{\frac{1}{2}} = [0,35703], \qquad D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = [0,26889 -]$$

On obtient alors pour les inégalités du mouvement de Jupiter calculées ci-dessus, et indépendantes de l'

$$\delta n = 0'',54 \cos(l - \varpi) - 0'',27 \cos(l - \varpi'),$$

$$\delta l = -7'',481\, t + 2'',85 \sin(l - \varpi) - 1'',87 \sin(l - \varpi'),$$

$$\begin{aligned} \delta e = &-0'',2697\, t \sin(\varpi - \varpi') - 7'',06 \cos(l - \varpi) \\ &- 0'',01 \cos(2l - 2\varpi) - 0'',09 \cos(2l - \varpi - \varpi'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e\,\delta\varpi = &\ 0'',3554\, t - 0'',2697\, t \cos(\varpi - \varpi') - 7'',06 \sin(l - \varpi) \\ &- 0'',01 \sin(2l - 2\varpi) - 0'',09 \sin(2l - \varpi - \varpi'), \end{aligned}$$

$$\delta i = 0'',3203\, t \sin(\theta - \theta') + 0'',16 \cos(2l - 2\theta) - 0'',30 \cos(2l - \theta - \theta'),$$

$$\begin{aligned} i\,\delta\theta = &-0'',1686\, t + 0'',3203\, t \cos(\theta - \theta') + 0'',16 \sin(2l - 2\theta) \\ &- 0'',30 \sin(2l - \theta - \theta') \end{aligned}$$

Et pour les autres inégalités déterminées précédemment, on a, en ne dépassant pas 5 pour la valeur absolue de s,

$$\begin{aligned} \delta n = &-6'',42 \cos(l - l') - 21'',95 \cos 2(l - l') - 10'',05 \cos 3(l - l') \\ &- 4'',82 \cos 4(l - l') - 2'',37 \cos 5(l - l'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta l = &-48'',54 \sin(l - l') - 66'',99 \sin 2(l - l') - 24'',76 \sin 3(l - l') \\ &- 10'',44 \sin 4(l - l') - 4'',71 \sin 5(l - l'), \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r}\delta\varepsilon \\ \varepsilon\,\delta\varpi\end{array}\right\} = +0'',52 \,{\cos \atop \sin}(6l - 5l' - \varpi) + 0'',97 \,{\cos \atop \sin}(5l - 4l' - \varpi)$$

$$+1'',79 \,{\cos \atop \sin}(4l - 3l' - \varpi) + 3'',12 \,{\cos \atop \sin}(3l - 2l' - \varpi)$$

$$-1'',13 \,{\cos \atop \sin}(2l - l' - \varpi) - 16'',47 \,{\cos \atop \sin}(l' - \varpi)$$

$$+134'',35 \,{\cos \atop \sin}(2l' - l - \varpi) + 22'',32 \,{\cos \atop \sin}(3l' - 2l - \varpi)$$

$$+8'',07 \,{\cos \atop \sin}(4l - 3l - \varpi) + 3'',45 \,{\cos \atop \sin}(5l' - 4l - \varpi)$$

Si l'on veut, conservant les mêmes notations, avoir les résultats analogues pour Saturne, il faut remplacer le facteur μ' par $\mu = [\bar{4},80929]$, permuter les lettres accentuées et celles non accentuées, et changer le signe de D; on a ainsi d'abord

$$\delta n' = -9'',22 \cos(l' - \varpi') + 6'',22 \cos(l' - \varpi)$$

$$\delta l' = 109'',8\,t + 11'',91 \sin(l' - \varpi') - 20'',48 \sin(l' - \varpi),$$

$$\delta e' = -0'',5741\,t \sin(\varpi' - \varpi) + 227'',42 \cos(l' - \varpi')$$
$$+16'',80 \cos(2l' - 2\varpi') - 11'',06 \cos(2l' - \varpi - \varpi'),$$

$$e'\,\delta\varpi' = 1'',0194\,t - 0'',5741\,t \cos(\varpi' - \varpi) + 227'',42 \sin(l' - \varpi)$$
$$+16'',80 \sin(2l' - 2\varpi') - 11'',06 \sin(2l - \varpi - \varpi'),$$

$$\delta\gamma' = 0'',4166\,t \sin(\theta' - \theta) + 1'',86 \cos(2l' - 2\theta')$$
$$-0'',98 \cos(2l' - \theta - \theta'),$$

$$\gamma'\,\delta\theta' = -0'',7915\,t + 0'',4166\,t \cos(\theta' - \theta)$$
$$+1'',86 \sin(2l' - 2\theta') - 0'',98 \sin(2l' - \theta - \theta),$$

puis encore

$$\delta n' = -232'',18 \cos(l - l') + 21'',84 \cos 2(l - l') + 10'',00 \cos 3(l - l')$$
$$+ 4'',80 \cos 4(l - l') + 2'',36 \cos 5(l - l'),$$

$$\delta l' = 534'',87 \sin(l - l') + 148'',47 \sin 2(l - l') + 55'',97 \sin 3(l - l')$$
$$+ 23'',91 \sin 4(l - l') + 10'',91 \sin 5(l - l'),$$

$$\left.\begin{matrix}\delta\varepsilon' \\ \varepsilon'\delta\varpi'\end{matrix}\right\} = -1'',18 \frac{\cos}{\sin}(5l - 4l' - \varpi') - 2'',11 \frac{\cos}{\sin}(4l - 3l' - \varpi')$$

$$- 3'',49 \frac{\cos}{\sin}(3l - 2l' - \varpi') - 4'',22 \frac{\cos}{\sin}(2l - l' - \varpi')$$

$$+ 406'',18 \frac{\cos}{\sin}(l - \varpi') + 140'',15 \frac{\cos}{\sin}(2l' - l - \varpi')$$

$$- 94'',46 \frac{\cos}{\sin}(3l' - 2l - \varpi') - 34'',81 \frac{\cos}{\sin}(4l' - 3l - \varpi')$$

$$- 15'',07 \frac{\cos}{\sin}(5l' - 4l - \varpi') - 6'',99 \frac{\cos}{\sin}(6l' - 5l - \varpi')$$

Il est nécessaire d'accorder une attention spéciale aux inégalités à longue période. Si nous revenons à l'exemple précédent de Jupiter et Saturne, commençons par réduire le rapport $\frac{\nu}{\nu'}$ en fraction continue, soit

$$\frac{\nu}{\nu'} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{14 + \dots}}$$

la grandeur du quotient incomplet 14 nous montre que la réduite précédente, soit $\frac{5}{2}$, doit différer très peu de $\frac{\nu}{\nu'}$, et en effet on a $5\nu' - 2\nu = 1467'',21$, nous aurons donc des inégalités à longue période correspondant à l'argument $5l' - 2l$, cette période est de 883 ans environ. Les termes de la fonction perturbatrice qui dépendent de cet argument sont au moins du troisième degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ; malgré cela, les inégalités correspondantes deviennent considérables, comme nous allons le voir.

La première réduite du développement de $\frac{\nu}{\nu'}$ est 2 ; il en résultera seulement, la différence $\nu - 2\nu'$ étant $21264''$, que les inégalités qui dépendent de l'argument $l - 2l'$ seront augmentées, sans devenir très grandes.

La troisième réduite est $\frac{72}{29}$, et les inégalités correspondantes seraient encore à très longue période ; mais les termes qui dépendent de l'argument $72l' - 29l$ sont, dans la fonction perturbatrice, du 43e degré au moins par rapport aux excentricités et aux

inclinaisons, ce qui les rend complètement insensibles. Si cependant la différence $72\nu' - 29\nu$ était suffisamment petite, ou bien encore si les excentricités et les inclinaisons avaient des valeurs plus considérables, les inégalités correspondantes pourraient devenir grandes, il est vrai, mais alors on devrait développer le sinus et le cosinus de $72l' - 29l$ suivant les puissances du temps, et l'on obtiendrait en réalité des inégalités séculaires d'un type nouveau, entièrement négligeables pendant un espace de temps suffisamment grand.

Ces réflexions s'appliquent à tous les cas semblables; en particulier, elles montrent qu'il n'y aura jamais lieu de prendre en considération plus d'un argument à vraiment longue période, quand on envisage seulement l'action mutuelle de deux planètes; mais il pourra se présenter plusieurs arguments à période assez longue, dont il faudra tenir compte avec beaucoup de soin. C'est ainsi que dans le cas de Jupiter et Saturne, outre l'argument $l - 2l'$ déjà signalé, il conviendra de s'attacher aux arguments $3l' - l$, $7l' - 3l$, ..., qui résultent de la combinaison linéaire de $l - 2l'$ et $5l' - 2l$.

Il est d'ailleurs sous-entendu, par la nature même de la question, que la longueur d'une période doit être appréciée par rapport aux durées de révolution des planètes envisagées.

Déterminons effectivement les parties principales des *grandes inégalités* de Jupiter et de Saturne, c'est-à-dire des inégalités qui dépendent de l'argument $5l' - 2l$, en laissant de côté les termes qui contiennent les inclinaisons, beaucoup plus petits que ceux qui ne contiennent que les excentricités, on doit prendre, d'après le n° 91,

$$\Sigma A = \lambda^{-2}\lambda'^{5}(P_0 \varepsilon_1^3 + P_1 \varepsilon_1^2 \varepsilon'_1 + P_2 \varepsilon_1 \varepsilon'^2_1 + P_3 \varepsilon'^3_1) + \ldots,$$

les termes qui manquent étant les conjugués de ceux qui sont écrits, et l'on a

$$P_0 = \left(-\frac{2473}{48} - \frac{527}{24} D - \frac{13}{4} D^2 - \frac{D^3}{6}\right) b^{\frac{1}{2}}_{5},$$

$$P_1 = \left(\frac{2567}{16} + \frac{559}{8} D + \frac{41}{4} D^2 + \frac{D^3}{2}\right) b^{\frac{1}{2}}_{4},$$

$$P_2 = \left(-\frac{2585}{16} - \frac{587}{8} D - \frac{43}{4} D^2 - \frac{D^3}{2}\right) b^{\frac{1}{2}}_{3},$$

$$P_3 = \left(\frac{2455}{48} + \frac{611}{24} D + \frac{15}{4} D^2 + \frac{D^3}{6}\right) b^{\frac{1}{2}}_{2}$$

La valeur de α donne

$$b_{2}^{\frac{1}{2}} = [\bar{2},97857],\quad b_{3}^{\frac{1}{2}} = [\bar{2},63945],\quad b_{4}^{\frac{1}{2}} = [\bar{2},32023],\quad b_{5}^{\frac{1}{2}} = [\bar{2},01259],$$

$$D b_{2}^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},43179],\quad D b_{3}^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},22585],\quad D b_{4}^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},00778],\quad D b_{5}^{\frac{1}{2}} = [\bar{2},78185],$$

$$D^2 b_{2}^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},93253],\quad D^2 b_{3}^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},84020],\quad D^2 b_{4}^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},71372],\quad D^2 b_{5}^{\frac{1}{2}} = [\bar{1},56413],$$

$$D^3 b_{2}^{\frac{1}{2}} = [0,51140],\quad D^3 b_{3}^{\frac{1}{2}} = [0,49911],\quad D^3 b_{4}^{\frac{1}{2}} = [0,44784],\quad D^3 b_{5}^{\frac{1}{2}} = [0,36560],$$

$$D^4 b_{2}^{\frac{1}{2}} = [1,19706],\quad D^4 b_{3}^{\frac{1}{2}} = [1,22327],\quad D^4 b_{4}^{\frac{1}{2}} = [1,22344],\quad D^4 b_{5}^{\frac{1}{2}} = [1,19493],$$

de sorte que

$$P_0 = [0,53620-],\quad P_1 = [1,23482],\quad P_2 = [1,45339-],\quad P_3 = [1,19034],$$

$$DP_0 = [1,32877-],\quad DP_1 = [1,95225],\quad DP_2 = [2,08008-],\quad DP_3 = [1,70257]$$

En posant

$$\omega_1 = 5l' - 2l - 3\varpi,\qquad \omega_2 = 5l' - 2l - 2\varpi - \varpi',$$

$$\omega_3 = 5l' - 2l - \varpi - 2\varpi',\qquad \omega_4 = 5l' - 2l - 3\varpi',$$

on en déduit sans peine pour Jupiter

$$\delta n = -0'',99\cos\omega_1 + 5'',74\cos\omega_2 - 11'',02\cos\omega_3 + 6'',98\cos\omega_4,$$

$$\delta l = -136'',0\sin\omega_1 + 791'',3\sin\omega_2 - 1524'',5\sin\omega_3 + 968'',9\sin\omega_4,$$

$$\left.\begin{matrix}\delta\varepsilon \\ \varepsilon\,\delta\varpi\end{matrix}\right\} = -19'',36 \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\,\omega_1 + 74'',84 \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\,\omega_2 - 71'',85 \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\,\omega_3,$$

et pour Saturne

$$\delta n' = 2'',46\cos\omega_1 - 14'',27\cos\omega_2 + 27'',40\cos\omega_3 - 17'',36\cos\omega_4,$$

$$\delta l' = 335'',6\sin\omega_1 - 1953'',0\sin\omega_2 + 3762'',6\sin\omega_3 - 2391'',3\sin\omega_4,$$

$$\left.\begin{matrix}\delta\varepsilon' \\ \varepsilon'\,\delta\varpi'\end{matrix}\right\} = 79'',66 \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\,\omega_2 - 305'',90 \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\,\omega_3 + 290'',65 \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\,\omega_4$$

Ces résultats rendent suffisamment manifeste l'influence des petits diviseurs. Ils permettront encore de vérifier l'observation suivante. Si un terme A de la forme indiquée précédemment est commun aux deux fonctions perturbatrices qui déterminent l'action de M sur M'

et celle de M′ sur M, les formules (2) montrent que les parties principales des inégalités correspondantes δn, $\delta n'$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon'_2$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma'_2$ sont dans des rapports simples qu'il est superflu de préciser davantage. Il n'en est pas de même pour les parties principales de δl et de $\delta l'$, si μ désigne le coefficient analogue à μ', mais relatif à l'action de M sur M′, et si P est le degré total de A par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, on a, en confondant encore n avec ν, n' avec ν'

$$\delta(nl) = -6\mu\frac{s\nu^2 A}{(s\nu+s'\nu')^2} - 4\mu'\frac{\nu DA}{s\nu+s'\nu'} + \frac{\mu'\nu A}{s\nu+s'\nu'}(2+p_1+p_2-r_1+r_2),$$

$$\delta(nl') = -6\mu\frac{s'\nu'^2 A}{(s\nu+s'\nu')^2} + 4\mu\frac{\nu' DA}{s\nu+s'\nu'} + \frac{\mu\nu' A}{s\nu+s'\nu'}(2+p'_1+p'_2+r'_1+r'_2),$$

et par suite

$$\frac{\delta(nl)}{\mu'\nu} + \frac{\delta(nl')}{\mu\nu'} = \frac{(P-2)A}{s\nu+s'\nu'},$$

ou encore, d'après la valeur de δn

$$\frac{\delta l'}{\delta l} = -\frac{\mu\nu'}{\mu'\nu}\left[1+(P-2)\frac{\delta n}{6sn\,\delta(nl)}\right],$$

si $P = 2$, on a donc exactement

$$\frac{\delta l'}{\delta l} = -\frac{\mu\nu'}{\mu'\nu},$$

si maintenant les inégalités considérées sont à longue période, cette même relation a encore lieu quel que soit P, mais seulement d'une façon approchée, car le rapport $\frac{\delta n}{n\,\delta(nl)}$ est évidemment fort petit dans ce cas, plus exactement, puisqu'en raison de la petitesse du diviseur $s\nu+s'\nu'$, la partie la plus importante de $\delta(nl)$ est de beaucoup celle qui dépend du carré de ce diviseur, on a sensiblement

$$\frac{\delta n}{n\,\delta(nl)} = \frac{s\nu+s'\nu'}{\nu},$$

et par suite, d'une façon très approchée,

$$\frac{\delta l'}{\delta l} = -\frac{\mu\nu'}{\mu'\nu}\left[1+(P-2)\frac{s\nu+s'\nu'}{6s\nu}\right]$$

100 La détermination théorique des perturbations d'ordre supé-

rieur ne saurait offrir aucune difficulté, pratiquement, c'est une opération complexe et délicate, même en se bornant aux termes en nombre limité qui peuvent acquérir une influence sensible, elle ne peut être entreprise que systématiquement, et nous devons nous borner à quelques indications sommaires relativement au calcul des perturbations du second ordre, si l'on voulait aller encore au delà, à part quelques termes faciles à mettre en évidence en s'inspirant de ce qui va suivre, les difficultés d'ordre pratique deviendraient rapidement insurmontables et il n'y a pas lieu de s'y arrêter davantage,

D'après les équations (1), un terme quelconque des dérivées $\frac{dn}{i\,dt}$, $\frac{d(il)}{i\,dt} - n$, $\frac{d\varepsilon_1}{i\,dt}$, $\frac{d\varepsilon_2}{i\,dt}$, se présente sous la forme

$$A = \mu' n^k B \lambda^s \lambda'^{s'} \varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_2^{p_2} \varepsilon_1'^{p_1'} \varepsilon_2'^{p_2'} \gamma_1^{r_1} \gamma_2^{r_2} \gamma_1'^{r_1'} \gamma_2'^{r_2'},$$

l'exposant k étant 1, sauf dans l'expression de $\frac{dn}{i\,dt}$, où il est 2, et B étant une fonction du rapport α

Si donc on fait $\Delta n = n^0 + \delta n$, $\Delta l = (n^0 + \nu^0)\,t + l^0 + \delta l$, $\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \delta\varepsilon_1$, , la partie du second ordre de A sera évidemment

$$(3)\quad A\left[\left(k - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}D\right)\frac{\Delta n}{n} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}D\right)\frac{\Delta n'}{n'} + s\,\Delta(il) + s'\Delta(il') + p_1\frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + p_2\frac{\Delta\varepsilon_2}{\varepsilon_2} + \quad + r_2'\frac{\Delta\gamma_2'}{\gamma_2'}\right],$$

d'après la façon dont μ', a, a' dépendent de n et n', la caractéristique D s'applique d'ailleurs seulement à la fonction B de α, et nous rappelons qu'on suppose implicitement $a < a'$, le signe de D devant être changé dans le cas contraire Il n'y a plus qu'à développer les différents termes de ces expressions, et à les intégrer comme précédemment, pour avoir les perturbations du second ordre, en particulier, pour obtenir $\delta^2(il)$, il faudra faire la double intégration des termes de la dérivée $\frac{d(\delta^2 n)}{i\,dt}$

Dans ces calculs, il faudra porter l'attention principalement sur les termes séculaires et sur les termes susceptibles de croître par l'intégration

On voit bien maintenant pourquoi il est non seulement convenable, mais encore avantageux, que les expressions de $\Delta(il)$, $\Delta(il')$ ne

contiennent aucun terme en t, car de cette façon on evite dans l'expression (3) l'introduction de nombreux termes seculaires et mixtes

On voit aussi que pour tenir compte des parties constantes de Δn, Δl, $\Delta \varepsilon_1$, ..., il suffira de remplacer dans les expressions analytiques de δn, δl, $\delta \varepsilon_1$, ... les quantités n, l, ε_1, ... par $n + n^0$, $l + l^0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_1^0$, ... ainsi qu'il est évident *a priori*, et il sera par suite convenable que les constantes n^0, l^0, ε_1^0, ... soient en fait aussi petites que possible, ainsi que nous l'avons deja dit De ces observations, il resulte que nous pouvons, dans ce qui suit, faire abstraction de ces constantes, en même temps que supposer les accroissements Δl, $\Delta l'$ reduits à leurs parties periodiques

Il ne faut pas oublier d'ailleurs que Δn, par exemple, se compose des perturbations de M dues à l'action de toutes les autres planetes, et non seulement à celle de M', de sorte que, parmi les perturbations du second ordre, il s'en trouvera qui dependent de trois arguments tels que l, l', l'' c'est ainsi que le moyen mouvement sideral annuel d'Uranus etant 15424",8, si l, l', l'' representent respectivement les longitudes moyennes de Jupiter, Saturne, Uranus, l'argument $6l' - 2l - 3l''$ devra être considere particulierement comme etant a tres longue periode, puisque le coefficient du temps y est seulement $-811''$

Envisageons specialement l'effet des termes séculaires de $\Delta \varepsilon_1$, $\Delta \varepsilon_2$, ... sur les perturbations du second ordre Si nous représentons ces termes par $\eta_1 t$, $\eta_2 t$, ..., l'expression (3) devient, en ne tenant compte pour l'ecriture que de $\eta_1 t$,

$$\frac{p_1 A \eta_1}{\varepsilon_1} t,$$

et si l'on a d'abord $s = s' = 0$, il en résulte pour l'elément correspondant l, ou ε_1, ou ε_2, ... (ce cas ne peut se présenter pour n), la perturbation séculaire de rang *deux*

$$-\frac{p_1 A \eta_1}{\varepsilon_1} \frac{t^2}{2}$$

Dans le cas contraire, on a un terme mixte et un terme périodique, savoir

$$\frac{p_1 A \eta_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{t}{s\nu + s'\nu'} - \frac{1}{(s\nu + s'\nu')^2}\right),$$

ou bien

$$\frac{p_1 A \eta_1}{c_1}\left[\frac{it}{(s\nu+s'\nu')^2}-\frac{2}{(s\nu+s'\nu')^3}\right],$$

suivant que l'on doit exécuter une intégration simple ou double, mais dans l'un ou l'autre de ces cas, on voit que pour obtenir la partie mixte il suffit de remplacer dans les expressions analytiques de δn, δl, les quantités ε_1, ε_2, par $\varepsilon_1 + \eta_1 it$, $\varepsilon_2 + \eta_2 it$,

Quand on prend dans l'expression (3) les parties de Δn, $\Delta n'$, qui dépendent de l'argument $\lambda^{-s}\lambda'^{-s'}$, on obtiendra un terme constant qui produira une inégalité séculaire de rang *un* dans les éléments il, ε_1, ε_2, dans n, ces diverses inégalités séculaires devront disparaître, d'après le théorème de Poisson

Supposons encore que l'on prenne dans (3) les parties de Δn, $\Delta n'$, qui dépendent d'un argument à longue période, dans ce cas, on pourra le plus souvent se borner à la considération des inégalités de $\Delta\,(il)$, $\Delta\,(il')$, qui sont de beaucoup les plus importantes, et si le petit diviseur qui correspond à cet argument est négligeable par rapport au diviseur $s\nu + s'\nu'$, tout se passe évidemment comme si dans les expressions de δn, δl, , on augmentait simplement les arguments il, il' de leurs perturbations du premier ordre à longue période mais ce n'est là qu'une approximation, qui n'est pas toujours suffisante

Dans l'exemple traité précédemment des perturbations dues à l'action mutuelle de Jupiter et de Saturne, nous avons pris pour ν et ν', ainsi qu'on doit toujours le faire, les moyens mouvements sidéraux des deux planètes, tels qu'ils résultent des observations Nous avons fait de plus $n = \nu$, $n' = \nu'$, c'est-à-dire $\nu^0 = \nu'^0 = 0$, il faudra donc commencer par tenir compte des constantes n^0, n'^0, choisies de telle façon que Δl, $\Delta l'$, n'aient pas de termes en t, et par suite, en négligeant les actions très petites dues aux autres planètes, ainsi qu'aux excentricités et aux inclinaisons, prendre en nombres ronds $n^0 = 7'',5$, $n'^0 = -110''$ En réalité, il aurait mieux valu commencer par déterminer directement les parties principales des inégalités séculaires de rang *un* de l et de l' dues à l'action des diverses planètes, en appliquant les formules simples rapportées au numéro précédent, prenant alors les différences ν^0, ν'^0 égales et de signes contraires aux coefficients de t dans ces inégalités, et faisant le calcul des coefficients de Laplace

avec les valeurs n, n' ou a, a' correspondantes, l'influence des nouvelles constantes n^0, n'^0 rencontrées par la suite serait devenue insensible

Il serait encore bien préférable de pouvoir éviter l'emploi de la constante ν^0, tout en rendant insensible l'influence de n^0, car de cette façon on pourrait confondre exactement n avec ν Pour répondre à ce desideratum, il suffit d'employer l'artifice suivant, qui présente en même temps plusieurs autres avantages Assujettissons les éléments variables a et n, aussi bien que les constantes désignées par ces mêmes lettres au n° 98, à vérifier non plus la relation $n^2a^3 = f(1+m)$, mais une relation voisine $n^2 a^3 = k^2$, telle que l'on ait

$$f(1+m) = k^2(1+\varkappa),$$

la constante $\varkappa$ étant choisie provisoirement d'une façon arbitraire, de l'ordre des forces perturbatrices cette façon de faire est légitime à la condition évidente d'augmenter la fonction perturbatrice V de $\frac{\varkappa k^2}{r}$ Rien ne sera changé alors aux calculs précédents, sauf que le facteur μ' devra être multiplié par $1+\varkappa$, et que la fonction ΣA devra être augmentée de $\frac{\nu}{2\mu'}\frac{a}{r}$, μ' ayant ici sa nouvelle valeur

On a d'ailleurs

$$\frac{a}{r} = 1 + \varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^{-1} + 2\varepsilon_1^2\lambda^2 + 2\varepsilon_2^2\lambda^{-2} + \ldots,$$

et comme nous le savons, cette expression ne contient aucun terme indépendant de λ autre que le premier, 1

Les parties principales des inégalités du premier ordre qui proviennent de cette fonction perturbatrice supplémentaire pour le mouvement de M se calculent immédiatement et sont

$$\frac{\delta n}{n} = -3\varkappa(\varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^{-1}) - 6\varkappa(\varepsilon_1^2\lambda^2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2}) + \ldots,$$

$$\delta(l) = 2\nu n t - \frac{\varkappa}{2}(\varepsilon_1\lambda - \varepsilon_2\lambda^{-1}) + 5\varkappa(\varepsilon_1^2\lambda^2 - \varepsilon_2^2\lambda^{-2}) + \ldots,$$

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{\varkappa}{2}\lambda^{-1} + \varkappa\varepsilon_2\lambda^{-2} + \ldots, \qquad \delta\varepsilon_2 = \frac{\varkappa}{2}\lambda + \varkappa\varepsilon_1\lambda^2 + \ldots$$

Si donc on veut prendre $n = \nu$, c'est-à-dire $\nu^0 = 0$, et cependant faire disparaître la partie principale de l'inégalité séculaire de la lon-

gitude l, de façon que la constante n^0 devienne extrêmement petite, il suffira, d'après le n° 99, de choisir

$$\varkappa = \mu'(-1 + 2D)\, b_0^{\frac{1}{2}}$$

ou plutôt, la constante $\varkappa$ sera égale à la somme de tous les termes analogues provenant de l'action des diverses planètes, dans ces conditions, le demi-grand axe a qui sert à calculer les coefficients de Laplace sera déterminé par la formule

$$\nu^2 a^3 = \frac{f(1+m)}{1+\varkappa},$$

de sorte que si l'on appelle a_0 celui qui résulterait de la relation

$$\nu^2 a_0^3 = f(1+m),$$

on a, avec une exactitude suffisante en général,

$$a = a_0\left(1 - \frac{\varkappa}{3}\right) = a_0\left[1 + \sum m' \sqrt{\frac{a}{a'}}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}D\right) b_0^{\frac{1}{2}}\right],$$

la sommation étant étendue aux diverses planètes M'

En supposant que l'on procède de cette façon, cherchons les expressions définitives des parties principales des inégalités périodiques du premier ordre du mouvement de M qui proviennent de l'action de la planète M', et qui ne dépendent que de λ, ε_1, ε_2, complétant d'abord d'une façon immédiate les résultats du numéro précédent, par l'addition des deux termes

$$\mu'(\varepsilon_1^2\lambda^2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2})\left(-\frac{21}{4} + 12D - 3D^2\right) b_0^{\frac{3}{2}}$$

et

$$\mu'(\varepsilon_1^2\lambda^{-2} - \varepsilon_2^2\lambda^{-2})\left(-\frac{7}{8} + \frac{D}{4} + \frac{7}{2}D^2 - D^3\right) b_0^{\frac{1}{2}}$$

aux valeurs de $\frac{\delta n}{n}$ et $\delta(\iota l)$ respectivement, il vient maintenant

$$\frac{\delta n}{n} = \mu'(\varepsilon_1^2\lambda^2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2})\left(\frac{3}{4} - 3D^2\right) b_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= -3\mu'(\varepsilon_1^2\lambda^2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2})\, b_1^{\frac{3}{2}},$$

$$\delta(il) = \mu'(\varepsilon_1\lambda - \varepsilon_2\lambda^{-1})\left(-1 + \tfrac{1}{2}D\right) b_0^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \mu'(\varepsilon_1^2\lambda^2 - \varepsilon_2^2\lambda^{-2})\left(-\frac{7}{8} + \frac{D}{4} + \frac{7}{2}D^2 - D^3\right) b_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\mu'(\varepsilon_1\lambda - \varepsilon_2\lambda^{-1})\, b_1^{\frac{3}{2}} + \mu'(\varepsilon_1^2\lambda^2 - \varepsilon_2^2\lambda^{-2})\left(\frac{7}{2} - D\right) b_1^{\frac{3}{2}},$$

$$\delta\varepsilon_1 = \mu'\varepsilon_2\lambda^{-2}\left(-\frac{1}{8} + \frac{D^2}{2}\right) b_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mu'\varepsilon_2\lambda^{-2}\, b_1^{\frac{3}{2}},$$

$$\delta\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\mu'\varepsilon_1\lambda^2\, b_1^{\frac{3}{2}}$$

On a donc encore l'avantage d'une simplicité beaucoup plus grande dans ces expressions, en particulier les termes en λ et λ^{-1} ont disparu des valeurs de $\frac{\delta n}{n}$, $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$

101 Connaissant a un instant donné les perturbations des elements et par suite les elements eux-mêmes d'une planete M, les coordonnees heliocentriques de cette planete s'en deduisent immédiatement Mais, le plus souvent, on trouve avantage à calculer directement ces coordonnees sans passer par les valeurs des élements osculateurs, pour obtenir les formules correspondantes, il suffira de porter ces valeurs dans les expressions kepleriennes des coordonnées

Donnons d'abord quelques indications sur les developpements analytiques auxquels on est ainsi conduit

D'après le n° 82, on a

$$\log r = \log a - (\varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^{-1}) - \frac{3}{2}(\varepsilon_1^2\lambda^2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2}) + \varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$- \frac{17}{6}(\varepsilon_1^3\lambda^3 + \varepsilon_2^3\lambda^{-3}) + \frac{3}{2}(\varepsilon_1^2\varepsilon_2\lambda + \varepsilon_1\varepsilon_2^2\lambda^{-1}) + \ldots,$$

$$iv = il + 2(\varepsilon_1\lambda - \varepsilon_2\lambda^{-1}) + \frac{5}{2}(\varepsilon_1^2\lambda^2 - \varepsilon_2^2\lambda^{-2})$$

$$+ \frac{13}{3}(\varepsilon_1^3\lambda^3 - \varepsilon_2^3\lambda^{-3}) - (\varepsilon_1^2\varepsilon_2\lambda - \varepsilon_1\varepsilon_2^2\lambda^{-1}) + \ldots,$$

les perturbations de $\log r$ et de iv en resultent immediatement. Remplaçant comme ci-dessus il, ε_1, … par $il + \Delta(il)$, $\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1$, …

$\log r$, ιv, par $\log r + \delta(\log r) + \dots$, $\iota v + \delta(\iota v) + \dots$, sans qu'il soit nécessaire d'insister une fois de plus sur le sens précis des notations, on a pour les perturbations du premier ordre en particulier

$$\delta(\log r) = -\frac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} + \Delta(\iota l)\left[-(\varepsilon_1\lambda - \varepsilon_2\lambda^{-1}) - 3(\varepsilon_1^2\lambda^2 - \varepsilon_2^2\lambda^{-2}) + \dots\right]$$
$$+ \lambda\Delta\varepsilon_1\left(-1 - 3\varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^{-1} - \frac{17}{2}\varepsilon_1^2\lambda^2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\lambda^{-2} + \dots\right)$$
$$+ \lambda^{-1}\Delta\varepsilon_2\left(-1 + \varepsilon_1\lambda - 3\varepsilon_2\lambda^{-1} + \frac{3}{2}\varepsilon_1^2\lambda^2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{17}{2}\varepsilon_2^2\lambda^{-2} + \dots\right),$$

$$\delta(\iota v) = \Delta(\iota l)\left[1 + 2(\varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^{-1}) + 5(\varepsilon_1^2\lambda^2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2}) + \dots\right]$$
$$+ \lambda\Delta\varepsilon_1(2 + 5\varepsilon_1\lambda + 13\varepsilon_1^2\lambda^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2\lambda^{-2} + \dots)$$
$$+ \lambda^{-1}\Delta\varepsilon_2(-2 - 5\varepsilon_2\lambda^{-1} - \varepsilon_1^2\lambda^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 13\varepsilon_2^2\lambda^{-2} + \dots),$$

et le retour à la forme réelle est immédiat.

On aperçoit alors sans peine le fait suivant : si l'on veut obtenir les expressions de $\delta(\log r)$ et $\delta(\iota v)$ jusqu'aux termes inclus qui sont du troisième degré, par exemple, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, il est nécessaire d'avoir les valeurs de Δn, $\Delta(\iota l)$, $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_2$, avec la même approximation, et pour atteindre ce résultat, il faudra prendre dans la fonction perturbatrice non seulement tous les termes jusqu'au troisième degré, mais encore les termes du quatrième degré qui dépendent de ε_1 ou ε_2, et cela en raison de l'abaissement de degré déjà signalé qui se produit quand on passe d'un terme de la fonction perturbatrice au terme correspondant de $\Delta\varepsilon_1$ ou $\Delta\varepsilon_2$. C'est là un assez grave défaut de la méthode de la variation des constantes, car en réalité, comme nous le verrons bientôt, le développement de la fonction perturbatrice jusqu'aux termes du troisième degré, par exemple, est nécessaire et suffisant pour fournir les perturbations des coordonnées r et v jusqu'au même degré.

L'effet des constantes n^0, l^0, ε_1^0, ε_2^0, sur $\delta(\log r)$ et $\delta(\iota v)$, est en évidence. Cherchons maintenant celui des perturbations dues à l'action de la planète M′ et déterminées au n° 99. Comme δl doit être réduit à sa partie périodique, on a d'abord pour l'effet des perturbations séculaires de ε_1, ε_2, en portant l'approximation jusqu'au

second degré par rapport aux excentricités,

$$\delta(\log r) = \mu' n t \Big[(\varepsilon_1 \lambda - \varepsilon_2 \lambda^{-1}) b_1^{\frac{3}{2}} - (\varepsilon'_1 \lambda - \varepsilon'_2 \lambda^{-1}) b_2^{\frac{3}{2}}$$
$$+ 3(\varepsilon_1^2 \lambda^2 - \varepsilon_2^2 \lambda^{-2}) b_1^{\frac{3}{2}}$$
$$- 3(\varepsilon_1 \varepsilon'_1 \lambda^2 - \varepsilon_2 \varepsilon'_2 \lambda^{-2}) b_2^{\frac{3}{2}} - (\varepsilon_1 \varepsilon'_2 - \varepsilon_2 \varepsilon'_1) b_2^{\frac{3}{2}} \Big],$$

$$\delta(w) = \mu' n t \Big[-2(\varepsilon_1 \lambda + \varepsilon_2 \lambda^{-1}) b_1^{\frac{3}{2}} + 2(\varepsilon'_1 \lambda + \varepsilon'_2 \lambda^{-2}) b_2^{\frac{3}{2}}$$
$$- 5(\varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_2^2 \lambda^{-2}) b_1^{\frac{3}{2}} + 2(\varepsilon_1 \varepsilon'_1 \lambda^2 + \varepsilon_2 \varepsilon'_2 \lambda^{-2}) b_2^{\frac{3}{2}} \Big]$$

Tenant compte maintenant des perturbations périodiques indépendantes de λ', sans dépasser le premier degré par rapport aux excentricités, on a pour compléter les expressions précédentes

$$\delta(\log r) = \mu'(-1 + 2D) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu'(\varepsilon_1 \lambda + \varepsilon_2 \lambda^{-1}) \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} D^2 \right) b_0^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \mu'(\varepsilon'_1 \lambda + \varepsilon'_2 \lambda^{-1}) \left(-\frac{33}{8} + 2D + \frac{D^2}{2} \right) b_1^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta(w) = \mu'(\varepsilon_1 \lambda - \varepsilon_2 \lambda^{-1}) \left(-\frac{3}{4} + 3D^2 \right) b_0^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \mu'(\varepsilon'_1 \lambda - \varepsilon'_2 \lambda^{-1}) \left(\frac{39}{4} - 2D - 3D^2 \right) b_1^{\frac{1}{2}}$$

Si l'on use de l'artifice indiqué à la fin du numéro précédent, on vérifie sans peine qu'il faut simplement ajouter $-\varkappa$ à la valeur précédente de $\log r$, ce fait serait d'ailleurs facile à justifier *a priori*, en observant que le mouvement que l'on obtient en tenant compte de la constante quelconque $\varkappa$, mais en négligeant l'action de la planète M', doit nécessairement être lui-même un mouvement képlérien.

Prenant, comme nous l'avons dit,

$$\varkappa = \mu'(-1 + 2D) b_0^{\frac{1}{2}}$$

pour la partie de $\varkappa$ qui provient de l'action de M', on voit que finalement la partie constante principale de $\delta(\log r)$ disparaît, ce qui constitue un nouvel avantage de cette façon de procéder

On détermine souvent la constante ε_1^0 (et par suite sa conjuguée ε_2^0) de façon que le coefficient total de λ dans l'expression de w reste égal à $2\varepsilon_1$, comme s'il n'y avait pas de perturbations; il faut alors prendre

$$\varepsilon_1^0 = \mu' \varepsilon_1 \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{2} D^2 \right) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu' \varepsilon'_1 \left(-\frac{39}{8} + D + \frac{3}{2} D^2 \right) b_1^{\frac{1}{2}},$$

ou plutôt, on a de cette façon la partie de ε_1^0 qui provient de l'action de M', le coefficient total de λ dans l'expression de $\log r$ devient alors

$$-\varepsilon_1 + \mu' c_1\left(-\frac{1}{4} + D^2\right) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu' c_1'\left(\frac{3}{4} + D - D^2\right) b_1^{\frac{1}{2}},$$

tout cela, bien entendu, en négligeant les termes d'ordre et de degre supérieurs

Si enfin nous cherchons les inegalites de $\log r$ et de w qui dépendent de λ', mais sont de degré zéro par rapport aux excentricités, on trouve sans peine, avec les notations du n° 99,

$$\delta(\log r) = \sum \frac{1 - 2D - 4\beta}{s^2 - \beta^2}\beta^2 B_s,$$

$$\delta(w) = \sum 2\,\frac{\beta(2D - 1) + s^2 + 3\beta^2}{s(s^2 - \beta^2)}\beta^2 B_s$$

On voit que ces expressions contiennent le facteur β^2, tandis que les perturbations correspondantes des éléments renferment seulement le facteur β et il en sera de même d'une façon genérale pour toutes les inegalités qui dépendent de λ' Cette observation nous permet de vérifier le fait suivant, evident *a priori* supposons la planete M' tres rapprochee du Soleil, c'est-à-dire le rapport $\frac{a'}{a} = \alpha$, très petit, la partie complémentaire de la fonction perturbatrice (dont tous les termes dépendent de λ') sera de l'ordre de $\alpha^{-\frac{3}{2}}$, et d'apres la valeur de μ', on voit que certains des coefficients B_s seront de l'ordre de α^{-2}, c'est-à-dire très grands, mais le rapport β est lui-même de l'ordre de $\frac{n}{n'}$, c'est-a-dire de l'ordre de $\alpha^{\frac{3}{2}}$ les inégalités des éléments sont donc grandes, de l'ordre de $\alpha^{-\frac{1}{2}}$, mais celles des coordonnées sont, au contraire, tres petites, de l'ordre de α

Si l'on fait tendre α vers zéro, on voit encore que $b_0^{\frac{1}{2}}$ tendant vers $\alpha^{\frac{1}{2}}$, le mouvement sera purement képlerien à la condition de prendre

$$\varkappa = -\frac{m'}{1 + m},$$

c'est-à-dire en negligeant le carré de m',

$$n^2 a^3 = f(1 + m + m'),$$

ainsi qu'il était évident dès l'abord

On passe de la longitude dans l'orbite v à la longitude proprement dite λ (sans confusion possible sur le sens actuel de cette lettre) par la formule

$$\mathrm{tang}(\lambda-\theta)=\cos J\,\mathrm{tang}(v-\theta),$$

ou plutôt on se sert de la *réduction à l'écliptique* ρ égale à $\lambda-v$, et pour laquelle la formule ci-dessus donne le développement en série bien connu

$$\rho=-\mathrm{tang}^2\frac{J}{2}\sin 2(v-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{tang}^4\frac{J}{2}\sin 4(v-\theta)-\ldots,$$

de sorte que

$$i\rho=-\frac{1}{2}(\gamma_1^2\lambda^2-\gamma_2^2\lambda^{-2})+\ldots,$$

en n'écrivant que les termes du plus bas degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

De la même façon, la latitude β résulte de la formule

$$\sin\beta=\sin J\sin(v-\theta),$$

d'où

$$i\beta=\gamma_1\lambda-\gamma_2\lambda^{-1}+2(\varepsilon_1\gamma_2-\varepsilon_2\gamma_1)+2(\varepsilon_1\gamma_1\lambda^2-\varepsilon_2\gamma_2\lambda^{-2})+\ldots$$

Il est facile d'introduire dans ces formules les valeurs complètes de λ, ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 de façon à mettre en évidence les perturbations, notons seulement que la partie principale du coefficient total de λ dans l'expression de $i\beta$ devient alors

$$\gamma_1+\gamma_1^0-\frac{1}{2}\mu'(\gamma_1-\gamma'_1)\,b_1^{\frac{3}{2}},$$

et ceci montre comment l'on doit choisir la constante γ_1^0 si l'on veut encore que cette quantité reste égale à γ_1, comme s'il n'y avait pas de perturbations.

102. Pratiquement, on opère généralement de la façon suivante pour calculer les coordonnées d'une planète M.

Posons

$$a=a_0+\Delta a,\qquad \varepsilon=\varepsilon_0+\Delta\varepsilon,\qquad J=J_0+\Delta J,$$

a_0, ε_0, j_0 étant des constantes égales aux valeurs moyennes de a, ε, j à l'époque choisie comme origine du temps, posons aussi

$$l = l_0 + \Delta l, \qquad \varpi = \varpi_0 + \Delta\varpi, \qquad \theta = \theta_0 + \Delta\theta,$$

en désignant cette fois par l_0, ϖ_0, θ_0 les valeurs moyennes de l, ϖ, θ à l'époque t, de sorte que les perturbations Δl, $\Delta\varpi$, $\Delta\theta$ sont, contrairement à Δa, $\Delta\varepsilon$, Δj, privées de termes séculaires

On détermine d'abord la longitude dans l'orbite sous la forme

$$v = l_0 + C_0 + \Delta v,$$

en désignant par C_0 l'équation du centre qui correspond à l'excentricité constante ε_0 et à l'anomalie moyenne $l_0 - \varpi_0$ une table fournit C_0 en fonction de $l_0 - \varpi_0$, d'autres tables, convenablement disposées, permettent de calculer la perturbation Δv

De la même façon, et avec des tables analogues, on détermine le logarithme du rayon vecteur sous la forme

$$\log r = \log a_0 + R_0 + \Delta \log r,$$

en appelant R_0 le développement keplérien de $\log\frac{r}{a}$ qui correspond à l'excentricité ε_0 et à l'anomalie moyenne $l_0 - \varpi_0$

Appelons maintenant ρ_0 et β_0 la réduction à l'écliptique et la latitude qui correspondent à l'inclinaison j_0 et à l'argument de la latitude $v - \theta_0$, ces quantités sont encore fournies directement par deux tables spéciales en fonction de $v - \theta_0$ On a enfin pour la réduction à l'écliptique et pour la latitude vraies des formules telles que

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho, \qquad \beta = \beta_0 + \Delta\beta,$$

et les perturbations $\Delta\rho$, $\Delta\beta$ se trouvent dans des tables appropriées

En procédant ainsi, on voit que l'on englobe déjà dans ρ_0 et β_0 l'effet des perturbations de la longitude v sur la réduction à l'écliptique et la latitude, malgré l'atténuation produite par les petits facteurs de l'ordre de j^2 et de j respectivement dans ρ et β, cet effet peut être très sensible encore, surtout dans β, en raison de la grandeur de certains termes de Δv La perturbation résiduelle $\Delta\beta$ est de l'ordre de grandeur de Δj et $\sin j\Delta\theta$, quantités toujours très petites

en fait, la perturbation $\Delta\rho$ est elle-même de l'ordre de ces quantités multipliées par $\sin J$, et peut être ordinairement réduite à quelques termes mixtes provenant des perturbations séculaires de l'inclinaison J.

Ajoutons enfin que les tables du mouvement des planètes sont disposées de façon à fournir les coordonnées rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de la date t elle-même, ce qui est bien facile, d'après les formules générales de la précession.

CHAPITRE XVI.

NOUVELLES MÉTHODES POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES

103. En réalité, puisque c'est la détermination des perturbations des coordonnées qui est le véritable but à atteindre dans le problème du mouvement des planètes, les meilleures solutions seront celles qui fourniront le plus directement ces perturbations, et la méthode de la variation des constantes doit par suite être souvent écartée; on arrive à la même conclusion, en constatant que le calcul des inégalités des ordres supérieurs présente dans cette méthode de grandes difficultés en raison du trop grand nombre de variables, superflues en fait, qu'entraîne la considération de l'orbite instantanée.

Partant de ces principes, nous allons exposer deux méthodes nouvelles, plus naturelles et plus simples, aussi bien du point de vue théorique que du point de vue pratique : ce sont, avec les modifications assez profondes qui nous ont paru nécessaires, la méthode de Laplace et celle de Hansen. Tandis que Le Verrier s'est servi exclusivement de la méthode de la variation des constantes, Newcomb a fait usage de celle de Laplace pour les nouvelles théories de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Uranus et Neptune, et Hill a construit sa théorie de Jupiter et de Saturne avec la méthode de Hansen.

Reprenons les équations du mouvement, indépendamment de tout ce qui précède, sous la forme la plus simple qui convient maintenant. Soit un point M, de masse égale à l'unité, en mouvement par rapport à des axes fixes Ox, Oy, Oz, sous l'action d'une force F, dont les composantes dépendent de la position de M et du temps t. Soient P un plan *fixe* passant par O, et M_1 la projection du point M sur ce plan ; nous définirons la position du point M par trois coordonnées qui seront : 1° la distance OM_1, ou rayon vecteur accourci, r ; 2° la longitude v du point M_1 dans le plan P, comptée comme d'habitude

d'abord dans le plan xOy, à partir de Ox jusqu'à la direction du nœud ascendant de P sur ce plan, puis dans le plan P, 3° la cote z du point M au-dessus du plan P, soit le vecteur M_1M.

Soient, d'autre part, G, H, K les projections de la force F sur OM_1, sur la perpendiculaire à OM_1 dans le plan P, et sur la normale au plan P. En désignant par h une variable auxiliaire, les équations du mouvement sont

$$h = r^2 \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dh}{dt} = r\mathrm{H}, \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = \mathrm{G}, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = \mathrm{K},$$

d'après les expressions bien connues des composantes de l'accélération.

Supposons que l'on ait, en désignant par k^2 une constante,

$$\mathrm{G} = -\frac{k^2}{r^2}, \qquad \mathrm{H} = 0, \qquad \mathrm{K} = -\frac{k^2 z}{r^3};$$

de sorte que la force F soit dirigée vers le point O, avec une intensité égale à $\frac{k^2}{r^3}\sqrt{r^2 + z^2}$, le radical $\sqrt{r^2 + z^2}$ représentant le rayon vecteur proprement dit OM. L'orbite est alors située dans un plan fixe passant par O, et le mouvement projeté sur le plan P est un mouvement keplérien. Partant de cette hypothèse comme base des approximations, nous allons faire

$$\mathrm{G} = -\frac{k^2}{r^2} + \mathrm{R}, \qquad r\mathrm{H} = \mathrm{Q}, \qquad \mathrm{K} = -\frac{k^2 z}{r^3} + \mathrm{T},$$

et nous regarderons R, Q, T comme définissant une force perturbatrice, les équations précédentes deviennent ainsi

$$(1) \qquad h = r^2 \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dh}{dt} = \mathrm{Q}, \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{k^2}{r^2} = \mathrm{R}, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} = \mathrm{T}$$

Dans le problème qui nous occupe, nous choisirons k^2 de façon que l'on ait, ainsi que nous l'avons déjà fait précédemment, $f(1 + m) = k^2(1 + \varkappa)$, $\varkappa$ étant une petite quantité de l'ordre des masses perturbatrices, dont nous pourrons disposer en temps voulu comme il conviendra. Nous choisirons aussi pour le plan fixe P un plan faisant avec celui de l'orbite osculatrice de M à l'origine du temps un très petit angle, de façon que la coordonnée z reste elle-même très petite.

Si V est la fonction perturbatrice proprement dite qui définit le mouvement de M, la force F résulte de la fonction de forces

$$U = \frac{k^2(1+\nu)}{\sqrt{r^2+z^2}} + V,$$

et l'on a

$$G = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad rH = \frac{\partial U}{\partial v}, \qquad K = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Développant $(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances de z^2, et posant

$$U = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{r^3}\right) + W,$$

on a donc

$$(2)\quad \begin{cases} W = V + \nu k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{r^3}\right) + k^2(1+\nu)\left(\frac{3}{8}\frac{z^4}{r^5} + \quad\right), \\ R = \frac{3}{2}\frac{k^2 z^2}{r^4} + \frac{\partial W}{\partial r}, \qquad Q = \frac{\partial W}{\partial v}, \qquad T = \frac{\partial W}{\partial z}, \end{cases}$$

la fonction V étant exprimée à l'aide des coordonnées r, v, z et du temps. En vertu des hypothèses faites, nous voyons que nous pouvons regarder à bon droit R, Q, T comme dérivant d'une force perturbatrice.

104. La méthode de Laplace, que nous allons exposer en premier lieu, peut être caractérisée par l'utilisation d'une équation spéciale pour déterminer d'abord la coordonnée r.

Les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{k^2 z^2}{r^4}, \qquad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{dh}{dt}, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3},$$

et par suite immédiatement

$$r\frac{\partial W}{\partial r} + 2\int\left(\frac{\partial W}{\partial r}dr + \frac{\partial W}{\partial v}dv + \frac{\partial W}{\partial z}dz\right) = r\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{k^2}{r} - \frac{1}{2}\frac{k^2 z^2}{r^3},$$

faisant donc

$$(3)\quad \begin{cases} W' = \int\left(\frac{\partial W}{\partial r}dr + \frac{\partial W}{\partial v}dv + \frac{\partial W}{\partial z}dz\right), \\ P = r\frac{\partial W}{\partial r} + 2W' + \frac{1}{2}\frac{k^2 z^2}{r^3} - \frac{dz^2}{dt^2}, \end{cases}$$

on peut écrire

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}-\frac{k^2}{r}=\mathrm{P}, \tag{4}$$

et l'on obtient ainsi l'équation cherchée, la quadrature W′ contient d'ailleurs une constante arbitraire

Pour compléter les équations du problème, il suffit de prendre maintenant

$$\left\{\begin{aligned} &h^2=r^3\left(\frac{d^2 r}{dt^2}+\frac{k^2}{r^2}-\frac{3}{2}\frac{k^2 z^2}{r^4}-\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r}\right),\\ &\frac{dv}{dt}=\frac{h}{r^2},\qquad \frac{d^2 z}{dt^2}+\frac{k^2 z}{r^3}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

et l'on voit que l'intégration du système ainsi formé n'amènera que les six constantes arbitraires nécessaires, y compris celle qui figure dans W′

Soient n et a deux constantes liées par la relation $n^2a^3=k^2$, nous allons maintenant substituer à r deux nouvelles variables ε et g telles que les expressions de r et de sa dérivée $\frac{dr}{dt}$ ou r' soient les mêmes que dans un mouvement képlérien plan pour lequel a, n, ε, g seraient respectivement le demi-grand axe, le moyen mouvement, l'excentricité et l'anomalie moyenne; plus généralement, il en sera de même par conséquent pour toute fonction de r et de r' Nous ferons aussi

$$x_1=\frac{\varepsilon}{2}e^{ig},\qquad x_2=\frac{\varepsilon}{2}e^{-ig},$$

et les variables x_1, x_2 sont équivalentes à ε, g En particulier, on aura par exemple (n° 82)

$$\begin{aligned}\log r=\log a-(x_1+x_2)-\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2\\ -\frac{17}{6}(x_1^3+x_2^3)+\frac{3}{2}(x_1^2x_2+x_1x_2^2)+\dots\end{aligned}$$

Puisque r est fonction de ε et g, on a

$$r'=\frac{\partial r}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt},$$

mais, dans le mouvement keplérien considéré, on a simplement

$$r'=\frac{\partial r}{\partial g}n,$$

on a donc, d'après les hypothèses faites, la première relation

$$(a) \qquad \frac{\partial r}{\partial g}\left(\frac{dg}{dt}-n\right)+\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}=0,$$

l'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{dr'}{dt}+\frac{r'^2}{r}-\frac{k^2}{r^2}=\frac{P}{r},$$

et par suite donne

$$\frac{\partial r'}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial r'}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{r'^2}{r}-\frac{k^2}{r^2}=\frac{P}{r},$$

appliquée au mouvement keplérien considéré, cette même équation donnerait

$$\frac{\partial r'}{\partial g}n+\frac{r'^2}{r}-\frac{k^2}{r^2}=\frac{P_0}{r},$$

en appelant P_0 la constante, indépendante comme on le sait de x_1 et x_2, à laquelle se réduit alors la fonction P, on a donc la seconde relation

$$(b) \qquad \frac{\partial r'}{\partial g}\left(\frac{dg}{dt}-n\right)+\frac{\partial r'}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{P}{r},$$

en réunissant P_0 à la constante arbitraire qui figure déjà dans P, provenant de la quadrature W'.

Les équations (a) et (b) sont faciles à résoudre par rapport aux inconnues $\frac{dg}{dt}-n$ et $\frac{d\varepsilon}{dt}$. Si l'on appelle w l'anomalie vraie et u l'anomalie excentrique qui correspondent à ε et g, les formules du n° 23 donnent, en faisant $\varepsilon=\sin\varphi$, et n'oubliant pas les relations simples entre u, w, r,

$$\frac{\partial r}{\partial g}=a\operatorname{tang}\varphi\sin w=\frac{a^2}{r}\varepsilon\sin u, \qquad \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}=-a\cos w=\frac{a^2}{r}(\varepsilon-\cos u),$$

$$\frac{\partial r'}{\partial g}=\frac{na^3}{r^2}\sin\varphi\cos w, \qquad \frac{\partial r'}{\partial \varepsilon}=\frac{na^3}{r^2}\cos\varphi\sin w,$$

d'où

$$\frac{\partial r}{\partial g}\frac{\partial r'}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\frac{\partial r'}{\partial g}=\frac{na^4\varepsilon}{r^2},$$

par suite, il vient

$$\frac{dg}{dt}-n=-\frac{P}{na^2\varepsilon}(\cos u-\varepsilon), \qquad \frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{P}{na^2}\sin u,$$

ou bien

$$\frac{dx_1}{i\,dt} - nx_1 = \frac{P}{2na^2}\left(e^{-i(u-g)} - 2x_2\right),$$
$$\frac{dx_2}{i\,dt} + nx_2 = -\frac{P}{2na^2}\left(e^{i(u-g)} - 2x_2\right),$$

plutôt encore, appelons g_0 une constante quelconque, et posons

$$(6)\qquad \begin{cases} x = e^{i(nt+g_0)}, \\ z_1 = x\left(e^{i(u-g)} - 2x_2\right), \qquad z_2 = x^{-1}\left(e^{-i(u-g)} - 2x_1\right), \end{cases}$$

nous aurons

$$(7)\qquad \frac{d(x^{-1}x_1)}{i\,dt} = \frac{z_2 P}{2na^2}, \qquad \frac{d(rx_2)}{i\,dt} = \frac{-z_1 P}{2na^2}$$

Les fonctions z_1 et z_2 se développent immédiatement suivant les puissances de x_1 et x_2, d'apres le n° 82, et d'apres les notations de ce numéro, si l'on fait

$$e^{i(u-g)} = \frac{y_1}{x_1} = \Sigma\alpha_{p_1,p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

on a

$$\alpha_{p_1\,p_2} = (-1)^{p_2}\frac{(p_1-p_2+1)^{p_1+p_2-1}}{p_1!\,p_2!} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{0,1} = -1,$$

par suite

$$z_1 = x\left(1 + x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{8}{3}x_1^3 - 2x_1^2x_2 - \frac{2}{3}x_2^3 + \quad\right),$$
$$z_2 = x^{-1}\left(1 - 3x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{2}{3}x_1^3 - 2x_1x_2^2 + \frac{8}{3}x_2^3 + \quad\right),$$

et l'on doit observer avec soin qu'il n'y a pas dans $\frac{z_1}{x}$, par exemple, d'autre terme de la forme $x_1^p x_2^{p+1}$ que $-3x_2$

Pour continuer la transformation des équations du probleme, appelons h_1 la valeur de h dans le mouvement keplérien d'éléments a, n, ε, de sorte que

$$h_1 = na^2\cos\varphi = na^2\sqrt{1-4x_1x_2},$$

la première équation (5) s'écrit

$$h^2 = r^3\left(\frac{\partial r'}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial r'}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{k^2 z^2}{r^4} - \frac{\partial W}{\partial r}\right),$$

et donne aussi par suite

$$h_1^2 = r^3\left(\frac{\partial r'}{\partial g}n + \frac{k^2}{r^2}\right),$$

de sorte que, d'après la relation (b) et la définition de P,

$$h^2 = h_1^2 + 2r^2 W' - \frac{k^2 z^2}{r} - r^2\frac{dz^2}{dt^2},$$

si donc on pose

$$(8)\qquad \begin{cases} S' = \dfrac{1}{h_1}\left(W' - \dfrac{1}{2}\dfrac{k^2 z^2}{r^3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{dz^2}{dt^2}\right), \\ S = S' - \dfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{h_1}S'^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r^2}{h_1}\right)^2 S'^3 + \ldots, \end{cases}$$

on a simplement

$$h = h_1 + r^2 S,$$

ajoutons que

$$\frac{1}{h_1} = \frac{\sec\varphi}{na^2} = \frac{1}{na^2}(1 + 2x_1x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 20x_1^3x_2^3 + \ldots)$$

Mettons maintenant la longitude v sous la même forme que dans le mouvement képlérien déjà considéré, dont la longitude moyenne serait l, on a donc, en désignant toujours par w l'anomalie vraie qui correspond à ε et g,

$$v = l + (w - g),$$

et il faut déterminer la nouvelle inconnue l, qui remplace v, on a d'ailleurs (n° 82)

$$i(w - g) = 2(x_1 - x_2) + \frac{5}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{13}{3}(x_1^3 - x_2^3) - (x_1^2x_2 - x_1x_2^2) + \ldots$$

La seconde des équations (5) donne alors

$$\frac{dl}{dt} + \frac{\partial(w-g)}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial(w-g)}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{h}{r^2},$$

et aussi

$$n + \frac{\partial(w-g)}{\partial g}n = \frac{h_1}{r^2},$$

donc

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{h - h_1}{r^2} - \frac{\partial(w-g)}{\partial g}\left(\frac{dg}{dt} - n\right) - \frac{\partial(w-g)}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt},$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède,

$$\frac{dl}{dt} = n + S - \frac{CP}{na^2}, \tag{9}$$

en faisant encore

$$C = \frac{r}{a^2\varepsilon}\left[\frac{\partial r}{\partial g}\frac{\partial(\varpi - g)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\frac{\partial(\varpi - g)}{\partial g}\right].$$

Or, on a comme plus haut (nº 23)

$$\frac{\partial \varpi}{\partial g} = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi, \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{a}{r} + \text{séc}^2\varphi\right)\sin\varpi = \left(\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi + \frac{a}{r}\sec\varphi\right)\sin u,$$

et il en résulte sans peine

$$\frac{\partial r}{\partial g}\frac{\partial(\varpi - g)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\frac{\partial(\varpi - g)}{\partial g} = \frac{a^2}{r}\left[\varepsilon(\text{séc}\varphi + 1) + \cos u(\text{séc}\varphi - 1)\right],$$

c'est-à-dire

$$C = 1 + \text{séc}\varphi + \frac{1}{2}\text{séc}\varphi\,\text{séc}^2\frac{\varphi}{2}(\varepsilon\cos u), \tag{10}$$

on a d'ailleurs

$$\sec\varphi\,\text{séc}^2\frac{\varphi}{2} = 1 + 3x_1x_2 + 10x_1^2x_2^2 + 35x_1^3x_2^3 + \dots,$$

et, d'après ce qui précède,

$$C = 2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 + \frac{3}{4}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{3}{4}(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + \dots$$

D'après une observation faite plus haut, la partie de $\varepsilon\cos u$ qui est indépendante de g se réduit au seul terme $-2x_1x_2$ ou $-\frac{1}{2}\sin^2\varphi$; par suite, la partie C_0 de C qui est indépendante de g est exactement égale à

$$1 + \text{séc}\varphi - \frac{1}{4}\sec\varphi\,\text{séc}^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\varphi,$$

soit

$$C_0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\text{séc}\varphi = 2 + x_1x_2 + 3x_1^2x_2^2 + 10x_1^3x_2^3 + \dots$$

Arrivons enfin à la détermination de la dernière inconnue z, que nous allons remplacer par $\zeta = \frac{iz}{a}$. Soit ε_0 une constante, et appelons r_0, ϖ_0, u_0, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et l'anomalie excen-

trique qui correspondent au demi-grand axe a, à l'excentricité ε_0 et à l'anomalie moyenne $nt+g_0$ déjà introduite ci-dessus. La dernière équation (5), qui détermine z, peut être écrite sous la forme

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{k^2\zeta}{r_0^3}=-\frac{Z}{a^2},$$

en faisant, d'après la définition de ζ et la relation qui existe entre n, a, k^2

$$\text{(11)}\qquad Z=\frac{\partial W}{\partial\zeta}+n^2a^2\zeta\left(\frac{a^3}{r^3}-\frac{a^3}{r_0^3}\right)$$

L'équation précédente, privée de second membre, est une équation différentielle linéaire homogène qui, d'après les propriétés du mouvement keplérien, admet les deux solutions particulières $r_0\cos w_0$ et $r_0\sin w_0$, ou encore $\cos u_0-\varepsilon_0$ et $\sin u_0$, et par suite aussi z_1^0 et z_2^0, en désignant ainsi les deux fonctions z_1 et z_2 définies ci-dessus, dans lesquelles on remplace x_1 et x_2 par

$$x_1^0=\frac{\varepsilon_0}{2}x,\qquad x_2^0=\frac{\varepsilon_0}{2}x^{-1},$$

on vérifie d'ailleurs immédiatement que l'on a

$$z_1^0\frac{dz_2^0}{dt}-z_2^0\frac{dz_1^0}{dt}=-2ni$$

En suivant la méthode de la variation des constantes, nous pouvons mettre ζ sous la forme

$$\zeta=C_1z_1^0+C_2z_2^0,$$

et déterminer C_1, C_2 par les relations

$$z_1^0\frac{dC_1}{dt}+z_2^0\frac{dC_2}{dt}=0,$$

$$\frac{dz_1^0}{dt}\frac{dC_1}{dt}+\frac{dz_2^0}{dt}\frac{dC_2}{dt}=-\frac{Z}{a^2},$$

d'où

$$\frac{dC_1}{i\,dt}=\frac{z_2^0Z}{2na^2},\qquad \frac{dC_2}{i\,dt}=-\frac{z_1^0Z}{2na^2},$$

et finalement

$$\text{(12)}\qquad \zeta=z_1^0\int\frac{z_2^0Z}{2na^2}i\,dt-z_2^0\int\frac{z_1^0Z}{2na^2}i\,dt.$$

105. Le problème est ramené aux équations (7), (9), (12), et, en tenant compte de la définition (3) de W', leur intégration dépend de six quadratures, introduisant six constantes arbitraires. Mais nous en avons déjà six autres, savoir χ, n ou a (ces deux équivalent à une seule en raison de la relation qui les lie), ε_0, g_0, et les deux éléments qui fixent la position du plan P, par exemple son inclinaison j et la longitude θ de son nœud ascendant. Cela fait en tout douze constantes, et nous pouvons par suite disposer à notre gré de six d'entre elles, de façon à remplir telles conditions que nous voudrons nous fixer pour simplifier les résultats.

Afin de ne pas surcharger les notations, écrivons simplement ε au lieu de ε_0, puis x_1 et x_2, z_1 et z_2 au lieu de x_1^0, x_2^0, z_1^0, z_2^0, désignons par g l'argument $nt+g_0$, et de même par l l'argument $nt+l_0$, où l_0 est une nouvelle constante arbitraire, de sorte qu'en résumé, en introduisant encore λ comme précédemment,

$$g = nt + g_0, \quad x = e^{ig}, \quad x_1 = \frac{\varepsilon}{2} x, \quad x_2 = \frac{\varepsilon}{2} x^{-1}, \quad l = nt + l_0, \quad \lambda = e^{il}$$

Dans ces conditions, il faudra avoir soin de remplacer partout x_1, x_2, l par $x_1+\delta x_1$, $x_2+\delta x_2$, $l+\delta l$, sauf toutefois dans l'expression de χ_0 qui figure dans la formule (11) et dans les expressions de z_1, z_2 qui remplacent maintenant z_1^0, z_2^0 dans l'équation (12). En convenant, en outre, d'effectuer les quadratures indiquées sans addition de constantes, à l'exception cependant de la quadrature W', dont nous désignerons la partie constante par $W'_0+W'^0$, nous aurons, pour déterminer ζ et les nouvelles inconnues δx_1, δx_2, δl, les équations définitives

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x_1 &= x\left(\eta_1 + \int \frac{z_2 P}{2na^2}\, i\, dt\right), \\ \delta x_2 &= x\left(\eta_2 - \int \frac{z_1 P}{2na^2}\, i\, dt\right), \\ \delta(il) &= il^0 + \int \left(S - \frac{CP}{na^2}\right) i\, dt, \\ \zeta &= z_1\left(\chi_1 + \int \frac{z_2 Z}{2na^2}\, i\, dt\right) - z_2\left(\chi_2 + \int \frac{z_1 Z}{2na^2}\, i\, dt\right), \end{aligned}\right.$$

où η_1, η_2, l^0, χ_1, χ_2 sont des constantes arbitraires.

On doit observer que P, S, Zi sont des fonctions réelles, de même

que δl, δx_1 et δx_2 sont des quantités conjuguées, de même que les deux termes dont ζ, purement imaginaire, est la différence

On obtient une solution entièrement définie, sans constantes superflues, et d'une parfaite netteté, en opérant de la façon suivante 1° on prend $W'^0 = l^0 = \eta_1 = \eta_2 = \chi_1 = \chi_2 = 0$, 2° on détermine W'_0 et $\varkappa$ de façon que l'expression de $\delta(\iota l)$ ne contienne aucun terme séculaire de rang un, c'est-à-dire de façon que la fonction $S - \frac{CP}{na^2}$ n'ait pas de terme constant, et en outre, de façon que la partie constante, évidemment commune, des valeurs de δx_1, δx_2 disparaisse (les parties constantes de δx_1, δx_2 sont les mêmes parce qu'elles sont réelles, comme nous le verrons plus clairement par la suite).

Les inconnues δx_1, δx_2, δl, ζ sont toutes de l'ordre des forces perturbatrices

Pour une planète donnée, les constantes a, ε, g_0, l_0, J, θ qui définissent cette solution ont des valeurs parfaitement déterminées Mais, pratiquement, on ne peut connaître que d'une façon plus ou moins approchée ces valeurs, pour éviter leur changement continuel avec les perfectionnements successifs que la précision croissante des observations permettra d'apporter à la théorie, il sera préférable de les regarder comme des nombres fixes choisis une fois pour toutes, mais alors, il faudra conserver dans les formules les constantes W'^0, l^0, η_1, η_2, χ_1, χ_2, et c'est de ces constantes, nécessairement très petites, que l'on pourra disposer pour réaliser l'accord de la théorie et des observations, ou bien encore pour atteindre d'autres buts que pourra suggérer le besoin d'une plus grande commodité dans l'emploi des formules

106 Il nous reste à étudier la forme du développement de la fonction perturbatrice W qui s'adapte le mieux à la méthode actuelle, et à examiner la façon de former les diverses fonctions W', P, Z qui en dépendent

On a

$$W = V + \varkappa n^2 a^2 \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\zeta^2\right) + n^2 a^2 (1+\nu)\left(\frac{3}{8}\frac{a^5}{r^5}\zeta^4 + \quad\right),$$

de sorte que nous devons envisager tout d'abord la partie de la fonction perturbatrice proprement dite V, qui provient de l'action de la planète M', la position de celle-ci étant définie par des coordonnées

analogues à celles qui fixent la position de M. En réduisant V à cette partie, on a donc, en appelant ρ, ρ' les rayons vecteurs OM, OM', et en désignant par $\widehat{\rho, \rho'}$ leur angle

$$V = fm'\left[[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\widehat{\rho, \rho'})]^{-\frac{1}{2}} - \frac{\rho\rho'\cos(\widehat{\rho, \rho'})}{\rho'^3}\right]$$

Or on a

$$\rho^2 = r^2 + z^2, \qquad \rho'^2 = r'^2 + z'^2,$$

$$\rho\rho'\cos(\widehat{\rho, \rho'}) = rr'\cos(\widehat{r, r'}) + r'z\cos(\widehat{r', z}) + rz'\cos(\widehat{r, z'}) + zz'\cos(\widehat{z, z'}),$$

en notant de la même façon $\widehat{r', z}$ par exemple, l'angle des deux vecteurs r' ou OM'_1, z ou M_1M.

Faisons alors

$$\widehat{r, r'} = H, \qquad \Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H,$$

$$\omega = r'z\cos(\widehat{r', z}) + rz'\cos(\widehat{r, z'}) + zz'\cos(\widehat{z, z'}),$$

on aura :

$$V = fm'\left[(\Delta^2 - 2\omega + z^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} - (rr'\cos H + \omega)(r'^2 + z'^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

ou encore

$$V = fm'(R + \Delta R),$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H, \\ \Delta R &= \left(\omega - \frac{z^2 + z'^2}{2}\right)\Delta^{-3} + \frac{3}{2}\left(\omega - \frac{z^2 + z'^2}{2}\right)^2\Delta^{-5} + \ldots \\ &\quad - \frac{\omega}{r'^3} + (rr'\cos H + \omega)\left(\frac{3}{2}\frac{z'^2}{r'^5} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

La fonction R ainsi définie ne diffère en rien de celle que nous avons étudiée au Chapitre XIII, et se développe exactement de la même façon, avec les mêmes notations.

Toutefois les quantités a, a', J, θ, J', θ' sont maintenant des constantes, il en est de même par suite de σ_1, σ_2, σ'_1, σ'_2, et des fonctions $B_s^{q,q'}$ qui peuvent être calculées numériquement une fois pour toutes ; les seules variables qui restent sont λ, x_1, x_2, λ', x'_1, x'_2.

Au lieu de J, θ, J', θ', mettons en évidence les éléments qui fixent la position relative des plans fixes P et P', auxquels sont rapportés

les mouvements de M et M′, respectivement Soit OI la direction de l'un des nœuds de P′ sur P, appelons τ la longitude de OI comptée dans P de la même façon que v, et de même τ' la longitude de OI comptée dans P′ comme v', soit de plus J l'inclinaison de P′ sur P, comptée autour de OI, un calcul trigonométrique simple déterminera τ, τ', J

On a alors

$$\cos H = \cos(v-\tau)\cos(v'-\tau') + \sin(v-\tau)\sin(v'-\tau')\cos J,$$

et comme

$$2\cos H = (1+\sigma_1)\,e^{i(v-v')} + (1+\sigma_2)\,e^{-i(v-v')} + \sigma'_1\,e^{i(v+v')} + \sigma'_2\,e^{-i(v+v')},$$

il en résulte immédiatement

$$\sigma_1 = -\sin^2\frac{J}{2}\,e^{-i(\tau-\tau')}, \qquad \sigma_2 = -\sin^2\frac{J}{2}\,e^{i(\tau-\tau')},$$

$$\sigma'_1 = \sin^2\frac{J}{2}\,e^{i(\tau+\tau')}, \qquad \sigma'_2 = \sin^2\frac{J}{2}\,e^{i(\tau+\tau')}$$

Avec ces mêmes éléments, on a aussi

$$\cos(\widehat{r', z}) = \sin J\sin(v'-\tau'), \qquad \cos(\widehat{r, z'}) = -\sin J\sin(v-\tau),$$

$$\cos(\widehat{z, z'}) = \cos J,$$

de sorte que, si l'on fait ici

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\sin J\,e^{-i\tau}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{2}\sin J\,e^{i\tau}, \qquad \gamma'_1 = -\frac{1}{2}\sin J\,e^{-i\tau'}, \qquad \gamma'_2 = -\frac{1}{2}\sin J\,e^{i\tau'},$$

on peut écrire

$$\omega = aa'\left[\zeta\frac{r'}{a'}(\gamma'_1\,e^{iv'} - \gamma'_2\,e^{-iv'}) + \zeta'\frac{r}{a}(\gamma_1\,e^{iv} - \gamma_2\,e^{-iv}) - \zeta\zeta'\cos J\right],$$

et

$$\Delta R = \left(\omega + \frac{a^2\zeta^2 + a'^2\zeta'^2}{2}\right)\Delta^{-3} + \frac{3}{2}\left(\omega + \frac{a^2\zeta^2 + a'^2\zeta'^2}{2}\right)^2\Delta^{-5} + \ldots$$

$$-\frac{\omega}{r'^3} - (rr'\cos H + \omega)\left(\frac{3}{2}\,\frac{a'^2\zeta'^2}{r'^5} + \ \ \right)$$

Le développement de ΔR s'ordonne sans peine suivant les puissances des quantités toujours très petites ζ et ζ', de sorte qu'il n'y a pas lieu de le prolonger bien loin, et pour obtenir les coefficients de ce

développement sous la même forme que la fonction R, il suffit d'indiquer les développements correspondants de Δ^{-3}, Δ^{-5}, ..., les autres fonctions de r et v, r' et v' que l'on rencontre dans ΔR, comme aussi dans W, se développent suivant des formules déjà connues. Or, d'une façon générale, on voit immédiatement, si l'on se reporte au Chapitre XIII, que pour passer du développement analytique de Δ^{-1} à celui de Δ^{-2p-1}, p étant un entier positif, il suffira d'observer les règles suivantes :

1° on multipliera R_0 par $(aa')^{-p}$,
2° les coefficients $B_s^{q'}$ seront remplacés par

$$\sum \frac{(2p+1)(2p+3)\ldots(2p+2q-1)}{2^q\, q_1!\, q_2!\, q'_1!\, q'_2!} \sigma_1^{q_1}\sigma_2^{q_2}\, \sigma_1'^{q'_1}\sigma_2'^{q'_2}\, b_{s-q_1+q_2}^{q+p+\frac{1}{2}},$$

3° les coefficients $A_s^{q'}$ restant les mêmes, il faut changer D en D $-p$ dans les opérateurs $N_{p_1}{}^{\sigma}{}_{p_2}$, et en D $+p$ dans les opérateurs $N'_{p_1}{}^{\sigma}{}_{p_2}$, de sorte que ces derniers se déduisent toujours des premiers par le simple changement de D en $-$D.

Si, comme au Chapitre précédent, nous posons

$$\mu' = \frac{1}{2}\,\frac{m'(1+r)}{1+m}\sqrt{\frac{a}{a'}},$$

nous pouvons écrire finalement la partie de V qui provient de l'action de M' sous la forme

$$V = 2\mu' n^2 a^2 \left(R\sqrt{aa'} + \Delta R\sqrt{aa'}\right),$$

la parenthèse étant homogène de degré zéro par rapport aux longueurs.

La fonction W se présente tout d'abord comme une fonction des coordonnées r, v, z, quand on y remplace celles-ci par leurs nouvelles expressions, on peut la regarder comme une fonction de a, l ou λ, x_1 et x_2 ou bien ε et g, ζ, et en dernière analyse, d'après les développements précédents, ce sont les quantités a, λ, x_1, x_2, ζ que l'on conserve, les quatre dernières seules étant variables avec le temps ; bien entendu, il ne s'agit ici que des quantités qui correspondent à la planète M elle-même.

Les formules qui expriment r, v, z en fonction de a, l, ε, g, ζ sont

de la forme

$$r = a\,\varphi(\varepsilon, g), \qquad v = l + \psi(\varepsilon, g), \qquad z = -a\iota\zeta,$$

$\varphi(\varepsilon, g)$, $\psi(\varepsilon, g)$ étant les développements kepleriens connus du quotient $\frac{r}{a}$ et de l'équation du centre.

On a par suite

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{r}{a}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{z}{a}\frac{\partial W}{\partial z}, \qquad \frac{\partial W}{\partial g} = \frac{\partial r}{\partial g}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial g}\frac{\partial W}{\partial v},$$

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial W}{\partial v}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = -a\iota\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Inversement, il vient en particulier

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\iota}{a}\frac{\partial W}{\partial \zeta}, \qquad r\frac{\partial W}{\partial r} = a\frac{\partial W}{\partial a} - \zeta\frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

Nous avons déjà utilisé la première de ces relations pour former la quantité Z, soit

$$Z = \frac{\partial W}{\partial \zeta} + n^2 a^2 \zeta\left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a^3}{r_0^3}\right),$$

la seconde servira pour la formation de la fonction P, qui devient ainsi

$$P = 2W' + a\frac{\partial W}{\partial a} - \zeta\frac{\partial W}{\partial \zeta} - \frac{1}{2}n^2a^2\frac{a^3}{r^3}\zeta^2 - n^2a^2\frac{d\zeta^2}{(n\iota\,dt)^2}$$

Pour calculer $a\frac{\partial W}{\partial a}$, on n'oubliera pas que n et μ' sont en réalité des fonctions de a, et si l'on regardait ces quantités comme des variables indépendantes, la véritable valeur de $a\frac{\partial W}{\partial a}$ serait

$$a\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{3}{2}n\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{1}{2}\mu'\frac{\partial W}{\partial \mu'},$$

remarquons encore que pour appliquer l'opération $a\frac{\partial}{\partial a}$ à la fonction $(aa')^{p+\frac{1}{2}}\Delta^{-2p-1}$, qui ne dépend que du rapport α par l'intermédiaire des coefficients de Laplace, il suffit de la multiplier symboliquement par D, si du moins l'on suppose $a < a'$, dans le cas contraire, il faut, comme nous l'avons déjà dit, remplacer D par $-$D.

Il ne reste plus qu'à former la fonction W' dont on déduira P par

la formule ci-dessus, et aussi

$$S' = \frac{1}{h_1}\left(W' + \frac{1}{2} n^2 a^3 \frac{a^3}{r^3}\zeta^2 - \frac{1}{2} n^2 a^2 \frac{d\zeta^2}{(n\, dt)^2}\right),$$

$$S = S' - \frac{1}{2}\frac{r^2}{h_1} S'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{h_1}\right)^2 S'^3 - \dots$$

On a

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt};$$

or, d'après la méthode même suivie au numéro précédent, on a aussi

$$\frac{dr}{dt} = n\frac{\partial r}{\partial g}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2} = n + n\frac{\partial v}{\partial g} + \frac{h - h_1}{r^2},$$

r et v étant toujours exprimés comme ci-dessus à l'aide de a, l, e, g. Il en résulte immédiatement, d'après des relations déjà établies,

$$\frac{dW'}{dt} = (n + S)\frac{\partial W}{\partial l} + n\frac{\partial W}{\partial g} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

et, d'une façon définitive,

$$W' = W'_0 + W'^0 + \int n\, dt \left[\lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda}\left(1 + \frac{S}{n}\right) + x_1\frac{\partial W}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{n\, dt}\right].$$

107. Donnons maintenant les indications nécessaires pour le calcul des perturbations du premier ordre par rapport aux masses perturbatrices, et tout d'abord déterminons δx_1, δx_2, $\delta(zl)$.

Puisque la coordonnée ζ est elle-même du premier ordre, il faut réduire la fonction W à

$$W = 2\mu' n^2 a^2 (R\sqrt{aa'}) + 2 n^2 a^2 \frac{a}{r},$$

en ne tenant compte que de l'action de la planète M', et dans la fonction R, comme dans $\frac{a}{r}$, les variables l, x_1, x_2, l', x'_1, x'_2 sont réduites à leurs valeurs de première approximation définies précédemment.

Dans les mêmes conditions

$$\frac{dW'}{n\, dt} = \lambda\frac{\partial W}{\partial \lambda} + x_1\frac{\partial W}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial W}{\partial x_2},$$

$$P = 2W' + a\frac{\partial W}{\partial a}, \qquad S = \frac{\sec\varphi}{na^2} W'

Envisageons en premier lieu les perturbations qui proviennent de M'. La fonction $R\sqrt{aa'}$ se développe, d'après le Chapitre XIII, sous la forme

$$\Sigma \lambda^{s} \lambda'^{s'} x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_1'^{p_1'} x_2'^{p_2'} N^{s}_{p_1, p_2} N'^{s'}_{p_1', p_2'} B^{\frac{s+s'}{2}}_{\frac{s-s'}{2}},$$

s et s' étant deux entiers quelconques de même parité.

Partageons ces termes en divers groupes, les exposants s, s', p_1', p_2' étant fixes dans chaque groupe, et considérant spécialement un de ces groupes, que nous écrirons sous la forme

$$\Sigma C_{p_1, p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

cherchons les perturbations qui en résultent.

Les coefficients C_{p_1, p_2} se présentent sous la forme d'une constante multipliée par l'exponentielle $e^{i(sl+s'l')+i(p_1'-p_2')g'}$, de sorte que le coefficient de it dans l'exposant de e est égal à la quantité $sn+(s'+p_1'-p_2')n'$, que nous appellerons σn; de la même façon, la valeur de $x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ est $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2} e^{i(p_1-p_2)g}$, et le coefficient de it dans l'exposant de e est $(p_1-p_2)n$.

La fonction R étant ainsi réduite, on a immédiatement

$$W' = 2\mu' n^2 a^2 \Sigma C'_{p_1, p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

en faisant

$$C'_{p_1, p_2} = \frac{s+p_1-p_2}{\sigma+p_1-p_2} C_{p_1, p_2}.$$

La quadrature est effectuée sans addition de constante : nous étudierons spécialement plus loin l'effet de la partie constante de W'.

On doit prendre évidemment $C'_{p_1, p_2} = 0$ toutes les fois que l'on a $s+p_1-p_2 = 0$; pour les coefficients C'_{p_1, p_2} restants, aucune difficulté ne peut se produire, car le diviseur $\sigma+p_1-p_2$ ne saurait être nul si l'on n'a pas à la fois $s+p_1-p_2 = 0$, $s'+p_1'-p_2' = 0$, puisque le rapport $\frac{n}{n'}$ est supposé irrationnel.

On a ensuite

$$a\frac{\partial W}{\partial a} = \left(D - \frac{1}{2}\right) W,$$

de sorte qu'en posant

$$C''_{p_1, p_2} = 2C'_{p_1, p_2} + \left(D - \frac{1}{2}\right) C_{p_1, p_2},$$

il vient

$$P = 2\mu' n^2 a^2 \Sigma C''_{p_1\, p_2}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2}$$

Effectuant les quadratures indiquées dans les équations (13) sans addition de constantes, on en déduit immédiatement

$$\delta x_1 = \sum \frac{\mu' x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\sigma + p_1 - p_2 - 1}\Big(C''_{p_1\, p_2} - 3\,C''_{p_1-1\, p_2} + C''_{p_1, p_2-1} - \frac{1}{2}\,C''_{p_1-2, p_2} - C''_{p_1-1\, p_2-1} + \frac{3}{2}\,C''_{p_1\, p_2-2} - \frac{2}{3}\,C''_{p_1-3\, p_2} - 2\,C''_{p_1-1, p_2-2} + \frac{8}{3}\,C''_{p_1\, p_2-3} + \cdots \Big),$$

$$\delta x_2 = \sum \frac{\mu' x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\sigma + p_1 - p_2 + 1}\Big(- C''_{p_1\, p_2} - C''_{p_1-1, p_2} + 3\,C''_{p_1, p_2-1} - \frac{3}{2}\,C''_{p_1-2, p_2} + C''_{p_1-1\, p_2-1} + \frac{1}{2}\,C''_{p_1\, p_2-2} - \frac{8}{3}\,C''_{p_1-3, p_2} + 2\,C''_{p_1-2, p_2-1} + \frac{2}{3}\,C''_{p_1, p_2-3} + \cdots \Big)$$

Ces parenthèses sont limitées, puisque les indices analogues à p_1, p_2 ne peuvent devenir négatifs, et dans δx_1, par exemple, il n'y a pas d'autres coefficients C''_{p_1-p-1, p_2-p} que celui qui correspond à $p = 0$.

Dans δx_1 encore, si l'on a $s' + p'_1 - p'_2 = 0$, ou ce qui revient au même $\sigma = s$, et si $s + p_1 - p_2 = 1$, il faudra remplacer $\frac{1}{\sigma + p_1 - p_2 - 1}$ par int, et la partie correspondante de δx_1 sera de caractère mixte, renfermant le facteur variable $int\, e^{int}$.

Une observation analogue s'applique à δx_2.

On trouve ensuite

$$\delta(il) = \sum \frac{\mu' x_1^{p_1} x_2^{p_2}\, i}{\sigma + p_1 - p_2}\Big\{ 2\,C'_{p_1, p_2} + 4\,C_{p_1-1, p_2-1} + \cdots - 4\,C''_{p_1, p_2} - C''_{p_1-1\, p_2} - C''_{p_1, p_2-1} - C''_{p_1-2, p_2} - 2\,C''_{p_1-1\, p_2-1} - C''_{p_1, p_2-2} - \frac{3}{2}\,C''_{p_1-3, p_2} - \frac{3}{2}\,C''_{p_1-2, p_2-1} - \frac{3}{2}\,C''_{p_1-1, p_2-2} - \frac{3}{2}\,C''_{p_1, p_2-3} - \cdots \Big\}$$

Cette parenthèse est encore une expression limitée et d'après la valeur de la partie constante du coefficient C indiquée au n° 104, le

coefficient de $C'_{p_1-p\, p_2-p}$ est toujours le double changé de signe de celui de C''_{p_1-p, p_2-p}, sauf pour $p=0$.

Si l'on a $\sigma = s$ et $s + p_1 - p_2 = 0$, il faudra remplacer $\frac{1}{\sigma + p_1 - p_2}$ par int, et la partie correspondante de $\delta(il)$ sera séculaire de rang un.

D'après la forme des coefficients $C'_{p_1\, p}$, on voit que les expressions de δx_1, δx_2, $\delta(il)$ sont du second degré par rapport aux inverses des différents diviseurs $\sigma + p$, p étant un entier quelconque. Cherchons les termes qui dépendent en particulier du carré du diviseur $\sigma + p$: il suffit de se reporter aux remarques faites ci-dessus pour voir que si l'on pose

$$X = 6\mu' \frac{s+p}{(\sigma+p)^2} \Sigma C_{p_1\, p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

la somme étant étendue aux seules valeurs de p_1 et p_2 telles que $p_1 - p_2 = p$, les parties de δx_1, δx_2, $\delta(il)$ qui renferment les termes cherchés sont respectivement $-x_1 X$, $x_2 X$, $-X$. Ces résultats, qui permettent le calcul immédiat des parties les plus importantes des inégalités à longue période de δl, δx_1, δx_2, étaient faciles à prévoir *a priori* d'après les développements du Chapitre précédent.

Les perturbations de $\log r$ et de v se déduisent immédiatement en général des développements connus

$$\log r = \log a - x_1 - x_2 - \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2 + \dots,$$

$$iv = il + 2(x_1 - x_2) + \frac{5}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \dots,$$

de sorte que pour les perturbations du premier ordre, en particulier, on a simplement

$$\begin{aligned}\delta(\log r) = {} & \delta x_1 \Big(-1 - 3x_1 + x_2 - \frac{17}{2} x_1^2 + 3x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_2^2 \\ & \qquad - \frac{71}{3} x_1^3 + 11 x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + \frac{11}{3} x_2^3 + \dots \Big) \\ & + \delta x_2 (-1 + x_1 - 3x_2 + \dots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(iv) = {} & \delta(il) + \delta x_1 \Big(2 + 5x_1 + 13 x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \\ & \qquad + \frac{103}{3} x_1^3 - 11 x_1^2 x_2 + \frac{11}{3} x_2^3 + \dots \Big) \\ & + \delta x_2 (-2 - 5x_2 - \dots),\end{aligned}$$

les coefficients de δx_2 etant conjugues de ceux de δx_1, avec changement de signe en plus dans $\delta(\iota v)$

On voit clairement que pour obtenir les expressions de ces perturbations jusqu'a un certain degre par rapport aux excentricites et a l'inclinaison mutuelle des deux orbites, il suffit, comme nous l'avons annonce anterieurement, de prendre en considération les termes semblables de la fonction perturbatrice

Pour ramener tous ces résultats a la forme reelle, on fera comme nous l'avons dit au Chapitre precedent Ajoutons qu'au point de vue du calcul, on pourra determiner le rayon vecteur et la longitude a l'aide de x_1, x_2, l, directement, sans passer par l'intermediaire des perturbations $\delta(\log r)$, $\delta(\iota v)$

Afin de retrouver les résultats du Chapitre precedent, cherchons d'abord plus explicitement les perturbations des diverses variables et coordonnées pour lesquelles on a $\sigma = s$, sans depasser le premier degré par rapport aux excentricités et a l'inclinaison mutuelle J Dans ces conditions, on doit prendre

$$\mathrm{R}\sqrt{aa'} = b_0^{\frac{1}{2}} + (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{2} - \mathrm{D}\right) b_0^{\frac{1}{2}} + (\lambda\lambda'^{-1} x'_1 + \lambda^{-1}\lambda' x'_2)\left(-\frac{3}{2} + \mathrm{D}\right) b_1^{\frac{1}{2}},$$

et l'on trouve aussitôt

$$\begin{aligned}\delta x_1 = {} & \mu'\left(\frac{1}{2} - \mathrm{D}\right) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu' n\iota t\, x_1\left(\frac{9}{4} - 4\mathrm{D} - \mathrm{D}^2\right) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu' x_2\left(-\frac{1}{8} + \frac{\mathrm{D}^2}{2}\right) b_0^{\frac{1}{2}} \\ & + \mu' n\iota t\,\lambda\lambda'^{-1} x'_1\left(-\frac{9}{4} + \mathrm{D}^2\right) b_1^{\frac{1}{2}} + \mu'\lambda^{-1}\lambda' x'_2\left(\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\mathrm{D}^2\right) b_1^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta x_2 = {} & \mu'\left(\frac{1}{2} - \mathrm{D}\right) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu' x_1\left(-\frac{1}{8} + \frac{\mathrm{D}^2}{2}\right) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu' n\iota t\, x_2\left(-\frac{9}{4} + 4\mathrm{D} + \mathrm{D}^2\right) b_0^{\frac{1}{2}} \\ & + \mu'\lambda\lambda'^{-1} x'_1\left(\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\mathrm{D}^2\right) b_1^{\frac{1}{2}} + \mu' n\iota t\,\lambda^{-1}\lambda' x'_2\left(\frac{9}{4} - \mathrm{D}^2\right) b_1^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\iota l) = {} & \mu' n\iota t(2 - 4\mathrm{D}) b_0^{\frac{1}{2}} + \mu'(x_1 - x_2)\left(-\frac{3}{2} + \mathrm{D} + 4\mathrm{D}^2\right) b_0^{\frac{1}{2}} \\ & + \mu'(\lambda\lambda'^{-1} x'_1 - \lambda^{-1}\lambda' x'_2)(6 + 2\mathrm{D} - 4\mathrm{D}^2) b_1^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, cherchons d'abord l'effet d'une constante W'_0 ajoutée à la quadrature W' En prenant W'_0 sous la forme $n^2 a^2 \mathrm{K}$,

on trouve

$$\delta x_1 = \mathrm{K}\left(-1 - 3n\iota t x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 + \dots\right),$$

$$\delta x_2 = \mathrm{K}\left(-1 - \frac{1}{2} x_1 + 3n\iota t x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 + \dots\right),$$

$$\delta(\iota l) = \mathrm{K}\left(-3n\iota t - x_1 + x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \dots\right),$$

et d'apres les remarques faites ci-dessus, il n'y a pas d'autres termes séculaires ou mixtes dans ces expressions que ceux qui sont ecrits

Cherchons ensuite l'effet de la partie $\varkappa n^2 a^2 \frac{a}{r}$ de W En faisant $\mathrm{W} = \varkappa n^2 a^2 \frac{a}{r}$, on a $a \frac{\partial w}{\partial a} = -\mathrm{W}$, et l'on peut prendre $\mathrm{W}' = \mathrm{W}$, en faisant entrer dans W′ une constante, ce qui n'a aucun inconvénient, cette constante est d'ailleurs exactement egale à $\varkappa n^2 a^2$, comme on le sait d'apres le developpement de $\frac{a}{r}$ Par suite

$$\frac{\mathrm{P}}{2na^2} = \frac{\varkappa n}{2} \frac{a}{r}, \qquad \mathrm{S} - \frac{\mathrm{CP}}{na^2} = \varkappa n \frac{a}{r} (\text{séc}\,\varphi - \mathrm{C})$$

Or on a

$$\frac{a}{r} = 1 + x_1 + x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots,$$

par suite on trouve

$$\delta x_1 = \varkappa\left(-\frac{1}{2} - n\iota t x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \dots\right),$$

$$\delta x_2 = \varkappa\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_1 + n\iota t x_2 + \dots\right),$$

$$\delta(\iota l) = \varkappa\left(-n\iota t - \frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_2 + \dots\right)$$

Dans ces expressions encore, il n'y a pas d'autres termes séculaires ou mixtes que ceux qui sont écrits, il suffit, pour le voir, de se reporter à la definition de z_1, z_2, C, et d'observer que d'après le n° 81, les développements de $\frac{a}{r} \varepsilon \cos u$, $\frac{a}{r} \varepsilon \sin u$ suivant les puissances de x_1 et x_2 n'offrent aucun terme constant, tandis que la partie constante de $\frac{a}{r}$ est l'unité

On peut vérifier sans peine que le mouvement défini par les for-

en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur par rapport aux masses perturbatrices.

Nous avons vu précédemment quel était le développement de $\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3}$, celui de $\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3} - \frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{r^3}$ s'en déduirait en corrigeant les coefficients $D^k b_0^{\frac{3}{2}}$ comme nous l'avons vu à la fin du n° 90 à propos de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice, et il ne serait pas difficile d'indiquer des règles précises pour le développement des produits de cette fonction par les facteurs $\frac{r'}{a'} e^{\pm iv'}$, si l'on ne veut pas effectuer ces produits directement.

Mais bornons-nous à chercher la partie principale de ζ, en négligeant les excentricités et les puissances supérieures de l'inclinaison mutuelle J des deux orbites, et laissons en outre de côté les termes qui dépendent de λ'. Dans ces conditions, on a

$$\frac{Z}{2na^2} = \mu' n(\gamma'_1 \lambda - \gamma'_2 \lambda^{-1})\, b_1^{\frac{3}{2}},$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\zeta = \mu' nit(\gamma'_1 \lambda + \gamma'_2 \lambda^{-1})\, b_1^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \mu'(\gamma'_1 \lambda - \gamma'_2 \lambda^{-1})\, b_1^{\frac{3}{2}}.$$

Il est facile de vérifier que ces résultats sont entièrement conformes à ceux du Chapitre précédent.

Le calcul des perturbations d'ordre supérieur au premier ne saurait offrir aucune difficulté théorique : nous ne nous y arrêterons pas, pour les mêmes raisons que précédemment.

108. Pour la méthode de Hansen, que nous devons exposer maintenant, avec les modifications jugées convenables ici, partons des équations (1) et (2) du n° 103, puis substituons à r et v deux nouvelles variables b et g choisies de la façon suivante, qui marque le caractère propre de la méthode.

Soient ε et ϖ deux constantes : nous mettrons r et v (et par suite toute fonction de ces deux quantités) sous la même forme que le rayon vecteur et la longitude dans l'orbite dans un mouvement képlérien pour lequel g serait l'anomalie moyenne, b le demi-grand axe,

ε l'excentricité, ϖ la longitude du périhelie, de sorte que

$$(14)\quad \begin{cases} r = b\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon\cos g - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2g + \quad\right), \\ v = \varpi + g + 2\varepsilon\sin g + \frac{5}{4}\varepsilon^2\sin 2g + \end{cases}$$

Ces équations definissent completement notre changement de variables, et il faut former maintenant les equations qui determinent les nouvelles inconnues b et g

Nous désignerons dans ce qui suit par ρ le quotient $\frac{r}{b}$, par ψ la difference $v - \varpi$, c'est-a-dire l'anomalie vraie qui correspond aux elements g, ε ρ et ψ dependent uniquement de la variable g, et du parametre ε, on a de plus $v = \varpi + \psi$

La première équation (1) devient alors

$$h = b^2\rho^2\frac{d\psi}{dg}\frac{dg}{dt},$$

mais en faisant toujours $\varepsilon = \sin\varphi$, les proprietes du mouvement keplerien donnent

$$\rho^2\frac{d\psi}{dg} = \cos\varphi,$$

on a donc d'abord, en reprenant la seconde et la dernière des équations (1),

$$(15)\qquad \frac{dg}{dt} = \frac{h}{b^2\cos\varphi}, \qquad \frac{dh}{dt} = Q, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} = T$$

Posons maintenant, en désignant par λ et μ deux nouvelles variables provisoires,

$$\frac{h}{r} = \frac{k^2}{h} + \lambda\cos\psi + \mu\sin\psi,$$

$$\frac{dr}{dt} = \lambda\sin\psi - \mu\cos\psi,$$

différentions ces relations, et tenons compte des équations (1), il vient

$$\cos\psi\frac{d\lambda}{dt} + \sin\psi\frac{d\mu}{dt} = \left(\frac{1}{r} + \frac{k^2}{h^2}\right)Q,$$

$$\sin\psi\frac{d\lambda}{dt} - \cos\psi\frac{d\mu}{dt} = R$$

En faisant

$$
(16)\qquad \begin{cases} F = \cos\psi\left(\frac{1}{r} + \frac{k^2}{h^2}\right)Q + \sin\psi\, R, \\ G = \sin\psi\left(\frac{1}{r} + \frac{k^2}{h^2}\right)Q - \cos\psi\, R, \end{cases}
$$

on a donc

$$
\frac{d\lambda}{dt} = F, \qquad \frac{d\mu}{dt} = G,
$$

et par suite, en portant ces valeurs dans l'expression de $\frac{h}{r}$,

$$
(17)\qquad \frac{h}{b} = \rho\frac{k^2}{h} + \rho\cos\psi\int F\,dt + \rho\sin\psi\int G\,dt,
$$

les quadratures comportent d'ailleurs des constantes arbitraires non écrites.

Les équations (15) et (17) sont les nouvelles équations du problème ; elles entraînent encore une relation intéressante qui nous sera utile plus tard. La fonction $\frac{h}{b}$ écrite ci-dessus dépend du temps : 1° par l'intermédiaire des trois facteurs ρ, $\rho\cos\psi$, $\rho\sin\psi$, qui sont des fonctions de g, uniquement, 2° par l'intermédiaire des facteurs $\frac{k^2}{h}$, $\int F\,dt$, $\int G\,dt$. Faisons alors

$$
\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{d\rho}{dg}\frac{k^2}{h} + \frac{d(\rho\cos\psi)}{dg}\int F\,dt + \frac{d(\rho\sin\psi)}{dg}\int G\,dt,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{b}\right) = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{k^2}{h}\right) + (\rho\cos\psi)F + (\rho\sin\psi)G,
$$

on aura

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{b}\right) + \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{h}{b}\right)\frac{dg}{dt},
$$

et aussi

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{1}{b}\frac{dh}{dt} - \frac{h}{b^2}\frac{db}{dt},
$$

or, d'après les valeurs de F, G et celle de Q, on trouve immédiatement

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{1}{b}\frac{dh}{dt},
$$

il reste donc, en se servant de l'expression de $\frac{dg}{dt}$,

$$
(\alpha)\qquad \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{h}{b}\right) = -\cos\varphi\frac{db}{dt}
$$

Soient maintenant n et a deux constantes arbitraires liées par la relation $n^2a^3 = k^2$, faisons encore

$$h_0 = na^2 \cos\varphi,$$

et, en désignant par g_0 une constante arbitraire, appelons γ l'argument $nt + g_0$ Posons alors

$$(18) \qquad g = \gamma + \sigma, \qquad b = \frac{a}{1+\alpha}, \qquad h = \frac{h_0}{1+\beta}, \qquad z = a\zeta,$$

substituant ainsi à g, b, h, z les nouvelles inconnues équivalentes α, β, σ, ζ, soit de plus ω une inconnue supplémentaire telle que

$$(18\ bis) \qquad \frac{h}{b} = \frac{h_0}{a}\left(1 + \frac{\omega - \beta}{2}\right).$$

En fonction de β et ω, on a d'abord

$$(19) \qquad \alpha = \frac{\omega + \beta}{2} + \beta\,\frac{\omega - \beta}{2},$$

puis, par la première équation (15),

$$\frac{d\sigma}{n\,dt} = \omega + (\alpha + \beta)\frac{\omega - \beta}{2},$$

c'est-à-dire

$$(20) \qquad \sigma = \sigma_0 + \int \left[\omega + (\alpha + \beta)\frac{\omega - \beta}{2}\right] n\,dt,$$

en désignant par σ_0 une constante arbitraire

Il faut maintenant déterminer β et ω Introduisant la fonction W définie par les formules (2), on a par la deuxième équation (15) et l'équation (17)

$$\beta = -\int \frac{h_0}{h^2}\frac{\partial W}{\partial v}\,dt,$$

$$1 + \frac{\omega - \beta}{2} = \rho\,\text{séc}^2\varphi(1 + \beta) + \rho\cos\psi \int \frac{a}{h_0}\,F\,dt + \rho\sin\psi \int \frac{a}{h_0}\,G\,dt,$$

or l'expression keplérienne connue de ρ en fonction de ψ donne

$$\rho\,\text{séc}^2\varphi = 1 - \varepsilon\,\text{séc}^2\varphi\,\rho\cos\psi,$$

par suite, en n'oubliant pas que les quadratures actuelles comportent des constantes indéterminées non écrites, la dernière des équations précédentes devient, en remplaçant $\rho\,\text{séc}^2\varphi$ par sa valeur dans le

premier terme du second membre

$$\omega = 3\beta + \rho\cos\psi\int\left(\frac{2a}{h_0}F - 2\varepsilon\sec^2\varphi\frac{d\beta}{dt}\right)dt + \rho\sin\psi\int\frac{2a}{h_0}G\,dt$$

Si l'on fait maintenant

$$(21)\qquad \begin{cases} P_1 = \dfrac{a\varepsilon}{h_0}F + \dfrac{h_0}{h^2}\sec^2\varphi\dfrac{\partial W}{\partial v}, \\ P_2 = \dfrac{2a}{h_0}F + \dfrac{2h_0}{h^2}\varepsilon\sec^2\varphi\dfrac{\partial W}{\partial v}, \\ P_3 = \dfrac{2a}{h_0}\cos\varphi\, G, \end{cases}$$

et que l'on désigne par β_1, β_2, β_3 trois constantes arbitraires, on a finalement, sous une forme que la suite montrera avantageuse,

$$(22)\qquad \begin{cases} \beta = -\beta_1 - \displaystyle\int P_1\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\left(\beta_2 + \int P_2\,dt\right), \\ \omega = -3\beta_1 - 3\displaystyle\int P_1\,dt + \left(\rho\cos\psi + \frac{3\varepsilon}{2}\right)\left(\beta_2 + \int P_2\,dt\right) \\ \qquad + \rho\sin\psi\sec\varphi\left(\beta_3 + \displaystyle\int P_3\,dt\right) \end{cases}$$

Rappelons d'ailleurs que

$$(21\ bis)\qquad \begin{cases} F = \cos\psi\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{k^2}{h^2}\right)\dfrac{\partial W}{\partial v} + \sin\psi\left(\dfrac{\partial W}{\partial r} + \dfrac{3}{2}\dfrac{k^2a^2\zeta^2}{r^4}\right), \\ G = \sin\psi\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{k^2}{h^2}\right)\dfrac{\partial W}{\partial v} - \cos\psi\left(\dfrac{\partial W}{\partial r} + \dfrac{3}{2}\dfrac{k^2a^2\zeta^2}{r^4}\right) \end{cases}$$

Quant à la relation (α), il est facile de voir ce qu'elle devient, en faisant comme précédemment

$$\frac{\partial\omega}{\partial g} = \frac{\partial(\rho\cos\psi)}{\partial g}\left(\beta_2 + \int P_2\,dt\right) + \frac{\partial(\rho\sin\psi\sec\varphi)}{\partial g}\left(\beta_3 + \int P_3\,dt\right),$$

on a immédiatement

$$(\beta)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial g} = \frac{2}{(1+\alpha)^2}\frac{d\alpha}{n\,dt}.$$

Pour déterminer enfin ζ, opérons comme au n° 104 Si l'on ppelle ρ_0, ψ_0 ce que deviennent les fonctions ρ, ψ lorsqu'on y fait

$g = \gamma$, la dernière équation (15) peut s'écrire

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{n^2\zeta}{\rho_0^3} = \frac{Z}{a^2},$$

avec

$$Z = \frac{\partial W}{\partial \zeta} - n^2 a^2 \zeta \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{1}{\rho_0^3} \right). \tag{23}$$

L'équation précédente, privée du second membre, admet les deux solutions $\rho_0 \cos\psi_0$, $\rho_0 \sin\psi_0$, telles que

$$\rho_0 \cos\psi_0 \frac{d}{dt}(\rho_0 \sin\psi_0) - \rho_0 \sin\psi_0 \frac{d}{dt}(\rho_0 \cos\psi_0) = n \cos\varphi,$$

par suite, on peut mettre facilement ζ sous la forme

$$\begin{aligned} \zeta = {} & \rho_0 \sin\psi_0 \operatorname{séc}\varphi \left(\chi_1 + \int \rho_0 \cos\psi_0 \frac{Z}{na^2} dt \right) \\ & - \rho_0 \cos\psi_0 \left(\chi_2 + \int \rho_0 \sin\psi_0 \operatorname{séc}\varphi \frac{Z}{na^2} dt \right), \end{aligned} \tag{24}$$

en désignant par χ_1, χ_2 deux constantes arbitraires

Le problème est ainsi ramené aux équations (14), (18), (19), (20), (22), (24), et dépend de six quadratures, que nous supposerons effectuées sans addition de constantes superflues, puisque nous avons déjà mis en évidence les constantes qui les accompagnent

On voit encore que la solution dépend en tout de treize paramètres arbitraires, savoir $\varkappa$, n ou a, ε, ϖ, g_0, les deux éléments j et θ qui, comme précédemment, définissent la position du plan P, puis σ_0, β_1, β_2, β_3, χ_1, χ_2, nous pouvons donc disposer à notre gré de sept d'entre eux

En particulier nous pouvons prendre $\sigma_0 = 0$, puis déterminer $\varkappa$, β_1, β_2, β_3, χ_1, χ_2 de façon que les expressions de $\frac{d\sigma}{dt}$ et α n'aient pas de partie constante, en même temps que les fonctions σ et ζ n'auront aucun terme périodique en $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$ On obtient ainsi une solution entièrement déterminée et d'une parfaite netteté, définie par les constantes a, ε, ϖ, g_0, j, θ, et les inconnues α, β, σ, ω, ζ sont toutes de l'ordre des perturbations Comme précédemment, et pour les mêmes raisons, quand il s'agit d'une planète donnée, on regardera α, ε, ω, g_0, j, θ comme des nombres fixes choisis une fois pour toutes, et l'on conservera dans les formules les constantes σ_0, β_1, β_2, β_3, χ_1, χ_2,

afin de pouvoir en disposer pour réaliser l'accord de la théorie et des observations, elles ne pourront avoir que des valeurs extrêmement petites si les paramètres fondamentaux a, ε, ont été bien choisis.

Revenons aux formules (21) et (21*bis*) qui définissent P_1, P_2, P_3. Pour calculer ces fonctions, substituons les deux variables b et g à r et v dans la fonction perturbatrice W. On a

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial b}, \qquad \frac{\partial W}{\partial g} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial g} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial g},$$

et, d'après des formules connues,

$$\frac{\partial v}{\partial g} = \frac{\cos\varphi}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial g} = \operatorname{tang}\varphi \sin\psi,$$

il en résulte

$$r\frac{\partial W}{\partial r} = b\frac{\partial W}{\partial b}, \qquad \frac{\partial W}{\partial v} = \rho^2 \operatorname{séc}\varphi \frac{\partial W}{\partial g} - \varepsilon\rho \sin\psi \operatorname{séc}^2\varphi\, b\frac{\partial W}{\partial b}.$$

On trouve alors sans peine, en faisant toujours usage de la relation

$$\rho(1+\varepsilon\cos\psi) = \cos^2\varphi,$$

les résultats suivants

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
P_1 = {} & \frac{1}{na^2}\frac{\partial W}{\partial g}\rho \operatorname{séc}^2\varphi\left(\frac{a}{b}\varepsilon\cos\psi + \frac{h_0^2}{h^2}\right) \\
& + \frac{1}{na^2} b\frac{\partial W}{\partial b}\varepsilon \sin\psi \operatorname{séc}^3\varphi\left(\frac{a}{b} - \frac{h_0^2}{h^2}\right) + \frac{3}{2}n\varepsilon\rho\sin\psi \operatorname{séc}\varphi\frac{\zeta^2}{\rho^5}\frac{a^4}{b^4}, \\
P_2 = {} & \frac{2\operatorname{séc}^2\varphi}{na^2}\frac{\partial W}{\partial g}\left[\frac{a}{b}\rho\cos\psi + \frac{h_0^2}{h^2}\rho^2 \operatorname{séc}^2\varphi(\cos\psi+\varepsilon)\right] \\
& + \frac{2\operatorname{séc}^2\varphi}{na^2} b\frac{\partial W}{\partial b}\sin\psi \operatorname{séc}\varphi\left[\frac{a}{b} + \frac{h_0^2}{h^2}(\rho-1)\right] \\
& + 3n\rho\sin\psi \operatorname{séc}\varphi\frac{\zeta^2}{\rho^5}\frac{a^4}{b^4}, \\
P_3 = {} & \frac{2\sec^2\varphi}{na^2}\frac{\partial W}{\partial g}\rho\sin\psi \operatorname{séc}\varphi\left(\frac{a}{b}\cos^2\varphi + \frac{h_0^2}{h^2}\rho\right) \\
& - \frac{2\sec^2\varphi}{na^2} b\frac{\partial W}{\partial b}\left[\frac{a}{b}(\cos\psi+\varepsilon) + \frac{h_0^2}{h^2}\varepsilon\rho\sin^2\psi\sec^2\varphi\right] \\
& - 3n\rho\cos\psi\frac{\zeta^2}{\rho^5}\frac{a^4}{b^4}
\end{aligned}\right.$$

Comme nous avons posé

$$\frac{a}{b} = 1+\alpha, \qquad \frac{h_0}{h} = 1+\beta,$$

on voit immédiatement quels sont les termes en α, β, β^2, ζ^2, dans ces formules, en les laissant de côté, de façon à limiter P_1, P_2, P_3 à leurs parties principales du premier ordre par rapport à la force perturbatrice, on a simplement

$$(25\ bis)\quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{1}{na^2}\dfrac{\partial W}{\partial g}, \\ P_2 = \dfrac{2\sec^2\varphi}{na^2}\left[\dfrac{\cos^2\varphi - \rho^2}{\varepsilon}\dfrac{\partial W}{\partial g} + \rho\sin\psi\sec\varphi\, b\dfrac{\partial W}{\partial b}\right], \\ P_3 = \dfrac{2\sec^2\varphi}{na^2}\left[\rho\sin\psi\sec\varphi(\cos^2\varphi + \rho)\dfrac{\partial W}{\partial g} - (\rho\cos\psi + 2\varepsilon)\, b\dfrac{\partial W}{\partial b}\right], \end{cases}$$

mais il faudra se souvenir que ce ne sont là que des expressions incomplètes

Ajoutons que

$$(25\ ter)\qquad \frac{Z}{na^2} = \frac{1}{na^2}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + n\zeta\left(\frac{1}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho^3}\frac{a^3}{b^3}\right)$$

109 La fonction W a pour expression

$$W = V + 2n^2a^2\left(\frac{a}{b\rho} - \frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{\rho^3}\frac{a^3}{b^3}\right) + n^2a^2(1+\varkappa)\left(\frac{3}{8}\frac{\zeta^4}{\rho^5}\frac{a^5}{b^5} + \quad\right),$$

et pour son utilisation dans les formules précédentes, il suffit évidemment de considérer de plus près la fonction perturbatrice proprement dite V, ou plutôt la partie de cette fonction qui provient de l'action de la planète M′, dont la position sera définie par des coordonnées analogues à celles qui fixent la position de M

Comme au n° 106, introduisons les éléments τ, τ', J qui déterminent la position relative des plans fixes P et P′, et soit

$$\cos H = \cos(v - \tau)\cos(v' - \tau') + \sin(v - \tau)\sin(v' - \tau')\cos J,$$

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H,$$

$$\omega = r'z\sin J\sin(v' - \tau') - rz'\sin J\sin(v - \tau) + zz'\cos J$$

$$= aa'\left[\zeta\sin J\frac{r'}{a'}\sin(\psi' + \varpi' - \tau') - \zeta'\sin J\frac{r}{a}\sin(\psi + \varpi - \tau) + \zeta\zeta'\cos J\right],$$

$$\mu' = \frac{1}{2}\frac{m'(1+\varkappa)}{1+m}\sqrt{\frac{a}{a'}},$$

on aura

$$V = 2\mu' n^2a^2\left(R\sqrt{aa'} + \Delta R\sqrt{aa'}\right),$$

avec

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H,$$

$$\Delta R = \left(\omega - \frac{a^2\zeta^2 + a'^2\zeta'^2}{2}\right)\Delta^{-3} + \frac{3}{2}\left(\omega - \frac{a^2\zeta^2 + a'^2\zeta'^2}{2}\right)^2 \Delta^{-5} + \dots$$

$$- \frac{\omega}{r'^3} + (rr'\cos H + \omega)\left(\frac{3}{2}\,\frac{a'^2\zeta'^2}{r'^5} + \dots\right)$$

La fonction R est celle que nous avons étudiée précédemment, en y remplaçant a, a' par b, b' toutefois il convient de profiter du fait que ε, ε', ϖ, ϖ', J, J', θ, θ' sont des constantes choisies une fois pour toutes. En reprenant l'analyse du n° 90, comptons d'abord les longitudes à partir de la direction OI du nœud choisi de P' sur P ceci revient à faire simplement d'abord

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sin^2\frac{J}{2}, \qquad \sigma'_1 = \sigma'_2 = \sin^2\frac{J}{2},$$

de sorte que les coefficients $B_s^{q'}$ deviennent entièrement réels

On a ensuite

$$A_s^{q'} = e^{i(p_1-p_2)g + i(p'_1-p'_2)g'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2}\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{p'_1+p'_2} N_{p_1,p_2}^{s+q'} N_{p'_1,p'_2}^{\prime\,-s+q'},$$

et l'on doit remplacer encore λ, λ' par $e^{i(g+\varpi-\tau)}$, $e^{i(g'+\varpi'-\tau')}$, il vient donc finalement sous forme réelle

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{\sqrt{bb'}}\sum \cos[(s+q'+p_1-p_2)g + (-s+q'+p'_1+p'_2)g' \\ + (s+q')(\varpi-\tau) + (-s+q')(\varpi'-\tau')] \\ \times\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2}\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{p'_1+p'_2} N_{p_1,p_2}^{s+q'} N_{p'_1,p'_2}^{\prime\,-s+q'} B_s^{q'}, \end{aligned}$$

dans cette formule, dont la différentiation par rapport à g est immédiate, s et q' sont des entiers quelconques, tandis que p_1, p_2, p'_1, p'_2 sont des entiers non négatifs, les quantités $B_s^{q'}$ sont des fonctions linéaires et homogènes des coefficients de Laplace b_n^p, et ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions du rapport σ, égal à $\frac{b}{b'}$ ou $\frac{b'}{b}$, suivant le cas, de sorte que l'on a aussi

$$b\frac{\partial R}{\partial b} = \left(D - \frac{1}{2}\right)R,$$

en adoptant toujours les mêmes conventions pour l'emploi du symbole D, en particulier, il faut remplacer D par $-$D lorsqu'on a $b > b'$ Rappelons enfin que le developpement precédent ne represente la fonction R complete que si l'on a soin de corriger les coefficients $D^k b_{\pm 1}^{\frac{1}{2}}$ et $D^k b_0^{\frac{1}{2}}$ comme on a dit a la fin du n° 90, sinon, on aurait seulement le developpement de Δ^{-1}

Le développement de ΔR s'ordonne suivant les puissances des quantités très petites ζ et ζ', et n'a pas besoin d'être prolonge bien loin, nous pouvons repéter ce que nous avons dit au n° 106 sur la façon de passer de l'expression de Δ^{-1} a celles de Δ^{-3}, Δ^{-5}, en observant aussi que le développement de $\Delta^{-3} - \frac{1}{r'^3}$ est le même que celui de Δ^{-3}, à la condition de corriger les $D^k b_0^{\frac{3}{2}}$ comme nous venons de le rappeler Quant aux fonctions de r et ψ, r' et ψ' que l'on rencontre encore dans ΔR, elles se développeront suivant des formules connues, sur lesquelles il est inutile d'insister, surtout en raison de ce qui suit

Il nous reste en effet à indiquer la façon de calculer les différents facteurs que l'on rencontre dans l'application des formules (22), (24), (25) D'une façon générale, on les developpera tres facilement en passant par l'intermediaire de l'anomalie excentrique u qui correspond a ε et g, et appliquant les résultats du n° 81 On aura ainsi en particulier, sous forme symetrique,

$$\rho \cos\psi = -\frac{3\varepsilon}{2} + \sum{}' \frac{J'_n(n\varepsilon)}{n} \cos ng,$$

$$\rho \sin\psi \sec\varphi = \sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon} \sin ng,$$

$$\frac{\cos^2\varphi - \rho^2}{\varepsilon} = -\frac{5\varepsilon}{2} + 2\sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n^2\varepsilon} \cos ng,$$

$$\rho \sin\psi \sec\varphi(\cos^2\varphi + \rho) = 2\sum{}' \frac{J'_n(n\varepsilon)}{n^2} \sin ng,$$

cette dernière formule resulte de ce que le premier membre est encore égal a

$$(2 - \varepsilon^2)\sin u - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2u,$$

le signe Σ' indique que la valeur $n = 0$ est exclue de la sommation

On a d'ailleurs, pour n positif,

$$\frac{J_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^{n-1}}{1.2\ldots n}\left[1 - \frac{\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \ldots\right],$$

$$\frac{J'_n(n\varepsilon)}{n} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^{n-1}}{1.2\ldots n}\left[1 - \frac{n+2}{n}\frac{\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{n+4}{n}\frac{\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots\right],$$

et si ces formules se montrent pratiquement peu avantageuses, nous avons vu précédemment comment on pouvait y remédier.

110. Si l'on se borne au calcul des perturbations du premier ordre, on peut procéder comme nous allons l'indiquer sommairement.

Étudiant d'abord les perturbations de la longitude et du rayon vecteur, on aura

$$\alpha = \frac{\omega + \beta}{2}, \qquad \sigma = \int \omega n \, dt,$$

et les quantités β, ω seront déterminées par les formules (22) et (25 *bis*), où l'on remplacera ρ et ψ par ρ_0 et ψ_0.

La fonction W doit être réduite à

$$2\mu' n^2 a^2 R\sqrt{aa'} + \frac{\varkappa n^2 a^2}{\rho_0},$$

et dans les dérivées $\frac{\partial R}{\partial g}$, $b\frac{\partial W}{\partial b}$, on doit remplacer b, b', g, g' par a, a', γ, γ'.

Si l'on fait cette substitution dans la fonction R elle-même, et que revenant à l'emploi des exponentielles, plus commode analytiquement, on pose

$$x = e^{i\gamma}, \qquad x' = e^{i\gamma'},$$

on pourra écrire

$$R = \frac{1}{\sqrt{aa'}}\Sigma x^s x'^{s'} A_{s,s'},$$

les exposants s, s' étant des entiers quelconques, et les coefficients $A_{s,s'}$ étant des combinaisons numériques, linéaires et homogènes, des nombres de Laplace calculés avec le rapport α égal à $\frac{a'}{a}$ $\left(\text{ou } \frac{a}{a'}\right)$.

On a alors

$$\frac{\partial W}{\partial g} = 2\mu' n^2 a^2 i \Sigma s r^s x'^s A_{s,s} + \kappa n^2 a^2 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{\rho_0}\right),$$

$$b\frac{\partial W}{\partial b} = 2\mu' n^2 a^2 \Sigma x^s x'^s \left(D - \frac{1}{2}\right) A_{s,s'} - \frac{\kappa n^2 a^2}{\rho_0},$$

et il est facile d'effectuer les diverses opérations indiquées Mais la méthode est surtout avantageuse au point de vue numerique, et se prête mal aux développements analytiques traitons cependant de cette façon le cas des inegalités qui ne depassent pas le premier degre par rapport aux excentricités, et qui sont indépendantes de x' Dans ces conditions, si l'on fait encore

$$y = e^{i(\varpi - \tau - \varpi' + \tau')},$$

on a

$$R\sqrt{aa'} = b_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}(x + x^{-1})\left(\frac{1}{2} - D\right) b_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon'}{2}(xy + x^{-1}y^{-1})\left(-\frac{3}{2} + D\right) b_1^{\frac{1}{2}},$$

et par suite, pour determiner les perturbations dues à l'action de la planete M',

$$\frac{\partial W}{\partial g} = n^2 a^2 i[A\varepsilon(x - x^{-1}) + A'\varepsilon'(xy - x^{-1}y^{-1})],$$

$$b\frac{\partial W}{\partial b} = n^2 a^2 [C + B\varepsilon(x + x^{-1}) + B'\varepsilon'(xy + x^{-1}y^{-1})],$$

avec

$$A = \mu'\left(\frac{1}{2} - D\right) b_0^{\frac{1}{2}}, \qquad A' = \mu'\left(-\frac{3}{2} + D\right) b_1^{\frac{1}{2}},$$

$$C = -2A, \qquad B = \left(D - \frac{1}{2}\right) A, \qquad B' = \left(D - \frac{1}{2}\right) A'$$

De plus,

$$\frac{\cos^2\varphi - \rho_0^2}{\varepsilon} = x + x^{-1} + \dots,$$

$$i\rho_0 \sin\psi_0 \sec\varphi(\cos^2\varphi + \rho_0) = x - x^{-1} + \dots,$$

$$\rho_0 \cos\psi_0 = \frac{1}{2}(x + x^{-1}) - \frac{3\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}(x^2 + x^{-2}) + \dots,$$

$$i\rho_0 \sin\psi_0 \sec\varphi = \frac{1}{2}(x - x^{-1}) + \frac{\varepsilon}{4}(x^2 - x^{-2}) + \dots$$

On trouve alors successivement

$$\int P_1\,dt = A\varepsilon(x+x^{-1}) + A'\varepsilon'(xy+x^{-1}y^{-1}),$$

$$\int P_2\,dt = 2A(x-x^{-1}) + \frac{3A-B}{2}\varepsilon(x^2+x^{-2}) + \frac{2A'-B'}{2}\varepsilon'(x^2y+x^{-2}y^{-1})$$
$$+(2A'+B')\varepsilon'(y-y^{-1})int,$$

$$i\int P_3\,dt = 2A(x-x^{-1}) + \frac{3A-B}{2}\varepsilon(x^2-x^{-2}) + \frac{2A'-B'}{2}\varepsilon'(x^2y-x^{-2}y^{-1})$$
$$-2(A+B)\varepsilon int - (2A'+B')\varepsilon'(y+y^{-1})int,$$

puis, en remarquant que les constantes β_1, β_2, β_3 seront au moins du premier degré par rapport aux excentricités,

$$\beta = -\beta_1 - A'\varepsilon'(xy+x^{-1}y^{-1}),$$

$$\omega = -3\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2(x+x^{-1}) - \frac{1}{2}i\beta_3(x-x^{-1})$$
$$+4A - \frac{A+B}{2}\varepsilon(x+x^{-1}) - \frac{4A'+B'}{2}\varepsilon'(xy+x^{-1}y^{-1})$$
$$+(A+B)\varepsilon(x-x^{-1})int + (2A'+B')\varepsilon'(xy-x^{-1}y^{-1})int$$

Si maintenant on tient compte de la même façon de la partie

$$\frac{\varkappa n^2 a^2}{\rho_0} = \varkappa n^2 a^2\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(x+x^{-1})+\quad\right]$$

de W, il est facile de s'assurer qu'il faut simplement augmenter ω de $2\varkappa$, même en tenant compte des puissances supérieures de l'excentricité ε ce résultat est intuitif, car d'après le principe même de la méthode suivie, il est clair que l'influence de la partie $\frac{\varkappa n^2 a^3}{r}$ de la fonction perturbatrice peut se traduire immédiatement par les conditions

$$\beta = 0, \qquad \left(1+\frac{d\sigma}{n\,dt}\right)^2(1+\alpha)^{-3} = 1+\varkappa,$$

c'est-à-dire exactement

$$\alpha = \varkappa, \qquad \omega = 2\varkappa, \qquad \sigma = (2\varkappa+\varkappa^2)nt$$

D'après ce résultat, on voit que, pour supprimer la partie constante de ω comme celle de α, il faut prendre d'abord

$$\beta_1 = 0, \qquad \varkappa = -2A = \mu'(-1+2D)b_0^{\frac{1}{2}},$$

en conservant toujours le même degré d'approximation, et en se bornant a considerer l'action de la planete M'

Pour faire disparaître de même les termes en x et x^{-1} dans σ il faut que ω soit de la forme

$$[(A+B)\varepsilon x + (2A'+B')\varepsilon xy](int+1)$$
$$-[(A+B)\varepsilon x^{-1}+(2A'+B')\varepsilon' x^{-1}y^{-1}](int-1),$$

ce qui détermine les constantes β_2 et β_3, et donne finalement

$$\alpha = \frac{A+B}{2}\varepsilon(x-x^{-1})int + \frac{2A'+B'}{2}\varepsilon'(xy-x^{-1}y^{-1})int$$
$$+\frac{A+B}{2}\varepsilon(x-x^{-1}) + \frac{A'+B'}{2}\varepsilon'(xy+x^{-1}y^{-1}),$$
$$\sigma = (A+B)\varepsilon(x+x^{-1})nt + (2A'+B')\varepsilon'(xy+x^{-1}y^{-1})nt$$

On a d'ailleurs

$$A+B = \mu'\left(\frac{1}{4}-D^2\right)b_0^{\frac{1}{2}} = -\mu' b_1^{\frac{3}{2}}, \qquad 2A'+B' = \mu'\left(-\frac{9}{4}+D^2\right)b_1^{\frac{1}{2}} = \mu' b_2^{\frac{3}{2}},$$
$$A'+B' = \mu'\left(-\frac{3}{4}-D+D^2\right)b_1^{\frac{1}{2}},$$

et comme au degré d'approximation adopté, on a simplement

$$\log r = \log a\rho_0 - \alpha,$$
$$v = \varpi + \psi_0 + \sigma,$$

on constate immediatement l'identite de ces résultats avec ceux déja trouves deux fois precedemment

Il en est de même quand on examine les inegalites dépendant de x', et de degré zero par rapport aux excentricites

Il faut prendre

$$R\sqrt{aa'} = \Sigma\lambda^s\lambda'^{-s}b_s^{\frac{1}{2}} = \Sigma x^s x'^{-s} y^s b_s^{\frac{1}{2}},$$

posons comme nous l'avons deja fait, sans confusion possible,

$$B_s = \mu'\lambda^s\lambda'^{-s}b_s^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta = \frac{n}{n-n'},$$

on a successivement

$$\frac{\partial W}{\partial g} = 2n^2a^2 i \Sigma s B_s, \qquad b\frac{\partial W}{\partial b} = 2n^2a^2\sum\left(D - \frac{1}{2}\right)B_s,$$

$$\int P_1\,dt = 2\Sigma\beta B_s,$$

$$\int P_2\,dt = x\sum\frac{4s - 2D + 1}{s+\beta}\beta B_s + x^{-1}\sum\frac{4s+2D-1}{s-\beta}\beta B_s,$$

$$i\int P_3\,dt = x\sum\frac{4s - 2D + 1}{s+\beta}\beta B_s - x^{-1}\sum\frac{4s+2D-1}{s-\beta}\beta B_s,$$

$$\beta = -2\Sigma\beta B_s,$$

$$\omega = -6\Sigma\beta B_s + \sum\frac{4s-2D+1}{s+\beta}\beta B_s + \sum\frac{4s+2D-1}{s-\beta}\beta B_s,$$

$$\alpha = \sum\frac{4\beta+2D-1}{s^2-\beta^2}\beta^2 B_s,$$

$$i\sigma = 2\sum\frac{s^2+3\beta^2+\beta(2D-1)}{s(s^2-\beta^2)}\beta^2 B_s$$

Pour déterminer maintenant la partie du premier ordre de la coordonnée ζ, on voit d'abord comme au n° 107 qu'il faut prendre

$$Z = \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 2\mu'' n^2 a^2 \sin J\,\rho'_0 \sin(\psi'_0 + \varpi' - \tau')(aa')^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

le développement de la fonction $\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}$ étant effectué comme ci-dessus celui de R

Bornons-nous à chercher la partie principale de ζ, en négligeant les excentricités et les puissances supérieures de $\sin J$, et laissant encore de côté les termes qui dépendent de x'. On a

$$Z = 2\mu' n^2 a^2 b_1^{\frac{3}{2}} \sin J \sin(\gamma + \varpi - \tau),$$

et il en résulte immédiatement

$$\zeta = -\mu' \sin J\, b_1^{\frac{3}{2}}\, nt \cos(\gamma + \varpi - \tau),$$

en prenant

$$\chi_1 = -\frac{1}{2}\mu' \sin J\, b_1^{\frac{3}{2}} \cos(\varpi - \tau), \qquad \chi_2 = \frac{1}{2}\mu' \sin J\, b_1^{\frac{3}{2}} \sin(\varpi - \tau)$$

Le calcul des perturbations d'ordre supérieur est relativement simple dans cette méthode, où le nombre des variables est réduit au

minimum mais il ne serait pas possible d'entrer ici dans des détails sur ce sujet. C'est d'ailleurs, il faut le répéter, surtout dans l'application numérique que la méthode actuelle se montre avantageuse, et nous allons bientôt y revenir en la considérant de ce point de vue.

Revenant au calcul des inégalités du premier ordre, envisagé d'une façon générale, nous pouvons encore faire les observations suivantes.

En premier lieu, les expressions (22) de β et ω montrent que la quantité σ seule est du second degré par rapport aux diviseurs introduits par les intégrations, et comme les facteurs $\rho\cos\psi + \frac{3\varepsilon}{2}$, $\rho\sin\psi\sec\varphi$ ne contiennent aucun terme non périodique par rapport à γ, on voit que les seuls termes de σ qui dépendent des carrés de ces diviseurs sont ceux qui résultent de la double quadrature $-3\int\int P_1\, n\,dt^2$.

En second lieu, il est aisé de rapprocher la méthode actuelle de celle de la variation des constantes. Comparons en effet les équations obtenues ci-dessus avec celles du n° 66, en se limitant aux perturbations du premier ordre, et appelant comme d'habitude (sans craindre de confusion dans les notations), n, l, ε, ϖ, j, θ les éléments de l'orbite osculatrice de la planète M rapportés au plan fixe P, on constate immédiatement que l'on a

$$\frac{dn}{dt} = -3nP_1, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2}\cos^2\varphi\, P_2, \qquad \varepsilon\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{2}\cos\varphi\, P_3,$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{2}{na^2}\left(b\frac{\partial W}{\partial b}\right) + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\left(\varepsilon\frac{d\varpi}{dt}\right),$$

$$\frac{d}{dt}[j\sin(\theta-\varpi)] = \rho\sin\psi\sec\varphi\frac{Z}{na^2},$$

$$\frac{d}{dt}[j\cos(\theta-\varpi)] = \rho\cos\psi\sec\varphi\frac{Z}{na^2}.$$

Ces résultats faciles, à vérifier encore à l'aide des équations (3) du n° 93, étaient à prévoir d'après la méthode suivie ; ils mettent en évidence la signification des diverses quadratures exigées, mais, encore une fois, ils ne sont valables que pour les perturbations du premier ordre.

CHAPITRE XVII.

DÉVELOPPEMENT NUMERIQUE DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES

111 Quand il s'agit d'édifier reellement la théorie d'une planete, on s'aperçoit bien vite qu'aucune des méthodes que nous avons esquissées dans les Chapitres precedents n'est entièrement satisfaisante en genéral

En effet, le développement analytique de la fonction perturbatrice et des inégalités qu'elle engendre, donne lieu a un trop grand nombre de termes, même si les excentricites et les inclinaisons sont petites; et lorsque, finalement, on réunit les termes qui dependent d'un même argument, on se trouve en présence d'une multitude de nombres dont la combinaison est fort incertaine, a moins d'avoir poussé le calcul plus loin qu'il n'est nécessaire en realité, puisque beaucoup de nombres séparément negligeables peuvent donner une somme sensible, et qu'inversement la somme de plusieurs nombres sensibles peut devenir négligeable Si les excentricites et les inclinaisons grandissent quelque peu, ces inconvenients s'exagèrent encore, la convergence des séries diminue, et bien vite, l'usage des developpements entièrement analytiques devient tout à fait impraticable De plus, quand il s'agit des inegalités d'ordre superieur au premier, les termes à prendre en considération et a combiner se multiplient d'une façon rebutante, et même dans les circonstances les plus favorables, le succès des plus longs efforts est loin d'être assuré

Pour eviter le desavantage des developpements purement analytiques, il est nécessaire de recourir aux methodes d'interpolation Cela peut se faire de plusieurs façons nous nous bornerons a exposer avec quelques details le mode de développement indiqué d'abord par Cauchy, qui paraît s'adapter le mieux au calcul numérique des coeffi-

cients des perturbations, quand on applique la méthode expliquée en dernier lieu, d'après les principes de Hansen, et nous montrerons en même temps comment on peut diriger ce calcul.

Soient M et M′ deux planètes de masses m et m', supposons-les animées de mouvements kepléricns, et soient, pour M par exemple, a, ε ou $\sin\varphi$, r, w, u, g le demi-grand axe, l'excentricité, le rayon vecteur, les anomalies vraie, excentrique et moyenne. En désignant par P et P′ les plans de leurs orbites, et par OI la direction de l'un des nœuds de P′ sur P, soient de plus ω et ω' les distances du nœud I aux périhélies des deux planètes, et J l'inclinaison de P′ sur P.

Si l'on appelle Δ la distance MM′, le premier problème que nous devons nous poser est celui du développement périodique par rapport aux deux angles g et g' des fonctions

$$\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p,$$

p prenant les valeurs $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.

Supposant d'abord que g reçoive une valeur numérique fixe, ces fonctions ne dépendent plus que de l'argument g', et c'est de ce point de vue que nous allons les envisager en premier lieu.

Soient pour un instant deux axes rectangulaires Ox', Oy', dans le plan P′, le premier passant par le périhélie de l'orbite de M′, et nommons x, y, x', y', les projections sur ces axes des rayons vecteurs r et r', de sorte que

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy').$$

On a immédiatement

$$x = \lambda r \sin(w + A), \qquad y = \mu r \sin(w + B),$$

en faisant

$$\lambda \sin(A - \omega) = \cos\omega', \qquad \mu \sin(B - \omega) = -\sin\omega',$$
$$\lambda \cos(A - \omega) = \cos J \sin\omega', \qquad \mu \cos(B - \omega) = \cos J \cos\omega'.$$

D'autre part

$$r' = a'(1 - \varepsilon' \cos u'),$$
$$x' = a'(\cos u' - \varepsilon'), \qquad y' = a' \cos\varphi' \sin u',$$

il vient par suite

$$\Delta^2 = P - Q\cos(u' - G) + R\cos^2 u',$$

P, Q, R, G étant déterminés par les relations numériques

$$P = r^2 + a'^2 + 2a'\varepsilon' x, \qquad R = a'^2\varepsilon'^2,$$
$$Q \sin G = 2a'y \cos\varphi', \qquad Q \cos G = 2a'(x + a'\varepsilon'),$$

et l'on doit remarquer la petitesse de R par rapport à P, Q.

On peut mettre Δ^2 sous la forme

$$\Delta^2 = p[1 - \sin\chi \cos(u' - \psi')][1 - \beta\cos(u' + \psi')],$$

en déterminant les nombres p, χ, β, ψ' comme il suit.

L'identification des deux expressions de Δ^2 donne

$$\frac{P}{p} = 1 - \beta\sin\chi\sin^2\psi', \qquad \frac{R}{p} = \beta\sin\chi,$$
$$\frac{Q}{p}\cos G = (\sin\chi + \beta)\cos\psi', \qquad \frac{Q}{p}\sin G = (\sin\chi - \beta)\sin\psi',$$

et ces relations reviennent à

$$\left\{\begin{aligned} &\sin(\psi' - G) = \frac{R\sin^2 2\psi'(P + R\sin^2\psi')}{Q^2\sin(\psi' + G)},\\ &p = P + R\sin^2\psi',\\ &\sin\chi = \frac{Q\sin(\psi' + G)}{p\sin 2\psi'}, \qquad \beta = \frac{Q\sin(\psi' - G)}{p\sin 2\psi'}.\end{aligned}\right.$$

La première de ces nouvelles équations est du troisième degré par rapport à $\tang^2\psi'$, mais d'après la petitesse observée de R, elle admet une solution ψ' voisine de G : c'est cette solution que l'on adoptera, en la déterminant par des approximations successives dont le mécanisme est évident. De cette valeur de ψ' découlent immédiatement p, χ, β, cette dernière quantité étant fort petite.

Si les excentricités et l'inclinaison J étaient nulles, on aurait

$$p = P = a^2 + a'^2, \qquad \beta = R = 0, \qquad Q = 2aa', \qquad \sin\chi = \frac{2aa'}{a^2 + a'^2},$$
$$\psi' = G = g + \omega - \omega',$$

si donc on fait encore

$$\psi = \psi' - g,$$

de sorte que

$$\Delta^2 = p[1 - \sin\chi\cos(g - u' + \psi)][1 - \beta\cos(g + u' + \psi)],$$

les quantités p, $\sin\chi$, ψ s'écarteront peu en général des valeurs

moyennes $a^2+a'^2$, $\frac{2aa'}{a^2+a'^2}$, $\omega-\omega'$, et la quantité β sera très petite, de l'ordre de ε'^2.

Choisissons l'angle χ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et faisons

$$\alpha = \operatorname{tang}\frac{\chi}{2},$$

ce nombre α aura pour valeur moyenne celui des rapports $\frac{a}{a'}$ ou $\frac{a'}{a}$ qui est inférieur à l'unité, et en posant encore

$$\mathrm{A} = \frac{2aa'}{p\sin\chi},$$

quantité de valeur moyenne égale à l'unité, nous pouvons écrire

$$\frac{aa'}{\Delta^2} = \mathrm{A}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(g-u'+\psi)}\,\frac{1}{1-\beta\cos(g+u'+\psi)}.$$

Soient alors, comme au Chapitre XIII, b_n^p les coefficients de Laplace qui correspondent au nombre α, on a immédiatement, n prenant toutes les valeurs entières, positives ou non,

$$\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p = \mathrm{A}^p[1-\beta\cos(g+u'+\psi)]^{-p}\,\Sigma\, b_n^p\, e^{in(g-u'+\psi)},$$

et en développant le second facteur suivant les puissances de la petite quantité β, il vient finalement

$$\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p = \Sigma\,\mathrm{B}_n^p\, e^{in(g-u')},$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_n^p = {} & \mathrm{A}^p b_n^p e^{in\psi}\\ & + \frac{p}{2}\beta\mathrm{A}^p\left[b_{n-1}^p e^{i[n\psi-2(g+\psi)]} + b_{n+1}^p e^{i[n\psi+2(g+\psi)]}\right]\\ & + \frac{p(p+1)}{2\cdot 4}\beta^2\mathrm{A}^p\left[b_{n-2}^p e^{i[n\psi-4(g+\psi)]} + 2b_n^p e^{in\psi} + b_{n+2}^p e^{i[n\psi+4(g+\psi)]}\right]\\ & + \ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

la loi de ce développement est évidente.

Imaginons maintenant que l'on ait donné à g les valeurs

$$g_0 = 0,\qquad g_1 = \frac{2\pi}{k},\qquad g_2 = 2g_1,\qquad \ldots,\qquad g_{k-1} = (k-1)g_1,$$

en désignant par k un nombre entier positif, pair de préférence, et soient $(B_n^p)_0$, $(B_n^p)_1$, $(B_n^p)_2$, ..., les valeurs correspondantes du coefficient B_n^p. Ce coefficient est une fonction périodique de l'argument g, qui peut se développer sous la forme $\Sigma B_{n,q}^p e^{iqg}$, q étant un entier quelconque, et l'on a, comme on sait, en appelant pour un instant q' les entiers congrus à q suivant le module k,

$$k \Sigma B_{n,q'}^p = (B_n^p)_0 e^{-iqg_0} + (B_n^p)_1 e^{-iqg_1} + \dots + (B_n^p)_{k-1} e^{-iqg_{k-1}}$$

Mais nous savons aussi que le coefficient $B_{n,q}^p$ sera, par rapport aux excentricités et à l'inclinaison d'un degré égal à la valeur absolue de q, en choisissant convenablement le nombre k, on pourra donc déterminer par la formule précédente les coefficients $B_{n,q}^p$, pour les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ de q, jusqu'à ce qu'ils deviennent insensibles, à un certain degré d'approximation fixé. On aura alors le développement périodique par rapport aux deux arguments g et u'

$$\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p = \Sigma B_{n,q}^p e^{i(n+q)g - inu'}$$

Il ne reste plus qu'à faire apparaître g' à la place de u' pour avoir le développement cherché en fonction des deux anomalies moyennes g et g', or, d'après une formule établie au n° 81, on a, en faisant usage des fonctions de Bessel, que nous savons calculer, et désignant par q' un entier quelconque,

$$e^{-inu'} = \sum \frac{n}{q'} J_{q'-n}(q'\varepsilon') e^{-q'g'},$$

il faut d'ailleurs convenir que dans le cas $q' = 0$, le terme correspondant de la somme du second membre doit être pris égal à 1 si $n = 0$, à $-\frac{\varepsilon'}{2}$ si $n = \pm 1$, à zéro pour toutes les autres valeurs de n. Sous le bénéfice de cette convention, nous avons donc finalement, en remplaçant $n + q$ par q

$$\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p = \sum \frac{n}{q'} J_{q'-n}(q'\varepsilon') B_{n,q-n}^p e^{i(qg - q'g')},$$

n, q, q' étant des entiers quelconques, il faut encore ajouter aux remarques déjà faites que les coefficients $J_{q'-n}$ sont par rapport à l'excentricité ε' d'un degré égal à la valeur absolue de $q' - n$

Comme le developpement ci-dessus est réel, les coefficients de $e^{i(qg-q'g')}$ et $e^{-i(qg-q'g')}$ seront des quantites imaginaires conjuguees, et le retour à la forme reelle, si on la prefere, sera immediat

Supposons en particulier que l'on veuille calculer la partie de $\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p$ qui est independante de g', on aura pour cette partie

$$\sum \left(B^p_{0,q} - \frac{\varepsilon}{2} B^p_{1,q-1} - \frac{\varepsilon'}{2} B^p_{-1,q+1}\right) e^{iqg}$$

En faisant ce calcul pour $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{2}$, on aura les fonctions nécessaires a la détermination des perturbations du premier ordre de la planète M dues à l'action de M', et indépendantes de g', et en particulier, par suite, de celles de ces perturbations qui sont seculaires Si l'on voulait se limiter strictement au calcul de ces perturbations seculaires, on pourrait, dans le même ordre d'idées, etablir sans peine les formules correspondantes nous y reviendrons a la fin du Chapitre, quoique cette limitation stricte paraisse peu justifiée pratiquement

Si l'on donne à l'indice j les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k-1$, et si la valeur absolue de $q-n$ est suffisamment inferieure à $\frac{k}{2}$, on peut écrire avec exactitude

$$B^p_{n,q-n} = \frac{1}{k} \Sigma (B^p_n)_j \, e^{i(n-q)g_j},$$

et par suite

$$\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p = \frac{1}{k} \sum \frac{n}{q'} J_{q-n}(q'\varepsilon') (B^p_n)_j \, e^{i(n-q)g_j} e^{i(qg-q'g')}$$

Si q et q' sont donnes, et que l'on veuille calculer specialement le coefficient de $e^{i(qg-q'g')}$ dans le developpement de $\left(\frac{aa'}{\Delta^2}\right)^p$, soit

$$\frac{1}{k} \sum \frac{n}{q'} J_{q'-n}(q'\varepsilon') (B^p_n)_j \, e^{i(n-q)g_j},$$

il pourra être plus convenable, au moins dans certains cas, de commencer la sommation en faisant varier l'indice n, contrairement a ce que nous avons fait ci-dessus

112 Examinons maintenant comment on doit adapter au calcul numérique la méthode exposée au n° 108, dans le Chapitre précédent,

et tout d'abord, cherchons les perturbations du premier ordre du mouvement de M dues à l'action de M'.

Reprenons l'ensemble des notations précédemment adoptées, sauf que nous conserverons les lettres g, g' pour désigner les arguments $nt+g_0$, $n't+g'_0$, et que nous remplacerons μ' par $\frac{\mu'}{2}$, c'est-à-dire que nous aurons dorénavant

$$\mu' = \frac{m'(1+\varkappa)}{1+m}\sqrt{\frac{a}{a'}}$$

La fonction W doit être réduite ici, pour le calcul de $\frac{\partial W}{\partial g}$ et $b\frac{\partial W}{\partial b}$ (plus exactement, pour le calcul des parties de ces fonctions qui sont du premier ordre), à

$$W = \mu' n^2 a^2 \left[\frac{\sqrt{aa'}}{\Delta} - \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho}{\rho'^2}\cos H\right],$$

les différentes coordonnées recevant partout, comme dans ce qui suit, leurs valeurs elliptiques.

Si l'on connaît le développement périodique de W par rapport à g, g', on a immédiatement aussi celui de $\frac{\partial W}{\partial g}$, par simple différentiation. Le développement de $\frac{\sqrt{aa'}}{\Delta}$ nous est donné par ce qui précède ; il faut tout d'abord le compléter par celui de la fonction $\frac{\rho}{\rho'^2}\cos H$.

Avec les constantes λ, μ, A, B du numéro précédent, on a

$$\cos H = \lambda\cos\psi'\sin(\psi+A) + \mu\sin\psi'\sin(\psi+B),$$

et par suite, en posant

$$\lambda\sin A = b, \qquad \mu\cos B\cos\varphi\cos\varphi' = b',$$
$$\mu\sin B\cos\varphi' = c, \qquad \lambda\cos A\cos\varphi = c',$$

il vient

$$\frac{\rho}{\rho'^2}\cos H = b\rho\cos\psi\frac{\cos\psi'}{\rho'^2} + b'\rho\sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\frac{\sin\psi'\,\text{séc}\,\varphi'}{\rho'^2}$$
$$+ c\rho\cos\psi\frac{\sin\psi'\,\text{séc}\,\varphi'}{\rho'^2} - c'\rho\sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\frac{\cos\psi'}{\rho'^2}.$$

Or, d'après le n° 81, on a

$$\rho\cos\psi = \Sigma P_q e^{iqg}, \qquad i\rho\sin\psi\sec\varphi = \Sigma Q_q e^{iqg},$$

$$\frac{\cos\psi}{\rho^2} = \Sigma q^2 P_q e^{iqg}, \qquad \frac{i\sin\psi\sec\varphi}{\rho^2} = \Sigma q^2 Q_q e^{iqg},$$

avec

$$P_0 = -\frac{3\varepsilon}{2}, \qquad Q_0 = 0, \qquad P_q = \frac{J'_q(q\varepsilon)}{q} = \frac{J_{q-1}(q\varepsilon) - J_{q+1}(q\varepsilon)}{2q},$$

$$Q_q = \frac{J_q(q\varepsilon)}{q\varepsilon} = \frac{J_{q-1}(q\varepsilon) + J_{q+1}(q\varepsilon)}{2q},$$

et l'on a des expressions analogues pour $\rho'\cos\psi'$, en accentuant les lettres P, Q, ε, g

Il en résulte immédiatement

$$\frac{\rho}{\rho'^2}\cos H = \Sigma q'^2 e^{i(qg-q'g')}[b P_q P'_{q'} + b' Q_q Q'_{q'} + i(c P_q Q'_{q'} + c' Q_q P'_{q'})],$$

on observera sur cette formule que, pour obtenir le développement semblable de $\frac{\rho'}{\rho^2}\cos H$, il suffira de changer le facteur q'^2 en q^2, et d'une façon générale, on vérifiera les propriétés déjà énoncées au n° 90 du développement de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice

Passons maintenant à la fonction $b\frac{\partial W}{\partial b}$, égale à $r\frac{\partial W}{\partial r}$, c'est-à-dire

$$\mu' n^2 a^2\sqrt{aa'}\left(\frac{r r'\cos H - r^2}{\Delta^3} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right),$$

en tirant cos H de la relation

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H,$$

on peut donc écrire

$$b\frac{\partial W}{\partial b} = \mu' n^2 a^2\left[-\frac{\sqrt{aa'}}{2\Delta} - \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\rho\cos H}{\rho'^2} + \left(\frac{a'}{a}\rho'^2 - \frac{a}{a'}\rho^2\right)\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^3}\right],$$

et pour former cette fonction, il suffira de profiter des développements déjà obtenus, et de multiplier successivement par ρ^2 et ρ'^2 le développement de $\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3}$, connu d'après le numéro précédent On a d'ailleurs (n° 81)

$$\rho^2 = \Sigma R_q e^{iqg},$$

avec

$$R_0 = 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2}, \qquad R_q = -\frac{2\varepsilon}{q} Q_q,$$

et une expression analogue pour ρ'^2.

Quant à la fonction $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$, elle est ici, d'après ce qu'on a déjà vu au n° 110,

$$\mu' n^2 a^2 \sin J \; \rho' \sin(\psi' + \omega') \left[\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3} - \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\rho'^3} \right],$$

or on a

$$\rho' \sin(\psi' + \omega') = \Sigma S'_{q'} e^{iq'g'}$$

avec

$$S'_q = \sin\omega' P'_{q'} - i \cos\omega' \cos\varphi Q'_{q'},$$

et aussi

$$\frac{\sin(\psi' + \omega')}{\rho'^2} = \Sigma q'^2 S'_{q'} e^{iq'g'},$$

le développement périodique de $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ est donc immédiat.

Si nous rappelons encore que l'on a, d'après le n° 109,

$$\frac{\cos^2\varphi - \rho^2}{e} = -\frac{5\varepsilon}{2} + \sum{}' \frac{2}{q} Q_q e^{iqg},$$

$$i\rho \sin\psi \operatorname{séc}\varphi (\cos^2\varphi + \rho) = \sum{}' \frac{2}{q} P_q e^{iqg},$$

la valeur $q = 0$ étant exclue de la sommation Σ', on voit maintenant que nous avons tous les éléments nécessaires pour calculer les fonctions P_1, P_2, P_3, Z, et par suite ω, β, α, σ, ζ.

On simplifie ce calcul dans une assez large mesure en le dirigeant de la façon suivante, entièrement équivalente aux procédés de Hansen. Les coefficients P_q et Q_q ayant toujours la même signification, supposons $q \neq 0$, et faisons

$$K_q = \frac{1}{2}\left(\frac{P_q}{P_1} + \frac{Q_q}{Q_1}\right),$$

de sorte qu'en particulier $K_1 = 1$, $K_{-1} = 0$, généralement, ces quantités sont des fonctions de l'excentricité ε, et pour $q > 0$, les parties principales de K_q et K_{-q} sont respectivement

$$\frac{1}{q!}\left(\frac{q\varepsilon}{2}\right)^{q-1}, \qquad -\frac{\varepsilon^2}{8}\frac{(q-1)}{q+1!}\left(\frac{q\varepsilon}{2}\right)^{q-1},$$

par suite les coefficients K_{-2}, K_{-3}, K_{-4}, sont tres petits et presque tous négligeables, et c'est la le principal avantage de leur introduction Posons encore

$$F = \Sigma' K_q e^{iqg}, \qquad G = \Sigma' \frac{2 K_q}{q} e^{iqg},$$

$$F' = \Sigma' K_q e^{-iqg}, \qquad G' = \Sigma' \frac{2 K_q}{q} e^{-iqg},$$

on peut alors ecrire

$$\rho \cos\psi = -\frac{3\varepsilon}{2} + P_1(F + F'), \qquad i\rho \sin\psi \sec\varphi = Q_1(F - F'),$$

$$\frac{\cos^2\varphi - \rho^2}{\varepsilon} = -\frac{5\varepsilon}{2} + Q_1(G + G'), \qquad i\rho \sin\psi \sec\varphi(\cos^2\varphi + \rho) = P_1(G - G')$$

Portons ces valeurs dans les formules (22), (24) et (25 *bis*) du n° 108, en n'oubliant pas qu'il ne s'agit que de la détermination des perturbations du premier ordre, posons encore

$$F_1 = F - \frac{3\varepsilon}{4P_1}, \qquad F_2 = F + \frac{\varepsilon}{4P_1}, \qquad G_2 = G - \frac{5\varepsilon}{4Q_1},$$

$$F'_1 = F' - \frac{3\varepsilon}{4P_1}, \qquad F'_2 = F' + \frac{\varepsilon}{4P_1}, \qquad G'_2 = G' - \frac{5\varepsilon}{4Q_1},$$

puis

$$B_1 = -\frac{1}{na^2}\frac{\partial W}{\partial g},$$

$$B_2 = \frac{4P_1Q_1 \sec^2\varphi}{na^2}\left(G_2\frac{\partial W}{\partial g} - iF_2 b\frac{\partial W}{\partial b}\right),$$

$$B'_2 = \frac{4P_1Q_1 \sec^2\varphi}{na^2}\left(G'_2\frac{\partial W}{\partial g} + iF'_2 b\frac{\partial W}{\partial b}\right),$$

$$C = \frac{2iP_1Q_1}{na^2}F_1\frac{\partial W}{\partial \zeta}, \qquad C' = -\frac{2iP_1Q_1}{na^2}F'_1\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

on trouve alors sans aucune peine

$$\beta = \int B_1\,dt + \frac{\varepsilon}{4P_1}\left(\int B_2\,dt + \int B'_2\,dt\right),$$

$$\omega = 3\int B_1\,dt + F\int B'_2\,dt + F'\int B_2\,dt,$$

$$\zeta = F_1\int C'\,dt + F'_1\int C\,dt,$$

et en rappelant que

$$\alpha = \frac{\omega + \beta}{2}, \qquad \sigma = \int \omega n\,dt,$$

nous avons l'ensemble des formules qui correspondent au calcul des perturbations du premier ordre du mouvement de la planète M Les quadratures indiquées, sauf la dernière, sont accompagnées implicitement de constantes arbitraires β_1, β_2, β'_2, γ, γ', B_1, β_1 sont des quantités réelles, tandis que B_2 et B'_2, β_2 et β'_2, C et C', γ et γ', F et F', G et G' sont respectivement conjuguées le calcul se trouve simplifié de ce fait

D'après la relation (β) du n° 108, on pourra vérifier que l'on a, au même degré d'approximation,

$$2\frac{d\alpha}{n\,dt} = \frac{\partial F}{\partial g}\int B'_2\,dt + \frac{\partial F'}{\partial g}\int B_2\,dt,$$

mais l'emploi direct de cette formule pour calculer α ne paraît pas recommandable, bien que ce soit le procédé de Hansen

Pour tenir compte enfin de la partie $\varkappa n^2 a^2 \frac{1}{\rho}$ de la fonction perturbatrice générale, nous avons vu précédemment qu'il suffisait d'augmenter ω de $2\varkappa$

Quand on aura ainsi déterminé l'influence des diverses planètes perturbatrices, on choisira les diverses constantes β_1, β_2, β'_2, γ, γ', et aussi $\varkappa$ comme nous l'avons dit, c'est-à-dire de façon que ω et σ n'aient pas de partie constante, en même temps que les fonctions σ et ζ n'auront aucun terme périodique en e^{iq} et e^{-iq} A la vérité, on a supposé connue a l'avance la quantité $\varkappa$ mais on peut admettre qu'elle a été fournie par une première approximation rapide, et dans ces conditions, il pourra subsister dans α un terme constant très petit

113 Indiquons maintenant la marche à suivre pour déterminer les perturbations du second ordre, dont nous désignerons les différentes parties, sans distinction, par $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\omega$, $\delta\sigma$, $\delta\zeta$, en conservant les notations α, β, ω, σ, ζ pour les perturbations du premier ordre, et de même, les perturbations du premier ordre de la planète M' seront α', β', ω', σ', ζ' On a d'ailleurs généralement les relations

$$\delta\alpha = \frac{1}{2}(\delta\omega + \delta\beta), \qquad \delta\sigma = \int \delta\omega\, n\,dt$$

En premier lieu, on devra, sans modifier ω et β, compléter les

valeurs de α et σ en leur ajoutant les quantités

$$\delta\alpha = \beta\,\frac{\omega - \beta}{2}, \qquad \delta\sigma = \int (\sigma + \beta)\,\frac{\omega - \beta}{2}\,n\,dt,$$

en négligeant des termes du troisième ordre, ceci peut s'écrire encore

$$\delta\alpha = \alpha\beta - \beta^2, \qquad \delta\sigma = \int (\alpha^2 - \beta^2)\,n\,dt$$

En second lieu, dans la dernière expression donnée pour ω, on devra tenir compte de la perturbation σ de g dans les fonctions F et F′, en faisant

$$\delta\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial g}\int B'_2\,dt + \frac{\partial F'}{\partial g}\int B_2\,dt\right)\sigma,$$

c'est-à-dire plus simplement, d'après une remarque faite ci-dessus,

$$\delta\omega = 2\sigma\,\frac{d\alpha}{n\,dt}.$$

Il n'y a rien d'analogue à faire pour ζ, comme le montre la formule (24) du n° 108.

En troisième lieu, remontons aux expressions complètes (25) et (25 *ter*) du n° 108 pour les fonctions P_1, P_2, P_3, Z

P_1, P_2, P_3 contiennent, comme nous l'avons déjà fait observer, des termes en α et β dont il faut tenir compte tout d'abord.

En nous bornant toujours aux termes nécessaires au calcul actuel, on a

$$\frac{\partial P_1}{\partial\alpha} = \frac{\varepsilon\,\text{séc}^2\varphi}{na^2}\left(\rho\cos\psi\,\frac{\partial W}{\partial g} + \sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\,b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right),$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial\alpha} = \frac{2\,\text{séc}^2\varphi}{na^2}\left(\rho\cos\psi\,\frac{\partial W}{\partial g} + \sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\,b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right),$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial\alpha} = \frac{2\,\text{séc}^2\varphi}{na^2}\left[\rho\sin\psi\cos\varphi\,\frac{\partial W}{\partial g} - (\cos\psi + \varepsilon)\,b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right],$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial\beta} = \frac{2\,\text{séc}^2\varphi}{na^2}\left(\rho\,\frac{\partial W}{\partial g} - \varepsilon\sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\,b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right),$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial\beta} = \frac{4\,\text{séc}^2\varphi}{na^2}\left[\rho^2\,\text{séc}^2\varphi(\cos\psi + \varepsilon)\,\frac{\partial W}{\partial g} + \sin\psi\,\text{séc}\,\varphi(\rho - 1)\,b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right],$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial\beta} = \frac{4\,\text{séc}^2\varphi}{na^2}\left(\rho^2\sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\,\frac{\partial W}{\partial g} - \varepsilon\rho\sin^2\psi\,\text{séc}^2\varphi\,b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right);$$

et l'on peut écrire encore, comme on le vérifie sans peine,

$$\frac{\partial P_i}{\partial \beta} = 2\left(P_i - \frac{\partial P_i}{\partial \alpha}\right) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

D'après les formules (22), on a donc

$$\frac{d(\delta\beta)}{dt} = 2\beta\left(-P_1 + \frac{\varepsilon}{2}P_2\right) = 2\beta\frac{d\beta}{dt},$$

et par suite

$$\delta\beta = \beta^2,$$

plus exactement, il conviendra de prendre pour $\delta\beta$ la valeur de β^2 privée de son terme constant, si l'on effectue toutes les quadratures que nous allons rencontrer maintenant sans addition de constantes arbitraires nouvelles, en se contentant d'ajouter aux constantes primitives β_1, β_2, ... des accroissements $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$, ... dont on disposera comme on a fait de β_1, β_2, ...

Il vient ensuite pour la partie correspondante de $\delta\omega$

$$\delta\omega = 2\left[-3\int P_1\beta\,dt + \left(\rho\cos\psi + \frac{3\varepsilon}{2}\right)\int P_2\beta\,dt + \rho\sin\psi\sec\varphi\int P_3\beta\,dt\right]$$
$$+\rho\cos\psi\int\frac{\partial P_2}{\partial\alpha}(\alpha - 2\beta)\,dt + \rho\sin\psi\sec\varphi\int\frac{\partial P_3}{\partial\alpha}(\alpha - 2\beta)\,dt$$

En se reportant au numéro précédent, la première ligne de cette expression s'écrit

$$\delta\omega = 6\int B_1\beta\,dt + 2F\int B'_2\beta\,dt + 2F'\int B_2\beta\,dt,$$

quant à la seconde, il est facile de lui donner une forme analogue. A cet effet, remarquons que l'on a (nº 81)

$$\cos\psi + \varepsilon = \cos^2\varphi\,\Sigma' q\,Q_q\,e^{iqg}, \qquad i\sin\psi\cos\varphi = \Sigma' q\,P_q\,e^{iqg},$$

faisons alors

$$H_q = \frac{1}{2}\left(\frac{P_q}{Q_1} + \frac{Q_q\cos^2\varphi}{P_1}\right),$$

puis

$$M_1 = -\frac{3\varepsilon}{4Q_1} + \Sigma' H_q\,e^{iqg}, \qquad M_2 = \Sigma' q\,H_q\,e^{iqg},$$

$$M'_1 = -\frac{3\varepsilon}{4Q_1} + \Sigma' H_q\,e^{-iqg}, \qquad M'_2 = \Sigma' q\,H_q\,e^{-iqg},$$

de sorte que l'on a les nouvelles expressions

$$\rho \cos\psi = Q_1(M_1 + M'_1), \qquad i\rho \sin\psi \cos\varphi = P_1(M_1 - M'_1),$$

et aussi

$$\cos\psi + \varepsilon = P_1(M_2 + M'_2), \qquad i \sin\psi \sec\varphi = Q_1(M_2 - M'_2)$$

En mettant ces valeurs dans $\frac{\partial P_2}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial P_3}{\partial \gamma}$, tandis que l'on conserve pour les facteurs $\rho\cos\psi$, $i\rho\sin\psi\,\text{séc}\,\varphi$ extérieurs aux signes d'intégration les expressions $P_1(F_1+F'_1)$, $Q_1(F_1-F'_1)$, il vient pour la partie considérée de $\delta\omega$

$$\begin{aligned}\delta\omega = \; & F_1 \int \frac{4P_1Q_1\sec^2\varphi}{na^2}\left(M'_1\frac{\partial W}{\partial g} + iM'_2\, b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right)(\alpha-2\beta)\,dt \\ & + F'_1\int \frac{4P_1Q_1\sec^2\varphi}{na^2}\left(M_1\frac{\partial W}{\partial g} - iM_2\, b\,\frac{\partial W}{\partial b}\right)(\alpha-2\beta)\,dt\end{aligned}$$

On peut remplacer, si l'on veut, $\alpha - 2\beta$ par $\frac{\omega - 3\beta}{2}$

Il faut encore prendre en considération les termes en ζ^2 de P_1, P_2, P_3, ils donnent immédiatement

$$\delta\beta = 0, \qquad \delta\omega = 3\rho\cos\psi\int\rho\sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\,\frac{\zeta^2}{\rho^5}\,n\,dt - 3\rho\sin\psi\,\text{séc}\,\varphi\int\rho\cos\psi\,\frac{\zeta^2}{\rho^5}\,n\,dt,$$

soit encore

$$\delta\omega = F_1\int 6inP_1Q_1F'_1\frac{\zeta^2}{\rho^5}\,dt + F'_1\int - 6inP_1Q_1F_1\frac{\zeta^2}{\rho^5}\,dt$$

On a d'ailleurs, avec une approximation généralement suffisante et facile à augmenter,

$$\frac{1}{\rho^5} = 1 + 5\varepsilon^2 + \frac{5\varepsilon}{2}(e^{ig} + e^{-ig}) + 5\varepsilon^2(e^{2ig} + e^{-2ig}) + \ldots$$

De la même façon, il faut compléter la fonction $\frac{Z}{na^2}$ par l'addition du terme

$$n\zeta\left(\frac{1}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho^3}\frac{a^3}{b^3}\right),$$

qui se réduit à

$$3n\zeta\left(\frac{\varepsilon\sin\psi\sec\varphi}{\rho^4}\sigma - \frac{1}{\rho^3}\sigma\right),$$

d'après la valeur connue de $\frac{\partial\rho}{\partial g}$.

Il en resulte donc

$$\delta\zeta = \quad F_1 \int -6in P_1 Q_1 F'_1 \left(\frac{\varepsilon \sin\psi \sec\varphi}{\rho^4} \sigma\zeta - \frac{1}{\rho^3} \alpha\zeta \right) dt$$
$$+ F'_1 \int \quad 6in P_1 Q_1 F_1 \left(\frac{\varepsilon \sin\psi \sec\varphi}{\rho^4} \sigma\zeta - \frac{1}{\rho^3} \alpha\zeta \right) dt,$$

avec

$$\frac{1}{\rho^3} = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\varepsilon(e^{ig} + e^{-ig}) + \frac{9\varepsilon^2}{4}(e^{2ig} + e^{-2ig}) + \ldots,$$
$$\frac{i\varepsilon \sin\psi \sec\varphi}{\rho^4} = \frac{\varepsilon}{2}(e^{ig} - e^{-ig}) + \frac{3}{2}\varepsilon^2(e^{2ig} - e^{-2ig}) + \ldots$$

En quatrieme lieu, il faut donner aux fonctions B_1, B_2, B_3, C, C', qui figurent dans les expressions de β, ω, ζ, et qui definissent l'action de la planète M' sur le mouvement de M, les accroissements δB_1, δB_2, ..., que prennent ces fonctions, quand on y tient compte des perturbations du premier ordre σ, α, ζ, σ', α', ζ', de M et de M' Si Φ designe l'une quelconque de ces fonctions, on a donc

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial g}\sigma + \frac{\partial\Phi}{\partial g'}\sigma' - b\frac{\partial\Phi}{\partial b}\alpha - b'\frac{\partial\Phi}{\partial b'}\alpha' + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\zeta + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'}\zeta',$$

et il en résulte

$$\delta\beta = \int \delta B_1\, dt + \frac{\varepsilon}{4B_1}\left(\int \delta B_2\, dt + \int \delta B'_2\, dt\right),$$

avec des formules analogues pour $\delta\omega$, $\delta\zeta$

Les derivées $\frac{\partial\Phi}{\partial g}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial g'}$ resultent immediatement de l'expression même de Φ, puisque cette quantite apparaît comme une fonction explicite de g et de g'

Les autres derivées $b\frac{\partial\Phi}{\partial b}$, ... proviennent uniquement des fonctions $\frac{\partial W}{\partial g}$, $b\frac{\partial W}{\partial b}$, $\frac{\partial W}{\partial\zeta}$, dont Φ est une combinaison lineaire, et il suffit d'indiquer leurs valeurs quand on remplace Φ précisément par une de ces fonctions. Et comme ces fonctions sont homogènes par rapport a b, b', ζ, ζ', les deux premières de degre -1, la troisieme du degré -2, on a simplement, ici,

$$b'\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right) = -\quad \frac{\partial W}{\partial g} - b\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right),$$
$$b'\frac{\partial}{\partial b'}\left(b\frac{\partial W}{\partial b}\right) = -b\frac{\partial W}{\partial b} - b\frac{\partial}{\partial b}\left(b\frac{\partial W}{\partial b}\right),$$
$$b'\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right) = -2\frac{\partial W}{\partial\zeta} - b\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)$$

Les dérivées $b\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)$, $\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)$, $\frac{\partial}{\partial\zeta'}\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)$ sont égales à $\frac{\partial}{\partial g}\left(b\frac{\partial W}{\partial b}\right)$, $\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)$, $\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta'}\right)$, et par suite se calculent immédiatement en partant des expressions déjà connues de $b\frac{\partial W}{\partial b}$, $\frac{\partial W}{\partial\zeta}$, et y joignant, d'après le n° 109,

$$\frac{\partial W}{\partial\zeta'} = \mu' n^2 a^2 \sin J \rho \sin(\psi+\omega)\left[\left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\rho'^3} - \frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3}\right],$$

cette fonction, comme les suivantes, est facile à calculer d'après les indications déjà données

La dérivée $b\frac{\partial}{\partial b}\left(b\frac{\partial W}{\partial b}\right)$ est directement égale, d'après l'expression de W, à

$$\mu' n^2 a^2\sqrt{aa'}\left[\frac{3(rr'\cos H - r^2)^2}{\Delta^5} + \frac{rr'\cos H - 2r^2}{\Delta^3} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right]$$

ou encore, en remplaçant $2rr'\cos H$ par $r^2 + r'^2 - \Delta^2$, à

$$\mu' n^2 a^2\left[\frac{\sqrt{aa'}}{4\Delta} - \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\rho\cos H}{\rho'^2} - \frac{a'}{a}\rho'^2\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3} + \frac{3}{4}\left(\frac{a'}{a}\rho'^2 - \frac{a}{a'}\rho^2\right)^2\frac{(aa')^{\frac{5}{2}}}{\Delta^5}\right].$$

De la même façon, on a

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(b\frac{\partial W}{\partial b}\right) = b\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right) = 3\mu' n^2 a^2 \sin J \rho' \sin(\psi'+\omega')(aa')^{\frac{3}{2}}\frac{rr'\cos H - r^2}{\Delta^5}$$

$$= \frac{3}{2}\mu' n^2 a^2 \sin J \rho' \sin(\psi'+\omega') \times \left[-\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3} + \left(\frac{a'}{a}\rho'^2 - \frac{a}{a'}\rho^2\right)\frac{(aa')^{\frac{5}{2}}}{\Delta^5}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta'}\left(b\frac{\partial W}{\partial b}\right) = b\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta'}\right) = \mu' n^2 a^2 \sin J \rho \sin(\psi+\omega)$$

$$\times\left[\left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\rho'^3} + \frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{a'}{a}\rho'^2 - \frac{a}{a'}\rho^2\right)\frac{(aa')^{\frac{5}{2}}}{\Delta^5}\right].$$

Enfin

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta^2} = \mu' n^2 a^2\left[-\frac{a}{a'}\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3} + 3\sin^2 J \rho'^2 \sin^2(\psi'+\omega')\frac{(aa')^{\frac{5}{2}}}{\Delta^5}\right],$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta\,\partial\zeta'} = \mu' n^2 a^2\left[\cos J\frac{(aa')^{\frac{3}{2}}}{\Delta^3} - \cos J\left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\rho'^3}\right.$$

$$\left. - 3\sin^2 J \rho \sin(\psi+\omega)\rho' \sin(\psi'+\omega')\frac{(aa')^{\frac{5}{2}}}{\Delta^5}\right].$$

En cinquième et dernier lieu, il ne reste plus qu'à tenir compte de la partie $\varkappa n^2 a^2 \left(\frac{a}{b}\rho - \frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{\rho^3}\frac{a^3}{b^3}\right)$ de la fonction W En raison de ce complement, il faut d'abord inclure dans les fonctions $\frac{\partial W}{\partial g}$ et $b\frac{\partial W}{\partial b}$ qui figurent dans B_1, B_2, B'_2, les quantités

$$-\frac{\varkappa n^2 a^2}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial g} \quad \text{ou} \quad -\frac{\varkappa n^2 a^2 \varepsilon \sin\varphi \sec\psi}{\rho^2}, \quad \text{et} \quad -\frac{\varkappa n^2 a^2}{\rho},$$

tout ce que nous avons dit ci-dessus s'applique alors sans modification, en augmentant les dérivees $b\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)$ et $b\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial W}{\partial b}\right)$ de ces mêmes quantités changées de signe

Il faut de plus augmenter dans C et C′ la fonction $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ de $-\varkappa n^2 a^2 \frac{\zeta}{\rho^3}$

S'il devenait nécessaire de tenir compte des termes du troisième ordre par rapport aux masses perturbatrices, on suivrait les mêmes principes les calculs deviendraient extrêmement prolixes, mais il serait assez facile de les limiter à leurs parties vraiment utiles, en négligeant tous les termes sans influence réelle

114 Pour terminer ce Chapitre, nous allons expliquer la methode que l'on peut suivre pour determiner numériquement, d'apres les principes indiques tout d'abord par Gauss, les perturbations seculaires du premier ordre des éléments osculateurs du mouvement d'une planete M

Soit m la masse de cette planète, appelons j et θ l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant par rapport au plan fixe Oxy, $\varepsilon = \sin\varphi$ l'excentricité, ϖ la longitude du perihélie, a le demi-grand axe, n le moyen mouvement lié a a par la relation $n^2 a^3 = f(1+m)$, l la longitude moyenne, v, u, g les trois anomalies vraie, excentrique et moyenne, r le rayon vecteur,

Employons les mêmes notations accentuees pour la planète M′, dont il s'agit de déterminer l'influence sur les variations séculaires des eléments de M

Nommons $\frac{fm'}{a'^2}X$, $\frac{fm'}{a'^2}Y$, $\frac{fm'}{a'^2}Z$ les projections de la force perturbatrice sur le rayon vecteur OM, la perpendiculaire OP à ce rayon vecteur menée dans le plan de l'orbite de M, et la normale ON a ce

plan En faisant encore $\alpha = \frac{a}{a'}$, les equations du n° 66 s'écrivent sans peine sous la nouvelle forme, plus propre au calcul actuel,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dj}{dt} &= \frac{m' n \alpha^2 \sec\varphi}{1+m} \cos(v + \varpi - \theta) \frac{r}{a} \mathrm{Z}, \\
\sin j \frac{d\theta}{dt} &= \frac{m' n \alpha^2 \sec\varphi}{1+m} \sin(v + \varpi - \theta) \frac{r}{a} \mathrm{Z}, \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{m' n \alpha^2 \cos\varphi}{1+m} [\sin v\, \mathrm{X} + (\cos u + \cos v) \mathrm{Y}], \\
\sin\varphi \frac{d\varpi'}{dt} &= \frac{m' n \alpha^2 \cos\varphi}{1+m} \left[-\cos v\, \mathrm{X} + \left(1 + \frac{r}{a} \sec^2\varphi\right) \sin v\, \mathrm{Y} \right], \\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{d\varpi'}{dt} + 2 \sin^2 \frac{j}{2} \frac{d\theta}{dt}, \\
\frac{dn}{dt} &= -3 \frac{m' n^2 \alpha^2 \sec\varphi}{1+m} \left(\sin\varphi \sin v\, \mathrm{X} + \frac{a}{r} \cos^2\varphi\, \mathrm{Y} \right), \\
\frac{dl}{dt} - n &= -2 \frac{m' n \alpha^2}{1+m} \frac{r}{a} \mathrm{X} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \frac{d\varpi'}{dt} + 2 \sin^2 \frac{j}{2} \frac{d\theta}{dt},
\end{aligned}\right.$$

ce sont les equations du mouvement de M, d'apres la méthode de la variation des elements

Si l'inclinaison j était de l'ordre des perturbations (c'est le cas de la Terre, si le plan fondamental Oxy est celui de l'écliptique à une certaine époque), les termes en $2 \sin^2 \frac{j}{2} \frac{d\theta}{dt}$ disparaîtraient des formules ci-dessus, et en faisant $p = \sin j \sin\theta$, $q = \sin j \cos\theta$, on aurait

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m' n \alpha^2 \sec\varphi}{1+m} \sin(v + \varpi) \mathrm{Z},$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{m' n \alpha^2 \sec\varphi}{1+m} \cos(v + \varpi) \mathrm{Z},$$

mais nous ne nous occuperons pas davantage de ce cas

Soit σ un quelconque des elements, et

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathrm{S}$$

l'équation correspondante Donnons aux différents éléments j, θ, ε, ϖ, n, leurs valeurs constantes de premiere approximation, et prenons aussi l sous la forme $nt + l_0$, en designant par l_0 une constante, faisons de même pour la planete perturbatrice La fonction S est développable suivant les puissances de e^{ig}, $e^{ig'}$, et si S_0 est sa partie

constante, l'inégalité séculaire du premier ordre de σ, soit $t\delta\sigma$, est définie par l'équation

$$d\sigma = S_0$$

Nous savons d'ailleurs que le coefficient δn est nécessairement nul, et nous appellerons δl la partie constante du second membre de la dernière équation du groupe ci-dessus, la partie séculaire de l étant $(n + \delta l)\,t$

D'autre part, d'après les propriétés des fonctions périodiques, on peut écrire

$$S_0 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} S\,dg\,dg',$$

et par suite, il suffit de calculer ces intégrales pour résoudre le problème proposé

Il est plus avantageux d'introduire comme variables d'intégration les anomalies excentriques, et comme on a

$$dg = \frac{r}{a}\,du,$$

il vient

$$S_0 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} S\,\frac{r}{a}\,\frac{r'}{a'}\,du\,du'$$

L'intégration par rapport à u' peut s'effectuer analytiquement, comme nous allons le voir si donc on observe que u' ne figure dans les fonctions S que par l'intermédiaire de X, Y, Z, et que l'on fasse

$$2\pi X_0 = \int_0^{2\pi} X\,\frac{r'}{a'}\,du', \qquad 2\pi Y_0 = \int_0^{2\pi} Y\,\frac{r'}{a'}\,du', \qquad 2\pi Z_0 = \int_0^{2\pi} Z\,\frac{r'}{a'}\,du',$$

il restera à calculer des intégrales de la forme

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\,du,$$

la fonction Q dépendant seulement de u

Comme Q est une fonction périodique de u, on peut déterminer simplement Q_0 par application des méthodes de l'interpolation périodique si l'on donne à u des valeurs particulières en nombre k, formant une progression arithmétique de raison $\frac{2\pi}{k}$, et que l'on appelle

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les valeurs correspondantes de la fonction Q, on aura, avec une approximation facile à apprécier, et déjà grande pour de petites valeurs de k,

$$Q_0 = \frac{1}{k}(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k).$$

Avec cette notation, il viendra donc

$$\begin{cases} \delta j = \dfrac{m' n \alpha^2 \sec\varphi}{1+m}\left[\cos(v+\varpi-\theta)\dfrac{r^2}{a^2}Z_0\right]_0, \\ \sin j\,\delta\theta = \dfrac{m' n \alpha^2 \sec\varphi}{1+m}\left[\sin(v+\varpi-\theta)\dfrac{r^2}{a^2}Z_0\right]_0, \\ \delta\varepsilon = \dfrac{m' n \alpha^2 \cos\varphi}{1+m}\left[\quad \dfrac{r}{a}\sin v\,X_0 + \dfrac{r}{a}(\cos u + \cos v)\,Y_0\right]_0, \\ \sin\varphi\,\delta\varpi' = \dfrac{m' n \alpha^2 \cos\varphi}{1+m}\left[-\dfrac{r}{a}\cos v\,X_0 + \dfrac{r}{a}\sin v\left(1 + \dfrac{r}{a}\sec^2\varphi\right)Y_0\right]_0, \\ \delta\varpi = \delta\varpi' + 2\sin^2\dfrac{J}{2}\,\delta\theta, \\ \delta l = -\dfrac{2 m' n \alpha^2}{1+m}\left[\dfrac{r^2}{a^2}X_0\right]_0 + 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\,\delta\varpi' + 2\sin^2\dfrac{J}{2}\,\delta\theta, \end{cases}$$

et comme $\delta n = 0$, on aura l'équation de condition

$$\left[\sin\varphi\frac{r}{a}\sin v\,X_0 + \cos^2\varphi\,Y_0\right]_0 = 0,$$

qui servira de vérification partielle.

Le problème est ainsi ramené au calcul des intégrales X_0, Y_0, Z_0, pour chaque valeur particulière donnée à u. Or nous savons encore que pour déterminer X, Y, Z, nous pouvons ici réduire la fonction perturbatrice à sa partie principale $\frac{fm'}{\Delta}$, en désignant par Δ la distance MM' : la partie complémentaire, développée comme fonction périodique de g', ne contient en effet aucun terme indépendant de g'.

Soient alors deux axes rectangulaires Ox', Oy' dans le plan Π' de l'orbite de M', le premier passant par le périhélie de cette orbite, et soit Oz' un troisième axe perpendiculaire à Ox', Oy' : le point M' a pour coordonnées par rapport à ces axes

$$x' = r'\cos v' = a'(\cos u' - \varepsilon'), \qquad y' = r'\sin v' = a'\cos\varphi'\sin u', \qquad z' = 0,$$

et l'on peut ajouter

$$r' = a'(1 - \varepsilon'\cos u').$$

Soient maintenant λ, μ, ν les cosinus des angles que fait le rayon vecteur OM avec Ox', Oy', Oz', et λ', μ', ν', puis λ'', μ'', ν'' les quantités analogues pour la perpendiculaire OP à OM menée dans le plan Π de l'orbite de M, et pour la normale ON à ce plan. Les coordonnées de M par rapport aux axes Ox', Oy', Oz' sont λr, μr, νr, et l'on a

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2r(\lambda x' + \mu y')$$

de plus les projections de la force perturbatrice sur Ox', Oy', Oz' sont

$$\frac{fm'}{\Delta^3}(x' - \lambda r), \qquad \frac{fm'}{\Delta^3}(y' - \mu r), \qquad \frac{fm'}{\Delta^3}(-\nu r),$$

de sorte qu'il vient

$$X = \frac{a'^2}{\Delta^3}(\lambda x' + \mu y' - r), \qquad Y = \frac{a'^2}{\Delta^3}(\lambda' x' + \mu' y'), \qquad Z = \frac{a'^2}{\Delta^3}(\lambda'' x' + \mu'' y'),$$

et

$$2\pi X_0 = \int_0^{2\pi} \frac{a' r' \, du'}{\Delta^3}(\lambda x' + \mu y' - r), \qquad 2\pi Y_0 = \int_0^{2\pi} \frac{a' r' \, du'}{\Delta^3}(\lambda' x' + \mu' y'),$$

$$2\pi Z_0 = \int_0^{2\pi} \frac{a' r' \, du'}{\Delta^3}(\lambda'' x' + \mu'' y')$$

Désignons par K le nœud ascendant du plan Π' sur le plan Π, soit J l'inclinaison correspondante de Π' sur Π, et appelons ω, ω' les distances du nœud K aux périhélies des deux orbites, ces angles J, ω, ω' sont faciles à calculer une fois pour toutes.

Déterminons de même des quantités auxiliaires p, q, P, Q, telles que

$$p \sin(P - \omega) = \cos\omega', \qquad q \sin(Q - \omega) = -\sin\omega',$$
$$p \cos(P - \omega) = \sin\omega' \cos J, \qquad q \cos(Q - \omega) = \cos\omega' \cos J$$

on a sans peine

$$\lambda = p \sin(v + P), \qquad \mu = q \sin(v + Q), \qquad \nu = -\sin(v + \omega) \sin J,$$
$$\lambda' = p \cos(v + P), \qquad \mu' = q \cos(v + Q), \qquad \nu' = -\cos(v + \omega) \sin J,$$
$$\lambda'' = \sin\omega' \sin J, \qquad \mu'' = \cos\omega' \sin J, \qquad \nu'' = \cos J,$$

ces neuf quantités sont liées entre elles par les relations connues.

Remarquons actuellement que l'on a

$$x'^2 + y'^2 - r'^2 = 0,$$

et aussi

$$r + \varepsilon' x' = a' \cos^2\varphi',$$

$$a' \cos\varphi' \, du' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 - dr'^2}$$

Faisons alors

$$\xi = \frac{x'}{a'}, \qquad \eta = \frac{y'}{a'}, \qquad \zeta = \frac{r'}{a'},$$

puis

$$\rho = \frac{r}{a'} \sec^2\varphi'$$

On pourra ecrire

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = F(\xi, \eta, \zeta) = \zeta^2 + \rho^2(\zeta + \varepsilon'\xi)^2 - 2\rho(\zeta + \varepsilon'\xi)(\lambda\xi + \mu\eta),$$

$$2\pi \cos\varphi' X_0 = \int F^{-\frac{3}{2}} \zeta[\lambda\xi + \mu\eta - \rho(\zeta + \varepsilon'\xi)] \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2},$$

$$2\pi \cos\varphi' Y_0 = \int F^{-\frac{3}{2}} \zeta(\lambda'\xi + \mu'\eta) \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2},$$

$$2\pi \cos\varphi' Z_0 = \int F^{-\frac{3}{2}} \zeta(\lambda''\xi + \mu''\eta) \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2},$$

et comme les quantites placées sous le signe $\int$ sont homogènes et du degre zero par rapport aux variables ξ, η, ζ, on peut dire que les integrales sont étendues à l'ensemble des valeurs réelles que prennent les variables homogènes ξ, η, ζ, liées par la relation

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$$

Regardons ξ, η, ζ comme des coordonnées cartesiennes ordinaires dans l'espace nous pouvons dire encore, en d'autres termes, que les integrales sont prises le long du cône C d'equation

$$f = \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$$

Dans ces mêmes conditions, l'équation F = 0 represente elle aussi un second cône C', evidemment reel, et qui n'admet avec C aucune génératrice commune réelle, d'après la nature de la question, C et C' ont par suite un triedre conjugué commun réel

On peut alors faire sur les variables ξ, η, ζ une substitution linéaire introduisant de nouvelles variables ξ', η', ζ', et telle que les deux formes f et F se réduisent à des sommes algebriques de carrés que

l'on peut écrire ainsi

$$f=-\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2, \qquad F=-S_1\xi'^2+S_2\eta'^2+S_3\zeta'^2,$$

S_1, S_2, S_3 étant des quantités réelles.

Si l'on fait

$$F=A\xi^2+A'\eta^2+A''\zeta^2+2B\eta\zeta+2B'\zeta\xi+2B''\xi\eta,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon'^2\rho^2-2\varepsilon'\lambda\rho, & B &= -\mu\rho, \\ A' &= 0, & B' &= -\lambda\rho+\varepsilon'\rho^2, \\ A'' &= 1+\rho^2, & B'' &= -\varepsilon'\mu\rho, \end{aligned}$$

et que l'on désigne par $D\varphi$ le discriminant d'une forme quadratique quelconque φ, les nombres S_1, S_2, S_3 sont les racines de l'équation

$$D(F-Sf)=0,$$

ou

$$\begin{aligned} &S^3+(1+2\varepsilon'\lambda\rho+\rho^2\cos^2\varphi')S^2 \\ &\quad+[2\varepsilon'\lambda\rho+(\lambda^2+\mu^2\cos^2\varphi'-\varepsilon'^2)\rho^2]S-\varepsilon'^2\mu^2\rho^2=0, \end{aligned}$$

on vérifie immédiatement que cette équation a en effet deux racines négatives séparées par le nombre -1, et une racine positive inférieure à $\tang^2\varphi'$.

En prenant précisément $S_1<S_2<S_3$, on s'assure facilement que la substitution entre ξ, η, ζ et ξ', η', ζ' est entièrement réelle, il suffit d'observer que la forme F est, comme f, décomposable en une somme de deux carrés positifs et d'un carré négatif, et en outre que les cônes C et C' n'ont aucune génératrice commune réelle.

Considérons maintenant les formes

$$\varphi=\zeta[\lambda\xi+\mu\eta-\rho(\zeta+\varepsilon'\xi)], \qquad \varphi'=\zeta(\lambda'\xi+\mu'\eta), \qquad \varphi''=\zeta(\lambda''\xi+\mu''\eta),$$

et imaginons que la substitution sur ξ, η, ζ les transforme en

$$\begin{aligned} \varphi &= -A_1\xi'^2+A_2\eta'^2+A_3\zeta'^2+B_1\eta'\zeta'+B_2\zeta'\xi'+B_3\xi'\eta', \\ \varphi' &= -A'_1\xi'^2+A'_2\eta'^2+A'_3\zeta'^2+B'_1\eta'\zeta'+B'_2\zeta'\xi'+B'_3\xi'\eta', \\ \varphi'' &= -A''_1\xi'^2+A''_2\eta'^2+A''_3\zeta'^2+B''_1\eta'\zeta'+B''_2\zeta'\xi'+B''_3\xi'\eta', \end{aligned}$$

en observant que $d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2$ se transforme nécessairement en $-d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2$, nous pouvons écrire

$$2\pi \cos\varphi' X_0 = \int F^{-\frac{3}{2}} \varphi \sqrt{-d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2},$$

et des formules analogues pour Y_0, Z_0, les fonctions F et φ ayant leurs nouvelles expressions en ξ', η', ζ', et comme précédemment, l'intégrale est prise le long du cône C, c'est-à-dire étendue à l'ensemble des valeurs réelles que prennent les variables homogènes ξ', η', ζ' liées par la relation

$$-\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 0.$$

Or, il est clair que les termes rectangles $B_1 \eta'\zeta'$, de la fonction φ n'apportent qu'une contribution nulle à cette intégrale, d'après la nouvelle forme de F, on a donc plus simplement

$$2\pi \cos\varphi' X_0 = \int \frac{-A_1\xi'^2 + A_2\eta'^2 + A_3\zeta'^2}{(-S_1\xi'^2 + S_2\eta'^2 + S_3\zeta'^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{-d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2},$$

avec des expressions analogues pour Y_0, Z_0

Il est aisé de calculer les coefficients A_1, A_2, A_3 et leurs analogues A cet effet, rappelons que deux formes quadratiques quelconques

$$\psi = a\xi^2 + a'\eta^2 + a''\zeta^2 + 2b\eta\zeta + 2b'\zeta\xi + 2b''\xi\eta,$$
$$\chi = \alpha\xi^2 + \alpha'\eta^2 + \alpha''\zeta^2 + 2\beta\eta\zeta + 2\beta'\zeta\xi + 2\beta''\xi\eta,$$

admettent l'invariant

$$\alpha\frac{\partial D\psi}{\partial a} + \alpha'\frac{\partial D\psi}{\partial a'} + \alpha''\frac{\partial D\psi}{\partial a''} + \beta\frac{\partial D\psi}{\partial b} + \beta'\frac{\partial D\psi}{\partial b'} + \beta''\frac{\partial D\psi}{\partial b''},$$

appliquons ce résultat en prenant pour ψ la forme $F - Sf$, et pour χ la forme φ, ou φ', ou φ'', et observons que le carré du déterminant de la substitution faite sur ξ, η, ζ est égal à l'unité, en égalant les coefficients des diverses puissances du paramètre S dans les deux expressions de l'invariant ci-dessus, et en se servant des relations

entre les neuf cosinus λ, μ, ν, , on obtiendra immédiatement

$$\begin{cases} P = A_1 + A_2 + A_3 = \rho, \\ Q = A_1(S_2+S_3) + A_2(S_3+S_1) + A_3(S_1+S_2) = (\nu^2-1)\rho, \\ R = A_1 S_2 S_3 + A_2 S_3 S_1 + A_3 S_1 S_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P' = A'_1 + A'_2 + A'_3 = 0, \\ Q' = A'_1(S_2+S_3) + \quad = \nu\nu'\rho + \varepsilon'\lambda'\rho^2, \\ R' = A'_1 S_2 S_3 + \quad = \varepsilon'\mu\nu''\rho^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'' = A''_1 + A''_2 + A''_3 = 0, \\ Q'' = A''_1(S_2+S_3) + \quad = \nu\nu''\rho + \varepsilon'\lambda''\rho^2, \\ R'' = A''_1 S_2 S_3 + \quad = -\varepsilon'\mu\nu'\rho^2, \end{cases}$$

ces formules montrent que le calcul des cosinus μ' et μ'' est en réalité inutile

Faisons actuellement

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3\sigma,$$
$$e_1 = -S_1 + \sigma, \qquad e_2 = -S_2 + \sigma, \qquad e_3 = -S_3 + \sigma,$$

de sorte que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_1 > e_2 > e_3,$$

puis

$$\xi'^2 = -(t-e_1)(e_2-e_3), \qquad \eta'^2 = (t-e_2)(e_3-e_1), \qquad \zeta'^2 = (t-e_3)(e_1-e_2),$$
$$D = (e_1-e_2)(e_1-e_3)(e_2-e_3)$$

Les variables ξ', η', ζ' sont ainsi liées par la relation

$$-\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 0,$$

de sorte qu'on peut leur substituer la nouvelle variable t, et elles prendront des valeurs réelles sous la condition

$$e_3 < t < e_2$$

On a d'ailleurs

$$-S_1\xi'^2 + S_2\eta'^2 + S_3\zeta'^2 = D,$$
$$-d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2 = \frac{D\,dt^2}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)},$$

et si l'on fait encore

$$(e_2-e_3)A_1 + (e_3-e_1)A_2 + (e_1-e_2)A_3 = -DN,$$
$$e_1(e_2-e_3)A_1 + e_2(e_3-e_1)A_2 + e_3(e_1-e_2)A_3 = -DM$$

la différentielle de $2\pi \cos\varphi' X_0$ prend la forme

$$\frac{(M - Nt)\,dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}.$$

Comme l'intégration qui donne X_0 doit être étendue à toutes les valeurs réelles de ξ', η', ζ' vérifiant la relation $-\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 0$, il est clair, d'après la forme des relations qui définissent ξ', η', ζ' en fonction de t, qu'il faut intégrer par rapport à t entre les limites e_3 et e_2, et multiplier le résultat par 4, de sorte que

$$\cos\varphi' X_0 = \frac{2}{\pi}\int_{e_3}^{e_2} \frac{(M - Nt)\,dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}},$$

on a des formules analogues pour Y_0, Z_0, en remplaçant M et N par M' et N', ou M'' et N'', ces quantités ayant une définition évidente semblable à celle de M et N.

Il reste à lever l'ambiguïté qui provient de la présence d'un radical dans la formule précédente. Pour y arriver, il suffit d'examiner un cas particulier. Supposons donc $\lambda = \mu = 0$, la valeur de X_0 est alors négative, comme le montre sa première forme, on a $S_2 = 0$, $e_2 < 0$, puis

$$A_2 = 0, \qquad A_1 + A_3 = \rho, \qquad A_1 S_3 + A_3 S_1 = 0,$$

d'où

$$A_1 > 0, \qquad A_3 > 0, \qquad M < 0, \qquad N < 0,$$

et par suite le radical doit être pris positivement.

Envisageons maintenant les fonctions elliptiques qui sont construites, suivant les notations classiques, avec les nombres e_1, e_2, e_3, et soient ω, η les deux nombres réels généralement ainsi désignés. On a immédiatement

$$\cos\varphi' X_0 = \frac{2}{\pi}(M\omega + N\eta),$$

$$\cos\varphi' Y_0 = \frac{2}{\pi}(M'\omega + N'\eta),$$

$$\cos\varphi' Z_0 = \frac{2}{\pi}(M''\omega + N''\eta),$$

et les intégrales X_0, Y_0, Z_0 sont ainsi déterminées.

Toutefois, il faut encore indiquer les détails du calcul. Soit

$$h_0 = 2\varepsilon'\lambda\rho + \rho^2\cos^2\varphi', \qquad h_3 = \varepsilon'^2\mu^2\rho^2,$$
$$3h_1 = 1 + h_0, \qquad h_2 = \nu^2\rho^2 + h_3 - h_0,$$

de sorte que

$$S_1 + S_2 + S_3 = -3h_1, \qquad S_2S_3 + S_3S_1 + S_1S_2 = -h_2, \qquad S_1S_2S_3 = h_3,$$

et par suite

$$-(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) = h_2 + 3h_1^2 = s_2,$$
$$e_1e_2e_3 = -h_3 + h_1h_2 + 2h_1^3 = s_3,$$
$$D^2 = 4s_2^3 - 27s_3^2$$

Faisons encore

$$P_1 = 2h_1P + Q, \qquad P_2 = h_1^2P + h_1Q + R$$

(et, bien entendu, on a des formules analogues avec les grandes lettres accentuées une fois et deux fois), de sorte que

$$A_1 + A_2 + A_3 = P,$$
$$e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3 = P_1,$$
$$e_2e_3A_1 + e_3e_1A_2 + e_1e_2A_3 = P_2,$$

il en résulte

$$D^2M = 3s_2s_3P - 2s_2^2P_1 + 9s_3P_2,$$
$$D^2N = -2s_2^2P + 9s_3P_1 - 6s_2P_2,$$

et par suite

$$\cos\varphi'X_0 = \frac{2}{\pi}\,\frac{9s_3\eta - 2s_2^2\omega}{D^2}P_1 + \frac{2}{\pi}\,\frac{3s_3\omega - 2s_2\eta}{D^2}(s_2P + 3P_2)$$

Il ne reste donc plus qu'à nous occuper du calcul de ω et η, qui peut se faire de bien des manières. En particulier, on pourra procéder comme il suit, d'après les formules connues de la théorie des fonctions elliptiques.

Faisons

$$\beta = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}},$$

$$q = \beta + 2\beta^5 + 15\beta^9 + 150\beta^{13} + \ldots,$$

$$\gamma = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}\right)^2 (1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots)^2,$$

$$\gamma' = \frac{1}{3}\,\frac{1 - 3^3q^2 + 5^3q^6 - 7^3q^{12} + \ldots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \ldots},$$

on aura

$$\frac{2\omega}{\pi} = \gamma, \qquad \frac{2\eta}{\pi} = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

Ces formules sont particulièrement avantageuses si l'on a $e_2 < 0$, dans le cas contraire, si les séries ci-dessus deviennent insuffisamment convergentes, on fera moins simplement, mais avec les mêmes avantages que dans le premier cas,

$$\beta = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}},$$

et en déterminant toujours q, γ, γ' de la même façon, la différence $e_1 - e_2$ étant remplacée par $e_2 - e_3$, on aura

$$\frac{2\omega}{\pi} = \frac{\gamma}{\pi}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{q}, \qquad \frac{2\eta}{\pi} = \frac{1}{\gamma\pi}\left(2 - \gamma'\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{q}\right),$$

le logarithme étant hyperbolique

Le calcul précédent n'exige que la connaissance des différences $e_1 - e_3$, $e_1 - e_2$ ou $e_2 - e_3$ Or, d'après la résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré, si l'on fait

$$\cos 3\theta = \frac{s_3\sqrt{27}}{s_2\sqrt{4 s_2}}, \qquad \text{ou} \qquad \sin^2 3\theta = \frac{D^2}{4 s_2^3} \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right),$$

on a

$$e_1 = \sqrt{\frac{4 s_2}{3}}\cos\theta, \qquad e_2 = \sqrt{\frac{4 s_2}{3}}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad e_3 = \sqrt{\frac{4 s_2}{3}}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right),$$

et par suite

$$e_1 - e_3 = \sqrt{4 s_2}\,\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right), \qquad e_1 - e_2 = \sqrt{4 s_2}\,\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right),$$

$$e_2 - e_3 = \sqrt{4 s_2}\,\sin\theta$$

L'expression de X_0 devient illusoire si l'on a $D = 0$, c'est-à-dire $e_1 = e_2$, ou bien $e_2 = e_3$ Le premier de ces cas est à écarter, car s'il se présentait, les orbites des deux planètes M et M' se couperaient, comme on le vérifie sans peine il est par suite inutile de faire l'hypothèse où l'angle θ serait voisin de $\frac{\pi}{3}$. Mais il n'en est pas de même du second cas, $e_2 = e_3$, et s'il ne se présente guère rigoureusement

réalise, il importe cependant de modifier le calcul indiqué ci-dessus pour le mieux adapter à l'hypothèse où l'angle θ est petit. La solution suivante, parmi beaucoup d'autres, supprime toute perte de précision, et est presque toujours applicable avec grand avantage, en raison de sa forme simple et de la convergence rapide des deux séries dont elle dépend.

Posons, suivant d'autres notations usuelles,

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

il suffit d'ailleurs de calculer

$$k'^2 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)}, \qquad e_1 - e_3 = \sqrt{4 s_2}\,\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right),$$

θ étant l'angle déterminé ci-dessus.

On a

$$\omega = \frac{K}{(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \eta = \frac{(e_1 - e_3)E - e_1 K}{(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}}},$$

$$s_2 = \frac{1}{3}(1 - k^2 + k^4)(e_1 - e_3)^2, \qquad s_3 = \frac{1}{27}(1 + k^2)(1 - 2k^2)(2 - k^2)(e_1 - e_3)^3,$$

$$D^2 = k^4 k'^4 (e_1 - e_3)^6,$$

et par suite,

$$\frac{2 s_2 \eta - 3 s_3 \omega}{D^2} = \frac{2(1 - k^2 + k^4)E - (1 - k^2)(2 - k^2)K}{3 k^4 k'^4 (e_1 - e_3)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{2 s_2^2 \omega - 9 s_3 \eta}{D^2} = \frac{(1 - k^2)(2 - 2k^2 - k^4)K - (1 + k^2)(1 - 2k^2)(2 - k^2)E}{3 k^4 k'^4 (e_1 - e_3)^{\frac{5}{2}}}.$$

Posons alors

$$h = \frac{1 - k'}{1 + k'},$$

et, pour simplifier l'écriture,

$$\alpha_p = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}\right]^2 \qquad (\alpha_0 = 1),$$

en remplaçant K et E par leurs valeurs connues

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi} = \frac{2}{1+k} \sum \alpha_p h^{2p},$$

$$\frac{2\mathrm{E}}{\pi} = \frac{1+k'}{2} \sum \frac{\alpha_p}{(2p-1)^2} h^{2p}$$

$$(p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

on obtient sans peine les résultats suivants

Soit $k' = \cos\varphi$, d'où $h = \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}$, puis avec les notations ordinaires de la série hypergéométrique

$$\Sigma = \mathrm{F}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2, h^2\right),$$

$$\Sigma_1 = \mathrm{F}\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 2, h^2\right) + h^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 3, h^2\right),$$

on a

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{2 s_2 \eta - 3 s_3 \omega}{\mathrm{D}^2} = \frac{5}{8}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\varphi\,(e_1-e_3)^{\frac{7}{2}}}\,\Sigma = \Phi,$$

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{2 s_2^2 \omega - 9 s_3 \omega}{\mathrm{D}^2} = \frac{7}{8}\,\frac{\cos^6\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\varphi\,(e_1-e_3)^{\frac{5}{2}}}\,\Sigma_1 = \Phi_1,$$

et finalement

$$\cos\varphi'\,\mathrm{X}_0 = -\Phi(s_2 \mathrm{P} + 3\mathrm{P}_2) - \Phi_1 \mathrm{P}_1,$$

$$\cos\varphi'\,\mathrm{Y}_0 = -\Phi(s_2 \mathrm{P}' + 3\mathrm{P}'_2) - \Phi_1 \mathrm{P}'_1,$$

$$\cos\varphi'\,\mathrm{Z}_0 = -\Phi(s_2 \mathrm{P}'' + 3\mathrm{P}''_2) - \Phi_1 \mathrm{P}''_1$$

On a d'ailleurs explicitement

$$\Sigma = 1 + \frac{3}{8} h^2 - \frac{1}{2^6} h^4 - \frac{1}{2^{10}} h^6 - \frac{3}{2^{14}} h^8 - \frac{7}{2^{17}} h^{10} - \frac{21}{2^{20}} h^{12} - \ldots,$$

$$\Sigma_1 = 1 + \frac{23}{8} h^2 - \frac{1}{2^6} h^4 + \frac{19}{2^{10}} h^6 + \frac{29}{2^{14}} h^8 + \frac{53}{2^{17}} h^{10} + \frac{139}{2^{20}} h^{12} + \ldots,$$

ce qui justifie les assertions précédentes relativement à la convergence de ces séries dans les cas usuels Ces deux séries Σ et Σ_1 sont d'ailleurs convergentes encore pour $h = 1$, et sont alors respectivement égales, d'après leur définition même, à $\frac{64}{15\pi}$ et $\frac{256}{21\pi}$

On peut faciliter le calcul par l'emploi de la table suivante, qui suffit pour tous les cas usuels, avec l'approximation de la septième décimale. Si l'on fait

$$\Sigma = 1 + \frac{3}{8} h^2 - \varepsilon, \qquad \Sigma_1 = 1 + \frac{23}{8} h^2 - \varepsilon_1,$$

on trouvera ε et ε_1 dans cette table

$\log h$	$\log \varepsilon$	Diff	$\log \varepsilon_1$	Diff
$\bar{2}$,5	$\bar{8}$,19	0,40	$\bar{8}$,19	0,40
$\bar{2}$,6	$\bar{8}$,59	0,40	$\bar{8}$,59	0,40
$\bar{2}$,7	$\bar{8}$,99	0,40	$\bar{8}$,99	0,40
$\bar{2}$,8	$\bar{7}$,39	0,40	$\bar{7}$,39	0,40
$\bar{2}$,9	$\bar{7}$,794	0,400	$\bar{7}$,791	0,398
$\bar{1}$,0	$\bar{6}$,194	0,400	$\bar{6}$,189	0,397
$\bar{1}$,1	$\bar{6}$,594	0,400	$\bar{6}$,586	0,395
$\bar{1}$,2	$\bar{6}$,9945	0,4004	$\bar{6}$,9806	0,3921
$\bar{1}$,3	$\bar{5}$,3949	0,4006	$\bar{5}$,3727	0,3871
$\bar{1}$,4	$\bar{5}$,7955	0,4011	$\bar{5}$,5798	0,3785
$\bar{1}$,5	$\bar{4}$,1966		$\bar{4}$,1383	

CHAPITRE XVIII.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX INÉGALITÉS SÉCULAIRES ET A LONGUE PÉRIODE

115. Comme nous l'avons dit au n° 95, les diverses solutions que nous avons développées dans les précédents Chapitres ne peuvent être regardées comme valables que pour un intervalle de temps limité, en raison de la présence des termes séculaires et aussi des termes mixtes. Est-il possible, en procédant d'une autre manière, de trouver des résultats valables pour de très grands intervalles de temps? C'est la question que nous devons examiner dans ce Chapitre.

Reportons-nous au n° 94, dont nous allons reprendre les notations et la terminologie. Si l'on veut étudier d'une façon au moins approchée ce que devient le mouvement du système formé par les planètes M, M',... pour des époques très éloignées de l'origine du temps, il est clair qu'il faut envisager, dans les valeurs des inconnues, l'ensemble formé par les termes séculaires *principaux*, c'est-à-dire ceux qui sont de rang maximum pour un ordre donné, soit, en précisant, ceux qui sont à la fois de rang p et d'ordre p: tous les autres termes, en effet, deviennent négligeables devant ceux-là pour t très grand, et d'autre part, tous ces termes sont à conserver, puisque la grandeur de t compense la petitesse de μ. Nous allons montrer, d'après H. Poincaré, que ces termes peuvent être définis séparément par un système d'équations différentielles simples, que nous pourrons ensuite chercher à intégrer sous une forme différente, permettant d'énoncer des conclusions qui resteraient cachées si l'on conservait la forme primitive, tout comme le développement en série de $\sin \omega t$, par exemple, masque la périodicité de cette fonction.

Revenant aux équations (5) et (6) du n° 94, appelons $S_p(l_p)$, $S_p(h_p)$, ... les parties séculaires principales de l_p, h_p, ...; ce sont

les seules inconnues que nous chercherons à déterminer, puisque les n_p ne contiennent pas de tels termes, nous le savons. Convenons de plus de prendre $\nu_0 = n_0$, et supposons les quantités n_1, n_2, dépourvues de termes constants.

Désignons par $\overline{L}$, $\overline{H}$, les parties des fonctions L, H, qui sont indépendantes des longitudes moyennes l, l', , soit, pour abréger, les parties séculaires de ces fonctions (les N n'ont pas de parties séculaires), $\overline{L}_0$, $\overline{H}_0$, seront de même les parties constantes de L_0, H_0, . et par suite, ce que deviennent L, H, , quand on y remplace n, h, par n_0, h_0, Enfin, n'oublions pas que, d'après le théorème de Poisson, les n_p n'ont pas de parties séculaires de rang $p-1$

Dans ces conditions, on a d'abord manifestement

$$\frac{dS_1(h_1)}{dt} = \overline{H}_0, \qquad , \qquad \frac{dS_1(l_1)}{dt} = \overline{L}_0, \qquad ,$$

puis, en reprenant le développement général de la fonction X_1, et observant que la dérivée $\frac{\partial X_0}{\partial l_0}$ ne contient pas de terme constant, on a, en ne conservant que les termes séculaires en t,

$$\frac{dS_2(h_2)}{dt} = \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial h_0} S_1(h_1) + \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial h'_0} S_1(h'_1) +$$

$$\frac{dS_2(l_2)}{dt} = \frac{\partial \overline{L}_0}{\partial h_0} S_1(h_1) + \frac{\partial \overline{L}_0}{\partial h'_0} S_1(h'_1) + \qquad ,$$

$$,$$

En prenant de même le développement général de X_2, et y conservant seulement les termes séculaires en t^2, on a

$$\frac{dS_3(h_3)}{dt} = \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial h_0} S_2(h_2) + \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial h'_0} S_2(h'_2) +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \overline{H}_0}{\partial h_0^2} [S_1(h_1)]^2 + \quad + \frac{\partial^2 \overline{H}_0}{\partial h_0 \, \partial h'_0} S_1(h_1) S_1(h'_1) + \ldots,$$

$$\frac{dS_3(l_3)}{dt} = \frac{\partial \overline{L}_0}{\partial h_0} S_2(h_2) + \frac{\partial \overline{L}_0}{\partial h'_0} S_2(h'_2) +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \overline{L}_0}{\partial h_0^2} [S_1(h_1)]^2 + \quad + \frac{\partial^2 \overline{L}_0}{\partial h_0 \, \partial h'_0} S_1(h_1) S_1(h'_1) + \quad ,$$

Et ainsi de suite

Si donc on réduit les inconnues n, l, h, ..., à leurs parties *principales*, définies plus haut,

$$n_0, \quad l_0 + \mu S_1(l_1) + \mu^2 S_2(l_2) + \ldots, \quad h_0 + \mu S_1(h_1) + \mu^2 S_2(h_2) + \ldots,$$

on voit que l'on a précisément

$$\frac{dn}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dh}{dt} = \mu \bar{\mathrm{H}}, \quad \ldots, \quad \frac{dl}{dt} = n_0 + \mu \bar{\mathrm{L}}, \quad \ldots,$$

les n sont des constantes n_0, les h sont déterminés par le système d'équations différentielles

$$\frac{dh}{dt} = \mu \bar{\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh'}{dt} = \mu \bar{\mathrm{H}}', \qquad \ldots,$$

aux seules inconnues h, h', ..., enfin on obtient les l par de simples quadratures

$$\frac{dl}{dt} = n_0 + \mu \bar{\mathrm{L}},$$

puisque la fonction $\bar{\mathrm{L}}$ des h est maintenant connue.

En résumé, pour déterminer les parties *principales* des inconnues, il suffit de réduire les seconds membres des équations générales (5) du n° 94 à leurs parties séculaires.

116. Appliquons ce qui précède au système formé par les grosses planètes M_1, M_2, M_3, ... Pour représenter les éléments de la planète M_p, de masse m_p, nous modifierons un peu les notations ordinaires : le moyen mouvement et le demi-grand axe seront des constantes n_p et a_p, liées par la relation $n_p^2 a_p^3 = f(1 + m_p)$, la longitude moyenne, l'excentricité, la longitude du périhélie, l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant seront l_p, η_p, ϖ_p, J_p, θ_p, et nous ferons

$$\varepsilon_p = \frac{\eta_p}{2} e^{-i\varpi_p}, \qquad \varepsilon'_p = \frac{\eta_p}{2} e^{i\varpi_p},$$

$$\gamma_p = \sin \frac{J_p}{2} e^{-i\theta_p}, \qquad \gamma'_p = \sin \frac{J_p}{2} e^{i\theta_p}.$$

Soit alors $f m_q S_{pq}$ la partie séculaire de la fonction perturbatrice qui définit l'action de M_q sur le mouvement de M_p ; d'après le n° 91, on a $S_{pq} = S_{qp}$ (les indices p, q étant toujours distincts), et si l'on néglige les termes du quatrième degré par rapport aux excentricités

et aux inclinaisons, il vient simplement

$$\sqrt{a_p a_q}\, S_{pq} = 2 b_{pq} + 2(\varepsilon_p \varepsilon'_p + \varepsilon_q \varepsilon'_q - \gamma_p \gamma'_p - \gamma_q \gamma'_q + \gamma_p \gamma'_q + \gamma'_p \gamma_q)\, b'_{pq} \\ - 2(\varepsilon_p \varepsilon'_q + \varepsilon'_p \varepsilon_q)\, b''_{pq},$$

en appelant $2 b_{pq}$, $2 b'_{pq}$, $2 b''_{pq}$, les coefficients de Laplace $b_0^{\frac{1}{2}}$, $b_1^{\frac{3}{2}}$, $b_2^{\frac{3}{2}}$, qui correspondent à celui des rapports $\frac{a_p}{a_q}$ ou $\frac{a_q}{a_p}$ qui est inférieur à l'unité

Par suite, les équations (4) du n° 93 donnent d'abord pour déterminer les éléments ε_p, ε'_p, γ_p, γ'_p, les équations

$$(1) \qquad \frac{d\varepsilon_p}{i\,dt} + \frac{f}{n_p a_p^2} \sum_q \frac{m_q}{\sqrt{a_p a_q}} (b'_{pq} \varepsilon_p - b''_{pq} \varepsilon_q) = 0,$$

$$(1') \qquad -\frac{d\varepsilon'_p}{i\,dt} + \frac{f}{n_p a_p^2} \sum_q \frac{m_q}{\sqrt{a_p a_q}} (b'_{pq} \varepsilon'_p - b''_{pq} \varepsilon'_q) = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d\gamma_p}{i\,dt} + \frac{f}{n_p a_p^2} \sum_q \frac{m_q b'_{pq}}{\sqrt{a_p a_q}} (\gamma_q - \gamma_p) = 0,$$

$$(2') \qquad -\frac{d\gamma'_p}{i\,dt} + \frac{f}{n_p a_p^2} \sum_q \frac{m_q b'_{pq}}{\sqrt{a_p a_q}} (\gamma'_q - \gamma'_p) = 0,$$

qui forment quatre systèmes nettement séparés, conjugués deux à deux, comme le sont nécessairement ε_p, ε'_p d'une part, γ_p, γ_p d'autre part

Observons tout de suite qu'en multipliant les équations telles que (1) et (1') par $m_p\, n_p\, a_p^2\, \varepsilon'_p$, $-\, m_p\, n_p\, a_p^2\, \varepsilon_p$, respectivement, et ajoutant, on a l'intégrale

$$(3) \qquad \sum_p m_p n_p a_p^2 \varepsilon_p \varepsilon'_p = \text{const.},$$

et de même les équations (2) et (2') admettent l'intégrale

$$(4) \qquad \sum_p m_p n_p a_p^2 \gamma_p \gamma'_p = \text{const}$$

Pour intégrer les équations (1) par exemple, cherchons une solution de la forme

$$\varepsilon_1 = C_1\, e^{igt}, \qquad \varepsilon_2 = C_2\, e^{igt}, \qquad ,$$

en appelant C_1, C_2, ..., g, des constantes, il suffit de vérifier les relations

$$(5)\qquad \left(g+\sum_q \frac{fm_q b'_{pq}}{n_p a_p^2\sqrt{a_p a_q}}\right)C_p-\sum_q \frac{fm_q b''_{pq}}{n_p a_p^2\sqrt{a_p a_q}}\,C_q=0$$

Le nombre g doit par suite être racine de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le déterminant $F(g)$ de ces équations linéaires; une fois ce choix fait, ces équations fournissent les rapports des constantes C_1, C_2, ..., dont une seule peut être prise arbitrairement en général. Comme l'équation $F(g)=0$ est d'un degré égal à l'ordre k du système (1), on a ainsi, en prenant successivement pour g les k racines supposées distinctes de cette équation, k solutions particulières dont la réunion formera la solution générale des équations (1), dépendant de k constantes arbitraires.

Avant d'examiner les cas particuliers qui pourraient se présenter, démontrons que l'équation $F(g)=0$ ne peut avoir que des racines réelles. Supposons en effet g imaginaire de la forme $\beta-i\alpha$, la quantité α n'étant pas nulle, et soit

$$\varepsilon_1=C_1\,e^{(\alpha+i\beta)t},\qquad \varepsilon_2=C_2\,e^{(\alpha+i\beta)t},\qquad \ldots,$$

une solution correspondante. Si C'_1, C'_2, ... sont les constantes conjuguées de C_1, C_2, ..., les équations (1') admettront la solution conjuguée

$$\varepsilon'_1=C'_1\,e^{(\alpha-i\beta)t},\qquad \varepsilon'_2=C'_2\,e^{(\alpha-i\beta)t},\qquad \ldots,$$

et d'après la formule (3), on aura

$$e^{2\alpha t}\,\Sigma\, m_p n_p a_p^2\, C_p C'_p=\text{const.}$$

Les produits $C_p C'_p$ étant nécessairement positifs ou nuls, mais non tous nuls, cette relation est impossible, si du moins les moyens mouvements n_p sont tous de même signe, c'est-à-dire si les planètes M_p tournent toutes dans le même sens, par rapport à un plan peu incliné sur leurs orbites, ce qui est le cas de la nature.

Si l'équation $F(g)=0$ admet une racine multiple g d'ordre h, on peut penser, d'après la théorie générale des équations différentielles homogènes simultanées à coefficients constants, que la solution correspondant à cette racine sera de la forme

$$\varepsilon_1=C_1\,e^{igt},\qquad \varepsilon_2=C_2\,e^{igt},\qquad \ldots,$$

$C_1, C_2, \ldots$ désignant cette fois des polynomes convenablement choisis, du degré $h-1$ au plus en t, et dépendant de h arbitraires. En réalité, ces polynomes se réduisent à des constantes : en effet, soient $C'_1, C'_2, \ldots$ leurs conjugués, puisque la racine g est réelle, les équations (1') admettent la solution

$$\varepsilon'_1 = C'_1 e^{-igt}, \qquad \varepsilon'_2 = C'_2 e^{-igt}, \qquad \ldots,$$

et d'après (3), on a

$$\Sigma m_p n_p a_p^2 C_p C'_p = \text{const.},$$

or cette relation ne peut évidemment subsister, avec la même hypothèse que ci-dessus sur le signe des n''_p, que si les C_p se réduisent à des constantes.

La solution particulière qui correspond à la racine g est donc toujours de la même forme purement périodique, mais parmi les constantes $C_1, C_2, \ldots$, on peut en choisir h arbitrairement : en d'autres termes, les mineurs du déterminant $F(g)$ sont tous nuls jusqu'à l'ordre $h-1$ au plus.

Ces différentes propositions résultent encore des considérations suivantes : faisons

$$D_p = a_p \sqrt{m_p n_p} C_p,$$

de sorte que les équations aux inconnues C_p deviennent

$$\left(g + \sum_q \frac{f m_q b'_{pq}}{n_p a_p^2 \sqrt{a_p a_q}}\right) D_p - \sum_q \frac{f\sqrt{m_p m_q}\, b''_{pq}}{(a_p a_q)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n_p n_q}} D_q = 0.$$

Le déterminant de ces équations, qui est toujours $F(g)$, apparaît alors comme un déterminant *symétrique* à coefficients réels (puisque les n_p sont tous de même signe), du type bien connu

$$\begin{vmatrix} g + A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & g + A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & g + A_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

et l'on sait par l'algèbre que l'équation $F(g) = 0$ a toutes ses racines réelles, une racine multiple d'ordre h annulant tous les mineurs de $F(g)$ jusqu'à l'ordre $h-1$ inclus.

Désignons généralement par $g_\alpha, g_\beta, \ldots$ les k racines supposées

distinctes de l'equation $F(g)=0$, et soient $c_{p\alpha}, c_{p\beta}, \ldots$ des nombres réels choisis une fois pour toutes, vérifiant les equations (5), ou l'on remplace g par $g_\alpha, g_\beta, \ldots$; ces nombres sont déterminés par ces equations mêmes à un facteur près En appelant ρ_α et λ_α deux constantes arbitraires reelles, nous pouvons écrire la solution générale des equations (1) et (1') sous la forme

$$z_p = \sum_\alpha \rho_\alpha c_{p\alpha} e^{i(g_\alpha t+\lambda_\alpha)}, \qquad z'_p = \sum_\alpha \rho_\alpha c_{p\alpha} e^{-i(g_\alpha t+\lambda_\alpha)},$$

ou bien

$$\begin{cases} \eta_p \cos\varpi_p = 2\sum_\alpha \rho_\alpha c_{p\alpha} \cos(g_\alpha t + \lambda_\alpha), \\ \eta_p \sin\varpi_p = -2\sum_\alpha \rho_\alpha c_{p\alpha} \sin(g_\alpha t + \lambda_\alpha) \end{cases}$$

L'equation (3), appliquée aux deux solutions particulières

$$z_p = \rho_\alpha c_{p\alpha} e^{i(g_\alpha t+\lambda_\alpha)}, \qquad z'_p = \rho_\beta c_{p\beta} e^{-i(g_\beta t+\lambda_\beta)},$$

donne, sous la condition $\alpha \neq \beta$,

$$\sum_p m_p n_p a_p^2 c_{p\alpha} c_{p\beta} = 0,$$

puisque les racines g_α, g_β sont supposées distinctes Il résulte immédiatement de cette relation et des formules précédentes

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \sum_p m_p n_p a_p^2 c_{p\alpha} \eta_p \cos\varpi_p = 2\rho_\alpha \cos(g_\alpha t + \lambda_\alpha) \sum_p m_p n_p a_p^2 c_{p\alpha}^2, \\ \sum_p m_p n_p a_p^2 c_{p\alpha} \eta_p \sin\varpi_p = -2\rho_\alpha \sin(g_\alpha t + \lambda_\alpha) \sum_p m_p n_p a_p^2 c_{p\alpha}^2, \end{cases}$$

et ces deux equations sont propres à déterminer les constantes $\rho_\alpha, \lambda_\alpha$ lorsqu'on se donne les valeurs des η_p, ϖ_p pour l'epoque t En éliminant t entre ces deux equations, on a l'intégrale

$$\sum_{pq} m_p m_q n_p n_q a_p^2 a_q^2 c_{p\alpha} c_{q\alpha} \eta_p \eta_q \cos(\varpi_p - \varpi_q) = 4\rho_\alpha^2 \left(\sum_p m_p n_p a_p^2 c_{p\alpha}^2\right)^2,$$

la sommation du premier membre etant appliquee a tous les arrangements deux à deux des indices p, q

En revenant aux valeurs de $\eta_p \cos \varpi_p$, $\eta_p \sin \varpi_p$, il vient encore

$$\eta_p^2 = 4 \sum_{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta c_{p\alpha} c_{p\beta} \cos[(g_\alpha - g_\beta)t + \lambda_\alpha - \lambda_\beta],$$

la sommation étant appliquée à tous les arrangements deux à deux des indices α, β, et aussi

$$\operatorname{tang} \varpi_p = - \frac{\sum_\alpha \rho_\alpha c_{p\alpha} \sin(g_\alpha t + \lambda_\alpha)}{\sum_\alpha \rho_\alpha c_{p\alpha} \cos(g_\alpha t + \lambda_\alpha)}.$$

La première de ces formules montre que l'excentricité η_p ne saurait dépasser la limite

$$2 \sum_\alpha | \rho_\alpha c_{p\alpha} |,$$

quant à la seconde, elle offre un résultat intéressant dans le cas où l'un des coefficients $\rho_\alpha c_{p\alpha}$ est supérieur en valeur absolue à la somme des valeurs absolues de tous les autres On peut écrire en effet

$$\operatorname{tang}(\varpi_p + g_\alpha t + \lambda_\alpha) = \frac{\sum_\beta \rho_\beta c_{p\beta} \sin[(g_\alpha - g_\beta)t + \lambda_\alpha - \lambda_\beta]}{\rho_\alpha c_{p\alpha} + \sum_\beta \rho_\beta c_{p\beta} \cos[(g_\alpha - g_\beta)t + \lambda_\alpha - \lambda_\beta]},$$

l'indice β étant différent de α, si donc on a

$$| \rho_\alpha c_{p\alpha} | > \sum_\beta | \rho_\beta c_{p\beta} |,$$

le dénominateur du second membre ne peut s'annuler, et par suite l'angle $\varpi_p + g_\alpha t + \lambda_\alpha$ reste constamment compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ou bien entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$, par exemple, en d'autres termes, la longitude ϖ_p a une valeur moyenne égale à $-(g_\alpha t + \lambda_\alpha)$, ou bien $\pi - (g_\alpha t + \lambda_\alpha)$, c'est-à-dire encore un moyen mouvement égal à $-g_\alpha$

S'il en était de même pour une seconde planète M_q, et pour le même indice α, la différence $\varpi_p - \varpi_q$ aurait pour valeur moyenne zéro ou π il y aurait *libration* pour cet argument

Ajoutons enfin que la formule (3) nous donne l'intégrale

$$(6) \qquad \sum_p m_p n_p a_p^{\frac{1}{2}} \eta_p^2 = \text{const},$$

et d'après la valeur de η_p^2, la constante du second membre est égale à

$$4\sum_\alpha \left[\rho_\alpha^2 \sum_p m_p n_p a_p^{\frac{1}{2}} c_{p\alpha}^2\right]$$

Tout ce que nous venons de dire peut être répété, avec les changements nécessaires de notations, sur les équations (2) et (2') et les variables γ_p, γ'_p. Les équations (5) deviennent

$$(7) \qquad \left(g - \sum_q \frac{f m_q b'_{pq}}{n_p a_p^{\frac{1}{2}} \sqrt{a_p a_q}}\right) C_p + \sum_q \frac{f m_q b'_{pq}}{n_p a_p^{\frac{1}{2}} \sqrt{a_p a_q}} C_q = 0,$$

et par suite sont vérifiées pour

$$g = 0, \qquad C_1 = C_2 = C_3 = \ldots;$$

c'est la seule particularité qui soit à signaler; disons encore que l'intégrale (6) devient ici

$$(8) \qquad \sum_p m_p n_p a_p^{\frac{1}{2}} \sin^2 \frac{j_p}{2} = \text{const}.$$

Il est aisé de justifier *a priori* la présence d'une racine nulle pour l'équation $F(g) = 0$. Imaginons que l'on change le plan fondamental auquel sont rapportées les orbites, et que le nouveau plan soit défini par rapport à l'ancien à l'aide de son inclinaison j^0 et de la longitude de son nœud ascendant θ^0, prenons de plus ce nœud ascendant pour origine des nouvelles longitudes. Les quantités j_p, θ_p, γ_p, γ'_p seront remplacées par j_p^0, θ_p^0, γ_p^0, $\gamma_p'^0$, et la considération du trièdre formé par les deux plans fondamentaux et celui de l'orbite de M_p conduit immédiatement aux relations suivantes, en négligeant toujours les quantités d'ordre supérieur par rapport aux diverses inclinaisons,

$$\sin j_p^0 \sin \theta_p^0 = \quad \sin j_p \sin(\theta_p - \theta^0),$$
$$\sin j_p^0 \cos \theta_p^0 = -\sin j^0 + \sin j_p \cos(\theta_p - \theta^0),$$

c'est-à-dire

$$\gamma_p^0 = -\sin\frac{j^0}{2} + \gamma_p e^{i\theta^0}, \qquad \gamma_p'^0 = -\sin\frac{j^0}{2} + \gamma'_p e^{-i\theta^0}.$$

Mais les quantités $\gamma_p^0, \gamma_p'^0$ doivent nécessairement avoir la même forme que γ_p, γ_p', il faut donc, de toute évidence, que l'une des exponentielles e^{igt} se réduise à une constante, c'est-à-dire que l'une des quantités g soit nulle

Supposons que la valeur commune des constantes C_1, C_2, C_3, qui correspondent à la racine nulle de l'équation $F(g) = 0$, soit de la forme $\rho e^{i\lambda}$, ρ et λ étant des quantités réelles, si l'on détermine le nouveau plan fondamental de façon que

$$\rho = \sin\frac{J^0}{2}, \qquad \theta_0 = -\lambda,$$

on voit que les quantités $\gamma_p^0, \gamma_p'^0$ ne contiendront plus aucun terme constant Par suite encore, le plan fondamental primitif sera ce plan spécial, si, d'après les équations analogues à (α), on a, à un instant quelconque, et par suite toujours,

$$(\beta) \qquad \sum_p m_p n_p a_p^{\frac{1}{2}} \sin\frac{J_p}{2}\cos\theta_p = 0, \qquad \sum_p m_p n_p a_p^{\frac{1}{2}} \sin\frac{J_p}{2}\sin\theta_p = 0$$

Il est inutile d'écrire explicitement les équations qui déterminent finalement les longitudes moyennes l_p On constate immédiatement, en se bornant toujours aux termes d'ordre inférieur par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, que la valeur de l_p se compose d'un argument linéaire par rapport au temps, et de termes du second degré par rapport aux excentricités, ou bien par rapport aux inclinaisons (sans que ces deux sortes d'éléments puissent se mélanger), dépendant des sinus des différences mutuelles des arguments $g_\alpha t + \lambda_\alpha$ relatifs aux excentricités, ou bien aux inclinaisons, l'intégration amenant d'ailleurs les diviseurs tels que $g_\alpha - g_\beta$

117 On peut retrouver directement quelques-uns des résultats que nous venons d'obtenir, et même sous une forme plus générale, en appliquant simplement le théorème des moments des quantités de mouvement au système formé par le Soleil O et les planètes M_p, réduits à des points matériels

Soient x_p, y_p, z_p les coordonnées de M_p par rapport à des axes d'origine O, X_p, Y_p, Z_p les coordonnées du même point par rapport à des axes parallèles aux précédents, ayant pour origine le centre de gravité G du système considéré, de plus, par rapport à ces derniers

axes, X, Y, Z seront les coordonnees du Soleil, dont la masse est l'unite, de sorte que

$$X_p = x_p + X, \qquad , \qquad X(1 + \Sigma m_p) + \Sigma m_p x_p = 0,$$

l'indice p prenant toutes les valeurs possibles dans les sommations Le systeme etant soustrait à toute action exterieure, le theoreme des aires a lieu par rapport à un plan quelconque passant par G, et pour ce point consideré comme centre des aires En choisissant GXY pour ce plan, et marquant par un accent les derivees par rapport au temps, on a donc

$$XY' - X'Y + \Sigma m_p (X_p Y'_p - X'_p Y_p) = \text{const},$$

c'est-à-dire, d'apres les relations precedentes,

$$\Sigma m_p (x_p y'_p - x'_p y_p) - \frac{1}{1 + \Sigma m_p} (\Sigma m_p x_p \Sigma m_p y'_p - \Sigma m_p x'_p \Sigma m_p y_p) = \text{const},$$

ou bien encore

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\Sigma m_p (x_p y'_p - x'_p y_p) \\ &\quad + \Sigma m_p m_q [(x_p - x_q)(y'_p - y'_q) - (x'_p - x'_q)(y_p - y_q)] = \text{const}, \end{aligned}$$

en étendant la derniere sommation à tous les indices p et q

En regardant, comme au n° 94, les masses m_p comme etant du même ordre de grandeur qu'un certain paramètre μ, reprenons pour un instant les développements obtenus dans ce paragraphe pour les eléments des planetes M_p, et remplaçons t par $\frac{t'}{\mu}$ partout où il figure en dehors des arguments tels que l_0 D'après les propriétés reconnues de ces developpements, ils procéderont maintenant suivant les puissances entières *non negatives* de t' et de μ, et en y faisant $\mu = 0$, on obtiendra precisément leurs parties seculaires principales, telles que nous les avons definies au début de ce Chapitre

Les coordonnées x_p, y_p et leurs derivees x'_p, y'_p sont des fonctions des éléments, qui se developperont de même Portons leurs valeurs dans l'équation precédente (9), et après l'avoir divisée par μ, faisons $\mu = 0$ le premier membre demeurera une constante D'autre part, nous savons que l'on a géneralement

$$x_p y'_p - x'_p y_p = n_p a_p^2 \cos j_p \sqrt{1 - \eta_p^2},$$

en appelant n_p, a_p, η_p, J_p les valeurs osculatrices du moyen mouvement, du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison (par rapport au plan Oxy) de la planète M_p.

L'intégrale (9) deviendra donc

$$\Sigma m_p n_p a_p^2 \cos J_p \sqrt{1-\eta_p^2} = \text{const.},$$

les éléments étant réduits à leurs valeurs séculaires principales, et ceci aura lieu d'ailleurs quelle que soit la grandeur des excentricités et des inclinaisons.

Si l'on suppose maintenant que ces quantités sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs quatrièmes puissances et les produits de leurs carrés, il vient

$$\Sigma m_p n_p a_p^2 \left(1 - \frac{1}{2}\eta_p^2 - 2\sin^2\frac{J_p}{2}\right) = \text{const.},$$

et comme dans l'hypothèse ici faite les n_p et a_p sont des constantes, comme d'autre part les constantes arbitraires qui figurent dans les expressions des η_p et dans celles des $\sin\frac{J_p}{2}$ sont entièrement distinctes, on retrouve immédiatement les intégrales (6) et (8) du numéro précédent.

Supposons que le plan des xy, sur lequel nous avons pris l'intégrale des aires (9), soit le plan du maximum des aires, c'est-à-dire soit perpendiculaire au vecteur des aires, constant en grandeur et direction. En projetant alors ce vecteur sur les deux axes Ox, Oy, on aura les deux équations analogues à (9)

$$\Sigma m_p(y_p z'_p - y'_p z_p) + \quad = 0, \qquad \Sigma m_p(x_p z'_p - x'_p z_p) + \quad = 0,$$

les constantes des seconds membres étant nulles.

En raisonnant alors comme plus haut, il vient, d'après les expressions connues des quantités $y_p z'_p - y'_p z_p$, $x_p z'_p - x'_p z_p$,

$$\Sigma m_p n_p a_p^2 \sin J_p \sin\theta_p \sqrt{1-\eta_p^2} = 0, \qquad \Sigma m_p n_p a_p^2 \sin J_p \cos\theta_p \sqrt{1-\eta_p^2} = 0,$$

θ_p étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de M_p sur le plan des xy.

Laissant de côté les termes d'ordre supérieur par rapport aux

excentricites et inclinaisons, on a plus simplement

$$\Sigma m_p n_p a_p^2 \sin\frac{J_p}{2}\sin\theta_p = 0, \qquad \Sigma m_p n_p a_p^2 \sin\frac{J_p}{2}\cos\theta_p = 0,$$

et en comparant ces resultats aux equations (β) du numero precedent, on voit que le plan special considere a l'occasion de ces formules n'est autre que le plan du maximum des aires

118 La theorie que nous venons d'esquisser montre comment on peut remplacer les termes seculaires principaux de la theorie des planetes par des termes periodiques, au moins quand on néglige les puissances superieures des excentricites et des inclinaisons, inversement, en developpant ces termes periodiques suivant les puissances du temps, c'est-a-dire en faisant par exemple

$$\sin(g_\alpha t + \lambda_\alpha) = \sin\lambda_\alpha + g_\alpha t \cos\lambda_\alpha - \frac{g_\alpha^2 t^2}{2}\sin\lambda_\alpha - $$

on retrouverait les termes seculaires principaux sous leur forme primitive

On peut deduire de cette transformation des termes seculaires en termes periodiques, nombre de conclusions interessantes sur la stabilite du système solaire, et sur son etat passe et futur nous n'y insisterons pas, car elles ne sont pas a l'abri de toute objection

On peut se demander si elles subsisteraient quand on va plus avant dans les approximations En premier lieu, en se bornant toujours à la consideration des termes seculaires principaux, il faut tenir compte des puissances superieures des excentricites et des inclinaisons il est possible alors de montrer, en prenant pour point de depart la premiere approximation obtenue ci-dessus, et en se servant des theoremes generaux du Chapitre II, que la forme periodique subsiste encore, au moins formellement, par rapport a l'ensemble des arguments $g_\alpha t + \lambda_\alpha$ deja introduits, mais a la condition de modifier convenablement les quantites g_α

En second lieu, on peut ensuite faire voir, en suivant toujours les mêmes principes, qu'il est possible de faire disparaître complètement les termes seculaires de la solution generale du mouvement des planetes, en la mettant sous forme purement périodique, dependant des longitudes moyennes et des arguments $g_\alpha t + \lambda_\alpha$ encore modifies

Malheureusement, ces résultats sont purement formels, et dénués de valeur pratique.

Cependant, ils peuvent s'appliquer à d'autres problèmes analogues, et en constituer alors la véritable solution, aussi bien au point de vue pratique qu'au point de vue théorique, en raison des circonstances particulières qui s'offrent alors. C'est ce qui arrive notamment pour la théorie du mouvement de la Lune et pour celle des satellites de Jupiter, que nous exposerons ultérieurement toutes deux avec les détails nécessaires. Aussi, nous bornerons-nous à ce qui précède relativement à la théorie des grosses planètes.

119. La solution générale du mouvement des planètes, telle que nous l'avons développée dans les Chapitres précédents, présente encore des difficultés, en raison des petits diviseurs qui affectent les inégalités à longue période, ainsi que nous l'avons vu au numéro 95. De tels petits diviseurs peuvent compenser, au moins partiellement, la petitesse des masses perturbatrices, et pour avoir une approximation satisfaisante, il peut devenir nécessaire d'envisager des termes d'ordre supérieur par rapport à ces masses, et de degré assez élevé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. A la vérité, la longueur de leur période permettrait de regarder ces termes comme des constantes s'il ne s'agissait que de représenter le mouvement pendant un court espace de temps, mais il n'en saurait être de même, dès que la prévision du mouvement doit être étendue à plus longue échéance, et il importe alors de les considérer de plus près. Comme pour les termes séculaires principaux, nous allons montrer, en suivant encore H. Poincaré, qu'il est possible de définir chaque ensemble de termes à longue période d'influence prépondérante par un système d'équations différentielles simples, que l'on pourra ensuite chercher à intégrer sous une forme nouvelle, mettant en évidence les propriétés véritables de la solution.

Reportons-nous encore aux nos 94 et 95, soit θ un argument de la forme $sl + s'l' + \dots$, et $\theta_0 = sl_0 + s'l'_0 + \dots$ à θ ou θ_0 correspond le diviseur d, égal à $sn_0 + s'n'_0 + \dots$ (en convenant encore ici de prendre $\nu_0 = n_0$, $\nu'_0 = n'_0$, $\dots$). Nous regarderons d'ailleurs comme étant les mêmes deux diviseurs dont le rapport est indépendant des quantités n_0, n'_0, $\dots$ regardées comme des paramètres quelconques ; et par suite, tous les arguments de même diviseur d seront les mul-

tiples de θ ou θ_0, et ces multiples seulement, si l'on suppose les entiers s, s', , premiers entre eux dans leur ensemble

Designons par (N), (H), (L), les parties des fonctions N, H, L, qui dépendent de l'argument θ et de ses multiples, et soient $(\mathrm{N})_0$, $(\mathrm{H})_0$, $(\mathrm{L})_0$, les valeurs de (N), (H), (L), , quand on y fait $n = n_0$, $h = h_0$, $l = l_0$, Appelons *classe* d'un terme quelconque de perturbation la somme de son rang (c'est-a-dire son degre par rapport a t), et de son degre par rapport a $\frac{1}{d}$, c'est-a-dire l'exposant entier, positif ou nul, avec lequel figure d dans le denominateur de ce terme Convenons encore d'effectuer toutes les quadratures sans addition de constantes superflues, de sorte que n_1, h_1, l_1, , n_2, h_2, l_2, n'ont pas de termes constants, en d'autres termes, n_0, h_0, l_{00}, sont les valeurs moyennes des inconnues n, l, h, pour $t = 0$

Si l'on se reporte aux equations (6) du n° 94, on voit que h_1 contient des termes de classe nulle et des termes de classe 1, ceux-ci egaux a $\int [\overline{\mathrm{H}}_0 + (\mathrm{H})_0]\, dt$, en donnant a $\overline{\mathrm{H}}_0$ le même sens que ci-dessus, au n° 115, de même, n_1 contient, outre des termes de classe nulle, des termes de classe 1, egaux a $\int (\mathrm{N})_0\, dt$, enfin, l_1 contient des termes des classes 0, 1, 2, ces derniers etant simplement $\iint (\mathrm{N})_0\, dt^2$

Observons maintenant que l'integration d'un terme quelconque, constant, periodique, seculaire ou mixte, ne peut augmenter sa classe de plus d'une unite, et qu'elle l'augmente en effet d'une unite si ce terme est constant ou seculaire, et aussi s'il est periodique ou mixte, mais dependant de l'argument θ_0 ou de ses multiples on voit alors tout de suite que les termes de classe maxima seront de classe 3 dans n_2 et h_2, de classe 4 dans l_2, et generalement, de classe $2p - 1$ dans n_p et h_p, de classe $2p$ dans l_p Designons ces termes de classe maxima, pour chaque ordre, par (h_p), (n_p), (l_p), et cherchons a les determiner On a d'abord, comme nous l'avons deja dit,

$$\frac{d(h_1)}{dt} = \overline{\mathrm{H}}_0 + (\mathrm{H})_0, \qquad \frac{d(n_1)}{dt} = (\mathrm{N})_0, \qquad \frac{d(l_1)}{dt} = (n_1), \qquad ,$$

puis evidemment, d'apres le developpement general de la fonc

tion X_1,

$$\frac{d(h_2)}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{H})_0}{\partial l_0}(l_1) + \frac{\partial(\mathrm{H})_0}{\partial l'_0}(l'_1) + \ldots$$

$$\frac{d(n_2)}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{N})_0}{\partial l_0}(l_1) + \frac{\partial(\mathrm{N}_0)}{\partial l'_0}(l'_1) + \ldots,$$

$$\frac{d(l_2)}{dt} = (n_2),$$

de même ensuite

$$\frac{d(h_3)}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{H})_0}{\partial l_0} l_2 + \frac{\partial(\mathrm{H})_0}{\partial l'_0} l'_2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{H})_0}{\partial l_0^2}[(l)_1]^2 + \ldots + \frac{\partial^2(\mathrm{H})_0}{\partial l_0\,\partial l'_0}(l_1)(l'_1) + \ldots,$$

$$\frac{d(n_3)}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{N})_0}{\partial l_0} l_2 + \frac{\partial(\mathrm{N})_0}{\partial l'_0} l'_2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{N})_0}{\partial l_0^2}[(l_1)]^2 + \ldots + \frac{\partial^2(\mathrm{N})_0}{\partial l_0\,\partial l'_0}(l_1)(l'_1) + \ldots,$$

$$\frac{d(l_3)}{dt} = (n_3),$$

Si donc on appelle (h), (n), (l), ... les éléments h, n, l, ..., réduits à leurs parties d'ordre zéro augmentées de leurs perturbations de classe maxima dans chaque ordre, soit

$$(h) = h_0 + \mu(h_1) + \mu^2(h_2) + \ldots,$$
$$(n) = n_0 + \mu(n_1) + \mu^2(n_2) + \ldots,$$
$$(l) = l_0 + \mu(l_1) + \mu^2(l_2) + \ldots,$$
$$\ldots,$$

et si l'on désigne par $(\mathrm{H})^0$, $(\mathrm{N})^0$, ... les fonctions (H), (N), ..., dans lesquelles on remplace les n, h, ... par n_0, h_0, ... et les l, ... par (l), on voit que les nouvelles inconnues (n), (l), ... sont déterminées séparément par le système d'équations différentielles

$$(\lambda) \qquad \frac{d(n)}{dt} = \mu(\mathrm{N})^0, \qquad \frac{d(l)}{dt} = (n), \qquad \ldots,$$

et que l'on obtient ensuite les (h) par les quadratures

$$\frac{d(h)}{dt} = \mu\,[\overline{\mathrm{H}}_0 + (\mathrm{H})^0],$$

Il serait d'ailleurs facile de substituer aux n, n', ... d'autres variables équivalentes ν, ν', ... fonctions des premières, les premières équations (λ) garderaient la même forme, et dans les secondes, on

aurait simplement, en appelant $\nu_0, \nu'_0, \ldots$ ce que deviennent $\nu, \nu', \ldots$ pour $n = n_0$, $n' = n'_0, \ldots$,

$$(n) = n_0 + \frac{\partial n_0}{\partial \nu_0}[(\nu) - \nu_0] + \frac{\partial n_0}{\partial \nu'_0}[(\nu') - \nu'_0] + \ldots,$$

puisque, si le produit de deux ou plusieurs perturbations des $n, n', \ldots$ est d'ordre p, sa classe est certainement inférieure à $2p - 1$.

Tout ce que nous venons de dire s'étend de soi-même au cas où l'on considérerait à la fois plusieurs diviseurs distincts $d, d', \ldots$, en nombre inférieur à celui des quantités $l, l', \ldots$. Il faudrait simplement regarder comme équivalents tous les diviseurs liés à $d, d', \ldots$, par une relation linéaire et homogène indépendante de $n_0, n'_0, \ldots$, et appeler (N), (H), (L), ... les parties des fonctions N, H, L, ... qui dépendent des arguments θ correspondant à tous ces diviseurs.

LIVRE IV.

THÉORIE DE LA LUNE

CHAPITRE XIX.

GÉNÉRALITÉS. — ÉTUDE DE LA VARIATION.

120. L'étude du mouvement de la Lune autour de la Terre es
des principaux problèmes de la Mécanique Céleste, et doit pr
place immédiatement après la théorie des grosses planètes.

Nous avons vu au Chapitre I, n° 5, que le mouvement relatif
Lune par rapport à la Terre était celui d'un point matériel de
égale à l'unité, sous l'action d'une certaine fonction de forces
nous avons donné l'expression générale. Laissons d'abord de
dans cette fonction les termes qui proviennent de la forme
Terre et de celle de la Lune, ainsi que ceux qui sont dus à la pré
des grosses planètes. Désignons alors par S, T, L les centres d
vité du Soleil, de la Terre et de la Lune, par M', M_0, M les n
respectives de ces trois astres, par G le centre de gravité du sy
Terre-Lune, par r la distance TL, rayon vecteur de la Lune,
la distance GS, enfin par H l'angle des vecteurs TL et GS. La
tion de forces considérée se réduit à

$$\begin{aligned}
U = {} & \frac{f(M_0+M)}{r} + fM'\frac{r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H - \frac{1}{2}\right) \\
& + fM'\beta'\frac{r^3}{r'^4}\left(\frac{5}{2}\cos^3 H - \frac{3}{2}\cos H\right) \\
& + fM'\beta''\frac{r^4}{r'^5}\left(\frac{35}{8}\cos^4 H - \frac{15}{4}\cos^2 H + \frac{3}{8}\right) \\
& + fM'\beta'''\frac{r^5}{r'^6}\left(\frac{63}{8}\cos^5 H - \frac{35}{4}\cos^3 H + \frac{15}{8}\cos H\right) + \ldots
\end{aligned}$$

en posant encore

$$\nu = \frac{M}{M_0 + M}, \qquad \beta' = 1 - 2\nu, \qquad \beta'' = 1 - 3\nu + 3\nu^2,$$
$$\beta''' = 1 - 4\nu + 6\nu^2 - 4\nu^3.$$

Supposons maintenant que le mouvement de S par rapport au point G soit un mouvement képlérien de moyen mouvement n', de demi-grand axe a', de longitude moyenne $N' = n't + l'_0$, et supposons de plus que l'on ait $f M' = n'^2 a'^3$.

L'étude du mouvement défini par la fonction de forces U ainsi comprise est un problème bien déterminé et délimité : c'est la *théorie solaire* du mouvement de la Lune. Pour avoir la théorie complète de ce mouvement, il sera nécessaire de tenir compte ensuite de la vraie valeur de $f M'$, des perturbations qu'il faut ajouter au mouvement supposé de S pour représenter son mouvement réel, de l'action des planètes, et enfin de la forme de la Terre comme de celle de la Lune.

121. On a proposé bien des méthodes pour résoudre le problème que nous venons de définir : les difficultés proviennent de la grandeur des inégalités du mouvement. Pour éviter des développements en série presque impraticables, il faut renoncer à prendre le mouvement képlérien comme base des approximations ; il faut aussi abandonner l'usage direct de l'ensemble des coordonnées polaires, mais profiter de la simplicité de l'emploi des coordonnées rectangulaires, surtout pour le développement de la fonction U. Pour obtenir une bonne solution, il faut encore éviter les inconvénients d'une théorie purement analytique, aussi bien que ceux d'une théorie purement numérique, en se donnant la possibilité de calculer directement les valeurs numériques de certains coefficients représentés analytiquement par des séries trop peu convergentes. Tels sont les principes qui nous guideront dans la théorie que nous allons exposer, dont une partie importante est empruntée aux travaux si remarquables de G.-W. Hill et de M. E.-W. Brown.

Soient TX, TY, TZ trois axes rectangulaires menés par la Terre T parallèlement à des directions fixes : les coordonnées de la Lune, c'est-à-dire du point L, par rapport à ces axes seront X, Y, Z.

Si GX', GY', GZ' sont des axes parallèles aux précédents, mais d'origine G, nous supposerons que le mouvement du Soleil S s'effectue dans le plan GX'Y', sa longitude étant comptée à partir de GX'.

Faisons tourner les axes TX, TY dans leur plan autour du point T, d'un angle egal a la longitude moyenne N′ du Soleil, et appelons X_0, Y_0 les coordonnees de L par rapport a leurs nouvelles positions mobiles TX_0, TY_0, la fonction U etant exprimee maintenant a l'aide de X_0, Y_0, Z, de N′ et des coordonnees du Soleil par rapport a GX′, GY′, la theorie elementaire du mouvement relatif donne immediatement les equations

$$\frac{d^2X_0}{dt^2} - 2n'\frac{dY_0}{dt} - n'^2X_0 = \frac{\partial U}{\partial X_0},$$
$$\frac{d^2Y_0}{dt^2} + 2n'\frac{dX_0}{dt} - n'^2Y_0 = \frac{\partial U}{\partial Y_0},$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Z}$$

Designons par a une longueur constante qui sera precisee ultérieurement, et faisons

$$x = \frac{X_0 + iY_0}{a}, \qquad y = \frac{X_0 - iY_0}{a}, \qquad z = \frac{iZ}{a},$$

de sorte que

$$X = \frac{a}{2}(xe^{iN'} + ye^{-iN'}), \qquad Y = \frac{a}{2i}(xe^{iN'} - ye^{-iN'}), \qquad Z = \frac{az}{i}$$

Appelons $N = nt + l_0$ un argument qui representera la longitude moyenne de la Lune, comptée dans le plan TXY a partir de TX, n et l_0 sont deux constantes arbitraires Faisons

$$m = \frac{n'}{n - n'}, \qquad \tau = i(N - N'),$$

et employons la caracteristique D comme signe de derivation par rapport a la variable τ

Les equations precédentes se transforment immediatement en

$$D^2x + 2mDx + m^2x + \frac{2}{(n-n')^2a^2}\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$
$$D^2y - 2mDy + m^2y + \frac{2}{(n-n')^2a^2}\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$
$$D^2z - \frac{1}{(n-n')^2a^2}\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Envisageons maintenant la fonction U, et posons d'abord

$$f(M_0 + M) = \mathbf{k}(n - n')^2 a^3,$$

de sorte que la détermination de $\mathbf{k}$ est équivalente à celle de a.

Faisons encore

$$\frac{a}{r} = \rho, \qquad \frac{a'}{r'} = \rho', \qquad \frac{a}{a'} = \alpha,$$

et en appelant v' la longitude du Soleil, dont le mouvement s'effectue, comme nous l'avons dit, dans le plan GX'Y', soit

$$v' = N' + \frac{\lambda'}{i}$$

On a

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{\rho^2} = xy - z^2,$$

$$\frac{r}{a}\cos H = \frac{X}{a}\cos v' + \frac{Y}{a}\sin v' = \frac{1}{2}(x e^{-i\lambda'} + y e^{i\lambda'})$$

Il en résulte sans peine que l'on peut écrire

$$\frac{U}{(n-n')^2 a^2} = \mathbf{k}\rho + \frac{m^2}{4}(xy + 2z^2) + \frac{3m^2}{8}(x^2 + y^2) + F,$$

avec

$$\begin{aligned}
F = {} & \frac{m^2}{4}(\rho'^3 - 1)(xy + 2z^2) + \frac{3m^2}{8}(\rho'^3 e^{-2i\lambda'} - 1)\,x^2 + \frac{3m^2}{8}(\rho'^3 e^{2i\lambda'} - 1)\,y^2 \\
& + \alpha\beta' m^2 \Big[\frac{5}{16}\rho'^4 (x^3 e^{-3i\lambda'} + y^3 e^{3i\lambda'}) \\
& \qquad + \frac{3}{16}\rho'^4 (x e^{-i\lambda'} + y e^{i\lambda'})(xy + 4z^2) \Big] \\
& + \alpha^2\beta'' m^2 \Big[\frac{35}{128}\rho'^5 (x^4 e^{-4i\lambda'} + y^4 e^{4i\lambda'}) \\
& \qquad + \frac{5}{32}\rho'^5 (x^2 e^{-2i\lambda'} + y^2 e^{2i\lambda'})(xy + 6z^2) \\
& \qquad\qquad + \frac{9}{64}\rho'^5 \left(x^2y^2 + 8xyz^2 + \frac{8}{3}z^4 \right) \Big] \\
& + \alpha^3\beta''' m^2 \Big[\frac{63}{256}\rho'^6 (x^5 e^{-5i\lambda'} + y^5 e^{5i\lambda'}) \\
& \qquad + \frac{35}{256}\rho'^6 (x^3 e^{-3i\lambda'} + y^3 e^{3i\lambda'})(xy + 8z^2) \\
& \qquad + \frac{15}{128}\rho'^6 (x e^{-i\lambda'} + y e^{i\lambda'})(x^2y^2 + 12xyz^2 + 8z^4) \Big] \\
& + \ldots
\end{aligned}$$

Les fonctions de ρ' et λ' qui figurent dans F s'expriment facilement à l'aide de N', comme l'on sait nous y reviendrons en temps utile

Comme on a

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{1}{2}\rho^3 y, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = -\frac{1}{2}\rho^3 x, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial z} = \rho^3 z,$$

les equations du mouvement deviennent finalement

$$(1)\quad \begin{cases} D^2x + 2mDx + \dfrac{3}{2}m^2(x+y) - k\rho^3 x + 2\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ D^2y - 2mDy + \dfrac{3}{2}m^2(x+y) - k\rho^3 y + 2\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad D^2z - m^2z - k\rho^3 z - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

En les multipliant respectivement par Dy, Dx, $-2Dz$, ajoutant et integrant, on en tire, en representant generalement par $D^{-1}f$ l'intégrale $\int f\,d\tau$,

$$(3)\quad DxDy - (Dz)^2 + \frac{3}{4}m^2(x+y)^2 + m^2z^2 + 2k\rho$$
$$+ 2F - 2mD^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial(\iota N')}\right) = 0,$$

en effet, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}Dx + \frac{\partial F}{\partial y}Dy + \frac{\partial F}{\partial z}Dz = DF - \frac{\partial F}{\partial \tau},$$

en appelant $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ la dérivee par rapport a τ de la fonction F ecrite ci-dessus, et consideree comme dependante de x, y, z et de τ, comme d'ailleurs τ n'y figure que par l'intermediaire de ρ' et λ' qui sont fonctions de N', on a

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial F}{\partial(\iota N')}D(\iota N') = m\frac{\partial F}{\partial(\iota N')}$$

Cette équation (3) est l'*intégrale de Jacobi*, que nous avons déjà rencontrée au n° 73, bien entendu, la quadrature qui y figure comporte une constante qu'il est inutile de mettre en evidence, et il en sera de même dans tous les cas semblables

La constante a sera choisie tres voisine de la distance moyenne de la Terre a la Lune, si la Lune decrivait autour de la Terre un cercle

de rayon a dans le plan TXY, avec la longitude N, ce qui n'est qu'une très grossière approximation, on aurait simplement

$$x = \theta, \qquad y = \theta^{-1}, \qquad z = 0,$$

en faisant

$$\theta = e^{i(N - N')} = e^{\tau}$$

En conséquence, nous emploierons, en même temps que x, y, un autre couple de variables équivalentes, p, q, telles que

$$x = \theta p, \qquad y = \theta^{-1} q,$$

et nous ferons aussi

$$p = \xi + \eta, \qquad q = \xi - \eta$$

Les coordonnées rectilignes s'expriment immédiatement à l'aide de p et q sous la forme

$$X = \frac{a}{2}(pe^{iN} + qe^{-iN}), \qquad Y = \frac{a}{2i}(pe^{iN} - qe^{-iN})$$

Si l'on désigne par v la longitude de la Lune comptée à partir de TX dans le plan TXY, et par s sa latitude, et que l'on fasse

$$v = N + \frac{\lambda}{i}, \qquad s = \frac{\sigma}{i},$$

on a encore

$$p = \frac{1}{\rho} e^{\lambda} \operatorname{ch} \sigma, \qquad q = \frac{1}{\rho} e^{-\lambda} \operatorname{ch} \sigma,$$

$$\xi = \frac{1}{\rho} \operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \sigma, \qquad \eta = \frac{1}{\rho} \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \sigma, \qquad z = \frac{1}{\rho} \operatorname{sh} \sigma,$$

en représentant par ch et sh le cosinus et le sinus hyperboliques

Nous ferons tout particulièrement usage de la *parallaxe* ρ, égale à $(pq - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ou encore à $(\xi^2 - \eta^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ en réalité, la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, soit ϖ, est définie par la relation

$$\sin \varpi = \frac{b}{a} \rho,$$

en désignant par b le rayon équatorial terrestre, mais tant qu'il n'y a pas de confusion à craindre, on peut donner sans inconvénient à ρ le nom de parallaxe

La longitude v (ou λ) et la latitude s (ou σ) ne jouent aucun rôle essentiel dans la théorie nous joindrons cependant leurs valeurs à

celles des autres coordonnées, afin de nous conformer aux usages astronomiques.

Il est bon d'observer une fois pour toutes, dès maintenant, que les coordonnées x et y, de même que p et q, sont des quantités respectivement conjuguées, ξ, ρ sont des quantités réelles, et λ, η, z, σ sont purement imaginaires.

122. En prenant pour unité de temps l'année julienne, on a d'après Hill et Brown, pour l'époque 1850,0,

$$n = 17325594'',06, \qquad n' = 1295977'',415,$$

d'où

$$m = 0,08084\,89338, \qquad m^2 = 0,00653\,65501.$$

De plus, si l'on fait

$$f(M_0 + M) = n^2 a_0^3,$$

et si l'on appelle ε' l'excentricité de l'orbite solaire, on a

$$\frac{b}{a_0} = 3419'',596, \qquad \frac{b}{a} = 8'',7800, \qquad \frac{M_0}{M} = 81,500, \qquad \varepsilon' = 0,01677191.$$

La constante a étant très voisine de a_0, il en résulte que le nombre $\alpha\beta'$ vaut $\frac{1}{400}$, à très peu près.

On voit tout de suite, d'après ces données, que la fonction F est toujours fort petite par rapport à la première partie de $\frac{U}{(n-n')^2 a^2}$, puisque celle-ci reste évidemment voisine de l'unité, tandis que les différents termes de F sont au moins de l'ordre de $\varepsilon' m^2$ ou de αm^2. Nous pouvons donc commencer l'étude du problème en négligeant la fonction F. On pourrait même penser que la petitesse assez marquée de m^2 permettrait de négliger tout d'abord les termes qui contiennent ce facteur dans les équations (1) et (2), de sorte que l'on retomberait en réalité sur un mouvement keplerien comme première approximation, mais la suite montrera suffisamment qu'il n'en est rien.

Prenons donc les équations (1) et (2) en y laissant de côté les termes qui dépendent de F, et cherchons d'abord la solution x_0, y_0, z_0, de ces équations qui ne dépend d'aucune nouvelle constante arbi-

trait. On a évidemment $z_0 = 0$, et x_0, y_0 vérifient les équations

$$(4)\quad \begin{cases} D^2 x_0 + 2m\, Dx_0 + \frac{3}{2} m^2 (x_0 + y_0) - \mathbf{k}\rho_0^3\, x_0 = 0, \\ D^2 y_0 - 2m\, Dy_0 + \frac{3}{2} m^2 (x_0 + y_0) - \mathbf{k}\rho_0^3\, y_0 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\rho_0 = (x_0 y_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

En mettant plutôt en évidence p_0 et q_0, et observant que $D\theta = \theta$, on peut encore écrire, en introduisant pour la commodité du raisonnement une quantité m' égale en réalité à m,

$$(4\ bis)\quad \begin{cases} D^2 p_0 + 2(1+m) Dp_0 + \left(1 + 2m + \frac{3}{2} m^2\right) p_0 - \mathbf{k}\rho_0^3 p_0 = -\frac{3}{2} m'^2 q_0 \theta^{-2}, \\ D^2 q_0 - 2(1+m) Dq_0 + \left(1 + 2m + \frac{3}{2} m^2\right) q_0 - \mathbf{k}\rho_0^3 q_0 = -\frac{3}{2} m'^2 p_0 \theta^2, \end{cases}$$

avec

$$\rho_0 = (p_0 q_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on néglige m'^2, et si l'on prend $\mathbf{k} = 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2$, ces équations admettent la solution $p_0 = q_0 = 1$.

Il est manifeste alors que, si l'on conserve la valeur ci-dessus de $\mathbf{k}$, la solution que nous cherchons peut être ordonnée suivant les puissances de m'^2, le coefficient de m'^{2h} étant un polynome homogène de degré h par rapport à θ^2 et θ^{-2}, de sorte que, par exemple,

$$\begin{aligned} p_0 = 1 &+ m'^2 (p_2^{(2)} \theta^2 + p_{-2}^{(2)} \theta^{-2}) \\ &+ m'^4 (p_0^{(4)} + p_4^{(4)} \theta^4 + p_{-4}^{(4)} \theta^{-4}) \\ &+ m'^6 (p_2^{(6)} \theta^2 + p_{-2}^{(6)} \theta^{-2} + p_6^{(6)} \theta^6 + p_{-6}^{(6)} \theta^{-6}) \\ &+ \ldots, \end{aligned}$$

et, en modifiant convenablement la valeur de $\mathbf{k}$, que l'on prendra sous la forme

$$\mathbf{k} = 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 + \mathbf{k}^{(4)} m'^4 + \mathbf{k}^{(8)} m'^8 + \ldots,$$

on peut déterminer les coefficients $\mathbf{k}^{(4)}$, $\mathbf{k}^{(8)}$, ..., de façon que l'on ait, pour simplifier, $p_0^{(4)} = p_0^{(8)} = \ldots = 0$.

C'est cette solution que nous adopterons tout d'abord.

Nous avons ainsi à déterminer les coefficients $p_j^{(h)}$, les indices j et h étant des entiers pairs qui vérifient les conditions suivantes : j n'est pas nul, h est positif, la différence $h-|j|$ est un multiple non négatif de 4. Bien entendu, d'après ce qui a déjà été dit, dans le développement analogue de q_0, on a $q_j^{(h)} = p_{-j}^{(h)}$.

S'il y avait lieu de supposer l'indice j nul, il faudrait prendre

$$p_0^{(0)} = 1, \qquad p_0^{(h)} = 0 \qquad (h > 0).$$

Le calcul se fait de la façon la plus simple, ainsi que l'a montré Hill, en combinant comme nous allons le dire les équations (4), écrites sous la forme

$$D^2 x_0 + 2m\, Dx_0 + \frac{3}{2} m^2 x_0 + \frac{3}{2} m'^2 y_0 - \mathbf{k}\rho_0^3 x_0 = 0,$$

$$D^2 y_0 - 2m\, Dy_0 + \frac{3}{2} m^2 y_0 + \frac{3}{2} m'^2 x_0 - \mathbf{k}\rho_0^3 y_0 = 0,$$

et l'équation (3) de Jacobi, qui devient ici

$$Dx_0\, Dy_0 + \frac{3}{2} m^2 x_0 y_0 + \frac{3}{4} m'^2 (x_0^2 + y_0^2) + 2\mathbf{k}\rho_0 = C_0,$$

en désignant par C_0 une constante.

Multipliant ces équations respectivement par y_0, x_0, 1, et ajoutant on a d'abord

$$y_0 D^2 x_0 + x_0 D^2 y_0 + Dx_0\, Dy_0 + 2m(y_0 Dx_0 - x_0 Dy_0) + \frac{9}{2} m^2 x_0 y_0$$
$$+ \frac{9}{4} m'^2 (x_0^2 + y_0^2) = C_0,$$

multipliant aussi les deux premières par y_0, $-x_0$, et ajoutant, il vient encore

$$y_0 D^2 x_0 - x_0 D^2 y_0 + 2m(y_0 Dx_0 + x_0 Dy_0) + \frac{3}{2} m'^2 (y_0^2 - x_0^2) = 0.$$

Nous avons ainsi éliminé $\mathbf{k}$ et ρ_0, et formé deux relations dont les premiers membres sont homogènes et du second degré par rapport aux inconnues x_0, y_0, ou leurs dérivées, les seconds membres étant des constantes. Substituons-y les développements des inconnues, et égalons à zéro les coefficients d'un même monome $m'^h \theta^j$ $(j \neq 0)$, dans les premiers membres. En supposant

$$j' + j'' = j, \qquad h' + h'' = h,$$

et faisant

$$\varphi(j', j'') = j^2 - j'j'' + j' - j'' + 1 + 2m(j' - j'' + 2) + \frac{9}{2}m^2,$$
$$\psi(j', j'') = j(j' - j'' - 2 + 2m)$$

on aura

$$\Sigma\left[\varphi(j', j'')p_{j'}^{(h')}q_{j''}^{(h'')} + \frac{9}{4}p_{j'}^{(h')}p_{j'-2}^{(h''-2)} + \frac{9}{4}q_{j'}^{(h')}q_{j'+2}^{(h''-2)}\right] = 0,$$
$$\Sigma\left[\psi(j', j'')p_{j'}^{(h')}q_{j''}^{(h'')} - \frac{3}{2}p_{j'}^{(h')}p_{j'-2}^{(h''-2)} + \frac{3}{2}q_{j'}^{(h')}q_{j'+2}^{(h''-2)}\right] = 0,$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs acceptables pour les indices j' et h'

Parmi les termes qui dépendent des produits $p_{j'}^{(h')}q_{j''}^{(h'')}$, isolons ceux qui correspondent aux hypothèses $j' = h' = 0$ et $j' = j$, $h' = h$, et appelons $P_j^{(h)}$, $jQ_j^{(h)}$, les premiers membres ainsi réduits des équations précédentes Elles deviennent, en remplaçant $p_j^{(h)}$ et $q_j^{(h)}$ par $\xi_j^{(h)} + \eta_j^{(h)}$ et $\xi_j^{(h)} - \eta_j^{(h)}$,

$$2\left(j^2 + 1 + 4m + \frac{9}{2}m^2\right)\xi_j^{(h)} + 2j(1 + 2m)\,\eta_j^{(h)} + P_j^{(h)} = 0,$$
$$4(1 + m)\,\xi_j^{(h)} + 2j\eta_j^{(h)} + Q_j^{(h)} = 0$$

et l'on en tire immédiatement

$$\xi_j^{(h)} = \frac{(1 + 2m)Q_j^{(h)} - P_j^{(h)}}{2\left(j^2 - 1 - 2m + \frac{1}{2}m^2\right)},$$

$$\eta_j^{(h)} = \frac{2(1 + m)P_j^{(h)} - \left(j^2 + 1 + 4m + \frac{9}{2}m^2\right)Q_j^{(h)}}{2j\left(j^2 - 1 - 2m + \frac{1}{2}m^2\right)}$$

Ces formules sont évidemment propres à faire connaître successivement les coefficients inconnus par les calculs les plus faciles Appliquons-les aux cas les plus simples

1° $j = 2$, $h = 2$ on a simplement $P_2^{(2)} = \frac{9}{4}$, $Q_2^{(2)} = -\frac{3}{4}$, d'où

$$\xi_2^{(2)} = -\frac{6 + 3m}{4\left(3 - 2m + \frac{1}{2}m^2\right)}, \qquad \eta_2^{(2)} = \frac{33 + 30m + \frac{27}{2}m^2}{16\left(3 - 2m + \frac{1}{2}m^2\right)}$$

2° $j=4,\ h=4$

$$P_4^{(4)}=\left(13+4m+\frac{9}{2}m^2\right)p_2^{(2)}q_2^{(2)}+\frac{9}{2}p_2^{(2)},$$

$$Q_4^{(4)}=(2+2m)\,p_2^{(2)}q_2^{(2)}-\frac{3}{4}p_2^{(2)},$$

$$\xi_4^{(4)}=\frac{(1+2m)Q_4^{(4)}-P_4^{(4)}}{2\left(15-2m+\frac{1}{2}m^2\right)},\qquad \eta_4^{(4)}=\frac{2(1+m)P_4^{(4)}-\left(17+4m+\frac{9}{2}m^2\right)Q_4^{(4)}}{8\left(15-2m+\frac{1}{2}m^2\right)}$$

3° $j=2,\ h=6$

$$P_2^{(6)}=\left(19+16m+\frac{9}{2}m^2\right)p_4^{(4)}q_{-2}^{(2)}+\left(7-8m+\frac{9}{2}m^2\right)p_{-2}^{(2)}q_4^{(4)}$$

$$+\frac{9}{2}p_2^{(2)}p_{-2}^{(2)}+\frac{9}{2}q_4^{(4)}+\frac{9}{4}q_2^{(2)}q_2^{(2)},$$

$$Q_2^{(6)}=(8+2m)\,p_4^{(4)}q_{-2}^{(2)}+(-4+2m)\,p_{-2}^{(2)}q_4^{(4)}-\frac{3}{2}p_2^{(2)}p_{-2}^{(2)}$$

$$+\frac{3}{2}q_4^{(4)}+\frac{3}{4}q_2^{(2)}q_2^{(2)},$$

$$\xi_2^{(6)}=\frac{(1+2m)Q_2^{(6)}-P_2^{(6)}}{2\left(3-2m+\frac{1}{2}m^2\right)},\qquad \eta_2^{(6)}=\frac{2(1+m)P_2^{(6)}-\left(5+4m+\frac{9}{2}m^2\right)Q_2^{(6)}}{4\left(3-2m+\frac{1}{2}m^2\right)}$$

4° $j=6,\ h=6$

$$P_6^{(6)}=\left(31+8m+\frac{9}{2}m^2\right)p_4^{(4)}q_2^{(2)}+\left(27+\frac{9}{2}m^2\right)p_2^{(2)}q_4^{(4)}+\frac{9}{2}p_4^{(4)}+\frac{9}{4}p_2^{(2)}p_2^{(2)},$$

$$Q_6^{(6)}=(4+2m)\,p_4^{(4)}q_2^{(2)}+2m\,p_2^{(2)}q_4^{(4)}-\frac{1}{2}p_4^{(4)}-\frac{1}{4}p_2^{(2)}p_2^{(2)},$$

$$\xi_6^{(6)}=\frac{(1+2m)Q_6^{(6)}-P_6^{(6)}}{2\left(35-2m+\frac{1}{2}m^2\right)},\qquad \eta_6^{(6)}=\frac{2(1+m)P_6^{(6)}-\left(37+4m+\frac{9}{2}m^2\right)Q_6^{(6)}}{12\left(35-2m+\frac{1}{2}m^2\right)}$$

Les calculs peuvent s'effectuer de deux façons bien différentes :

a. On peut développer analytiquement les divers coefficients sui-

vant les puissances de la petite quantité m, ce qui donne

$$\xi_2^{(2)} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2^2\,3}m - \frac{11}{2^2\,3^2}m^2 - \frac{23}{2^3\,3^3}m^3 - \ldots,$$

$$\eta_2^{(2)} = \frac{11}{2^4} + \frac{13}{2^2\,3}m + \frac{8}{3^2}m^2 + \frac{89}{2^3\,3^3}m^3 + \ldots,$$

$$\xi_4^{(4)} = \frac{25}{2^9} + \frac{109}{2^8\,3\,5}m + \ldots,$$

$$\eta_4^{(4)} = \frac{25}{2^9} + \frac{367}{2^7\,3\,5}m + \ldots,$$

b. On peut calculer directement les valeurs numériques des coefficients en partant de la valeur de m donnée ci-dessus et qui peut être regardée comme très exactement connue avec sept chiffres significatifs au moins.

On trouve ainsi

$$\xi_2^{(2)} = [1,73971-], \qquad \xi_4^{(4)} = [\bar{3},849], \qquad \ldots,$$
$$\eta_2^{(2)} = [\bar{1},89271], \qquad \eta_4^{(4)} = [\bar{3},825],$$

Il reste à déterminer la valeur de la constante **k**. Mais avant d'y arriver, remarquons qu'il est inutile de conserver plus longtemps la distinction que nous avons faite jusqu'à présent entre m' et m et qui ne nous a servi qu'à ordonner plus nettement les calculs précédents.

Faisons donc maintenant

$$p_0 = 1 + p_{0,2}\theta^2 + p_{0,-2}\theta^{-2} + p_{0,4}\theta^4 + p_{0,-4}\theta^{-4} + \ldots,$$

de sorte que, par exemple,

$$p_{0,2} = p_2^{(2)}m'^2 + p_2^{(4)}m'^4 + \ldots,$$

et employons des notations semblables pour les autres inconnues, on trouvera immédiatement, d'après ce qui précède, sous forme analytique,

$$\xi_{0,2} = -\frac{1}{2}m^2 - \frac{7}{2^2\,3}m^3 - \frac{11}{2^2\,3^2}m^4 - \frac{23}{2^3\,3^3}m^5 - \ldots,$$

$$\eta_{0,2} = \frac{11}{2^4}m^2 + \frac{13}{2^2\,3}m^3 + \frac{8}{3^2}m^4 + \frac{89}{2^3\,3^3}m^5 + \ldots,$$

$$\xi_{0,4} = \frac{25}{2^9}m^4 + \frac{109}{2^8\,3\,5}m^5 + \ldots,$$

$$\eta_{0,4} = \frac{25}{2^9}m^4 + \frac{367}{2^7\,3\,5}m^5 + \ldots,$$

$$\ldots,$$

Il en résulte immédiatement

$$\rho_{0,0} = 1 + \frac{7}{2^8} m^4 - \frac{31}{2^{?}\,3} m^5 - \frac{53}{2^{?}\,3} m^6 + \dots,$$

$$\rho_{0,2} = \frac{1}{2} m^2 + \frac{7}{2^{?}\,3} m^3 + \frac{11}{2^{?}\,3^{?}} m^4 + \frac{?3}{2^{3}\,3^{3}} m^5 + \dots,$$

$$\rho_{0,4} = \frac{7}{2^4} m^4 + \frac{1097}{2^{6}\,3^{?}} m^5 + \dots$$

$$\lambda_{0,2} = \frac{11}{2^4} m^2 + \frac{13}{2^2\,3} m^3 + \frac{8}{3^2} m^4 + \frac{89}{2^3\,3^3} m^5 + \dots$$

$$\lambda_{0,4} = \frac{201}{2^9} m^4 + \frac{?177}{2^{?}\,3^{?}} m^5 + \dots$$

$$\rho_{0,0} = 1 + [7,467\dots],$$

$$\rho_{0,2} = [\bar{3},55309], \qquad \lambda_{0,2} = [3,70806],$$

$$\rho_{0,4} = [\bar{5},360], \qquad \lambda_{0,4} = [\bar{5},326],$$

La facilité des calculs nous a permis de porter un peu plus loin que précédemment l'approximation du coefficient $\rho_{0,0}$, ainsi que celle de la constante **k**, en vue de la suite.

Les résultats obtenus se mettent aisément sous forme réelle. Appelons D l'argument N — N', conformément à l'usage, et marquons de l'indice o les parties des coordonnées rectangulaires X, Y, Z, ou polaires $\sin\varpi$, v, s, qui correspondent à la solution ici envisagée. On a

$$X_0 = a \sum \rho_{0,j} \cos(N + jD), \qquad Y_0 = a \sum \rho_{0,j} \sin(N + jD), \qquad Z_0 = 0,$$

$$(\sin\varpi)_0 = \frac{b}{a} \sum \rho_{0,j} \cos jD, \qquad v_0 = N + \sum \lambda_{0,j} \sin jD, \qquad s_0 = 0,$$

les séries qui représentent $(\sin\varpi)_0$ et v_0 — N sont écrites sous forme symétrique.

Numériquement, on a donc, en se bornant à l'approximation de la seconde pour la longitude, et à celle du dixième de seconde pour le sinus de la parallaxe,

$$v_0 = N + 2106'' \sin 2D + 9'' \sin 4D,$$

$$(\sin\varpi)_0 = 3422'',7 + 24'',6 \cos 2D + 0'',2 \cos 4D$$

L'inégalité de la longitude de la Lune qui dépend de sin 2 D est à proprement parler ce qu'on appelle la *variation*, elle est considérable, et nous venons d'en déterminer la partie principale, qu'il faut encore augmenter, comme nous le verrons, de termes complémentaires beaucoup moindres Mais souvent, on appelle aussi *variation* l'ensemble des éléments x_0, y_0, de la solution que nous venons d'étudier

123 Avant d'aller plus loin, il convient de nous arrêter un instant pour une étude plus attentive des avantages et inconvénients respectifs que présentent les deux méthodes analytique et numérique qui se trouvent amorcées dans ce qui précède

Les avantages de la solution purement analytique sont incontestables elle est, suivant l'expression même de Delaunay, « plus complète, plus satisfaisante pour l'esprit, que la recherche des inégalités sous forme numérique », et il ajoute encore « Mais ce que l'on doit surtout considérer, c'est que les facteurs numériques, qui entrent dans les divers termes du coefficient de chaque inégalité déterminée sous forme analytique, sont tous des fractions ordinaires dont la valeur s'obtient, non pas avec approximation, mais rigoureusement Quelle que soit la méthode que l'on emploie pour obtenir les coefficients des diverses inégalités, on doit trouver une identité complète, absolue, entre les diverses déterminations de chacun de ces facteurs numériques, et s'il y a une différence entre les valeurs trouvées par divers savants pour l'un de ces termes, on est bien plus facilement mis sur la voie de l'erreur qu'on doit rechercher, que si l'on n'avait pu comparer que les valeurs numériques et approchées du coefficient tout entier »

Ces considérations devraient être approuvées sans aucune réserve si la solution analytique permettait de passer facilement et sûrement aux valeurs numériques des inégalités sans demander un surcroît énorme de travail Malheureusement ce n'est pas le cas, et ceci tient au peu de convergence des séries ordonnées suivant les puissances de m que l'on rencontre pour représenter les coefficients des différentes inégalités Ce grave inconvénient est surtout sensible dans les résultats de Delaunay, qui sont développés suivant les puissances du rapport $\frac{n'}{n}$ égal à $\frac{m}{1+m}$, et que nous appellerons m' Nous pouvons

dès maintenant nous en rendre compte en considérant par exemple le coefficient $\lambda_{0,2}$ déterminé ci-dessus, développé suivant les puissances de m, c'est

$$\frac{11}{2^4} m^2 + \frac{13}{2^2 \cdot 3} m^3 + \frac{8}{3^2} m^4 + \frac{89}{2^3 \cdot 3^3} m^5 + \quad ,$$

développé suivant les puissances de m', il devient

$$\frac{11}{2^4} m'^2 + \frac{59}{2^3 \cdot 3} m'^3 + \frac{893}{2^4 \cdot 3^2} m'^4 + \frac{2855}{2^3 \cdot 3^3} m'^5 + \quad ,$$

et l'on voit jusqu'à quel point cette seconde série est moins satisfaisante que la première au point de vue de la convergence pratique. Et si la première suffisamment prolongée paraît pouvoir être utilement employée, il ne faudrait pas croire qu'il en sera toujours de même ; nous en rencontrerons beaucoup d'autres qui, même en employant m au lieu de m', auraient besoin d'être poussées très loin pour fournir l'approximation que l'on recherche, encore serait-on obligé de compter sur la régularité de leur allure pour obtenir leur valeur en partant des termes écrits et ajoutant un reste probable, et c'est là une hypothèse aléatoire, bien souvent démentie par la réalité des faits. Il est superflu d'ajouter que les calculs deviennent extrêmement pénibles quand on est obligé d'aller très loin dans les développements

Contentons-nous d'un exemple pour justifier ces assertions L'important coefficient g'_0 que nous allons rencontrer bientôt a pour développement

$$g'_0 = \frac{3}{2^2} m'^2 + \frac{225}{2^5} m'^3 + \frac{4071}{2^7} m'^4 + \frac{265493}{2^{11}} m'^5 + \frac{12822631}{2^{13} \cdot 3} m'^6$$

$$+ \frac{1273925965}{2^{16} \cdot 3^2} m'^7 + \frac{66702631253}{2^{18} \cdot 3^3} m'^8$$

$$+ \frac{29726828924189}{2^{23} \cdot 3^4} m'^9 +$$

$$= \frac{3}{2^2} m^2 + \frac{177}{2^5} m^3 + \frac{1659}{2^7} m^4 + \frac{85205}{2^{11}} m^5 + \frac{3073531}{2^{13} \cdot 3} m^6$$

$$+ \frac{258767293}{2^{16} \cdot 3^2} m^7 + \frac{12001004273}{2^{18} \cdot 3^3} m^8$$

$$+ \frac{4823236206653}{2^{23} \cdot 3^4} m^9 + \quad ,$$

et pour valeur numérique 0,00857 257

Ces deux séries, dont la première est celle de Delaunay dûment corrigée, donnent respectivement, en faisant la somme de leurs termes,

0,00419 643	0,00490 241
294 280	292 311
99 570	55 378
30 358	14 372
9 140	3 493
2 830	991
924	310
321	105
0,00857 066	0,00857 201

On voit leur insuffisance, et si l'emploi de m est sans aucun doute un peu plus avantageux, on ne lui trouve plus la très grande supériorité que semblait promettre l'exemple de la variation.

Il est d'ailleurs facile d'expliquer cette supériorité dans ce cas particulier. En examinant les formules du numéro précédent, on voit sans peine que leur convergence est limitée surtout par ce fait qu'on développe en séries ordonnées suivant les puissances de m des fractions rationnelles dont les dénominateurs sont $3-2m+\frac{1}{2}m^2$, $15-2m+\frac{1}{2}m^2$, ..., par suite, la convergence cessera dès que le module de m atteindra le module de celle des racines de ces trinomes qui a le plus petit module, c'est-à-dire en fait le module commun des racines imaginaires du premier d'entre eux, soit $\sqrt{6}$. Comme la valeur de m est $\frac{1}{12}$, à peu près, la convergence des séries p_0, doit être très marquée. Si au lieu de m on emploie m', le facteur $3-2m+\frac{1}{2}m^2$ devient $\frac{3-8m'+\frac{11}{2}m'^2}{(1-m')^2}$, et la convergence cesse dès que l'on a

$$|m|=\sqrt{\frac{6}{11}},$$

bien que la valeur de m', $\frac{1}{13}$ environ, soit inférieure à celle de m, la convergence sera donc bien moins satisfaisante, le rapport $m'\sqrt{\frac{11}{6}}$ étant très supérieur à $\frac{m}{\sqrt{6}}$.

La conclusion qu'il faut tirer des constatations que nous venons de faire s'impose. On peut, et l'on doit même, conserver la solution analytique, à cause de son intérêt propre au point de vue théorique, et aussi à cause de son utilité dans certains cas, mais il est vain de vouloir la poursuivre trop loin, jusqu'à pouvoir en tirer les valeurs numériques des inégalités du mouvement de la Lune avec l'approximation nécessaire.

Pour atteindre ce but, qui est le véritable objet pratique de la théorie de la Lune, il faut calculer directement ces valeurs numériques, non pas cependant comme Hansen, qui dès le début met pour chacun des paramètres un nombre, mais seulement en supprimant les développements en séries suivant les puissances de la quantité m, dont on utilisera la valeur très exactement connue. Il restera bien que les coefficients des inégalités se présenteront comme des séries ordonnées suivant les puissances des autres paramètres α, ε', et ceux que nous allons définir bientôt comme équivalents à l'excentricité et l'inclinaison d'une orbite keplérienne, mais la convergence de ces séries est assurée, et aucun inconvénient ne peut résulter de leur usage, bien au contraire, car les valeurs de ces paramètres ne sont connues à l'avance qu'avec une précision inférieure, et il importe de savoir déterminer l'influence des changements qu'on peut être amené à leur faire subir.

La théorie de M. Brown est une solution numérique édifiée conformément aux principes que nous venons d'établir, elle permet aussi bien la solution analytique.

Toutefois, elle a le désavantage, sensible surtout au point de vue analytique, d'exiger plusieurs développements en série que leur longueur rend pénibles, et de conduire à des calculs d'une grande complexité et en partie superflus. Nous allons tout d'abord, dans le Chapitre suivant, en présenter l'exposition, avec des modifications de peu d'importance.

CHAPITRE XX.

MÉTHODE GÉNÉRALE D'INTÉGRATION. FORME DE LA SOLUTION. INÉGALITÉS DU PREMIER DEGRÉ PAR RAPPORT A L'EXCENTRICITÉ ET L'INCLINAISON.

---

124. Revenons aux équations générales (1) et (2) du Chapitre précédent. Quand on néglige F, c'est-à-dire les paramètres c' et α, elles admettent comme solution particulière la *variation* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 0$.

Faisons donc

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y',$$

en développant les fonctions $\mathbf{k}\rho^{-3}x$, $\mathbf{k}\rho^{-3}y$, $\mathbf{k}\rho^{-3}z$, suivant les puissances entières de x', y', z et conservant dans les premiers membres tous les termes qui sont du premier degré par rapport à ces inconnues ou leurs dérivées, et ceux-là seulement, ces équations deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} D^2x' + 2m\,D\,x' + \left(\frac{1}{2}\mathbf{k}\rho_0^{-3} + \frac{3}{2}m^2\right)x' + \left(\frac{3}{2}\mathbf{k}\rho_0^{-5}x_0^2 + \frac{3}{2}m^2\right)y' = \mathrm{X}, \\ D^2y' - 2m\,D\,y' + \left(\frac{1}{2}\mathbf{k}\rho_0^{-3} + \frac{3}{2}m^2\right)y' + \left(\frac{3}{2}\mathbf{k}\rho_0^{-5}y_0^2 + \frac{3}{2}m^2\right)x' = \mathrm{Y}, \end{cases}$$

$$(6)\qquad D^2 z - (\mathbf{k}\rho_0^{-3} + m^2)\,z = \mathrm{Z},$$

de même, l'équation (3) de Jacobi devient

$$D\,y_0\,D\,x' + D\,x_0\,D\,y' - \left[\mathbf{k}\rho_0^{-3}y_0 - \frac{3}{2}m^2(x_0 + y_0)\right]x' - \left[\mathbf{k}\rho_0^{-3}x_0 - \frac{3}{2}m^2(x_0 + y_0)\right]y' = \mathrm{J},$$

ou, plus simplement, d'après les relations (4) qui définissent la variation,

$$(7)\quad D\,y_0\,D\,x' + D\,x_0\,D\,y' - (D^2y_0 - 2m\,D\,y_0)\,x' - (D^2x_0 + 2m\,D\,x_0)\,y' = \mathrm{J}.$$

Nous n'avons pas besoin actuellement de connaître davantage les fonctions X, Y, Z, J, il nous suffit de savoir que, x et y étant remplacés dans F par leurs valeurs $x_0 + x'$, $y_0 + y'$, ces fonctions se présentent, d'après leur définition même, comme des séries entières par rapport aux inconnues x', y', z, et aux paramètres e', α, et que tous les termes de ces séries qui ne contiennent pas e' ou α en facteur sont du second degré au moins par rapport à x', y', z, toutefois, la fonction J renferme encore une constante inconnue, en raison de l'intégrale qui figure dans l'équation de Jacobi

L'équation (6) est propre à déterminer z, les équations (5) et (7), qui se réduisent nécessairement à deux distinctes, serviront à déterminer x' et y', en fait, on a $DJ = X\,Dy_0 + Y\,Dx_0$

125 Étudions d'abord l'équation (6), de beaucoup la plus simple. Si l'on y regarde la fonction Z comme connue, c'est une équation différentielle linéaire du second ordre par rapport à z, et pour en obtenir la solution générale, il faut connaître en premier lieu celle de l'équation sans second membre

$$D^2 z - Sz = 0, \tag{8}$$

en faisant

$$S = \mathrm{K}\rho_0 + m^2$$

D'après la nature de la fonction S, qui est une fonction périodique de l'angle $2D$, à la période 2π, et d'après les propriétés générales des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, l'équation (8) admet deux solutions particulières conjuguées de la forme

$$\zeta_1 = \theta^{h_0} c_1, \qquad \zeta_2 = \theta^{-h_0} c_2,$$

en désignant par h_0 une constante à déterminer, par c_1 une série périodique analogue à S, mais non réelle, de la forme

$$c_1 = \Sigma\, c_{1,k}\, \theta^k \qquad (k \text{ pair}),$$

et par c_2 la série conjuguée

$$c_2 = \Sigma\, c_{2,k}\, \theta^k \qquad (c_{2,k} = c_{1,-k})$$

Comme d'ailleurs ces deux solutions se réduiraient à θ et θ^{-1} pour $m = 0$, on doit chercher pour h_0 une valeur voisine de l'unité,

à condition de supposer en même temps que les rapports $\frac{c_{1,k}}{c_{1,0}}$ $(k \neq 0)$ s'annulent avec m. Le coefficient $c_{1,0}$ est d'ailleurs arbitraire, et pour simplifier, nous le choisirons égal à l'unité.

Pour déterminer h_0 et les $c_{1,k}$, employons la méthode des coefficients indéterminés, en substituant ζ_1 à z dans l'équation (8) et annulant les coefficients des diverses puissances de θ dans le premier membre. Posons

$$S = \Sigma S_k \theta^k$$

et aussi

$$n_k = (h_0 + k)^2 - S_0,$$

de sorte que

$$n_0 = h_0^2 - S_0, \qquad n_k = k^2 + 2k h_0 + n_0;$$

on obtient ainsi les équations

$$n_k c_{1,k} = \Sigma S_i c_{1,j} \qquad (i + j = k,\ i \neq 0)$$

qui sont propres à déterminer successivement les diverses inconnues par approximations successives.

En prenant $k = 0$, on a d'abord $n_0 = 0$, et comme évidemment

$$S_0 = 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 + \ldots,$$

il vient, pour première valeur approchée de h_0,

$$h_0 = 1 + m + \frac{3}{4} m^2 + \ldots$$

Il en résulte que tous les n_k $(k \neq 0)$ sont finis par rapport à m, sauf n_{-2}, qui est égal à $-4m - 3m^2 \ldots$, et ce fait diminue notablement la convergence des approximations, ce qui est un grave inconvénient, au point de vue numérique surtout. Pour y remédier, il convient de déterminer tout d'abord h_0, isolément. A cet effet, remarquons que l'on peut écrire, en excluant S_0 de l'ensemble des S_j, et n'oubliant pas que $S_j = S_{-j}$, les équations précédentes sous la forme

$$n_0 = \Sigma S_j c_{1,j},$$

$$c_{1,j} = \frac{1}{n_j} \Sigma S_i c_{1,j+i}.$$

Comme nous l'avons déjà dit, on a fait ici $c_{1,0} = 1$.

Il en résulte

$$n_0 = \sum \frac{S_j S_{j'}}{n_j} c_{1, j+j'},$$

dans les termes de cette formule pour lesquels l'indice $j + j'$ n'est pas nul, remplaçons encore $c_{1,j+j'}$ par sa valeur

$$\frac{1}{n_{j+j'}} \sum S_{j''} c_{1, j+j'+j''},$$

et continuons de même. On aura finalement

$$n_0 = \sum \frac{S_j S_{j'} S_{j''} S_{j'''} \cdots}{n_j n_{j+j'} n_{j+j'+j''} \cdots},$$

la somme $j + j' + j'' + j''' + \ldots$ étant nulle, sans qu'aucune des sommes précédentes $j + j'$, $j + j' + j''$, ... le soit, et le nombre des facteurs du dénominateur de chaque terme étant moindre d'une unité que celui des facteurs du numérateur.

En développant la formule précédente au delà de ce qui est nécessaire, on a sans peine

$$n_0 = S_2^2 \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_{-2}} \right) + S',$$

avec

$$S' = S_2^4 \left(\frac{1}{n_2^2 n_4} + \frac{1}{n_{-2}^2 n_{-4}} \right) + 2 S_4 S_2^2 \left(\frac{1}{n_2 n_4} + \frac{1}{n_{-2} n_{-4}} + \frac{1}{n_{[illegible]}} \right)$$

$$+ S_4^2 \left(\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_{-4}} \right)$$

$$+ S_2^6 \left(\frac{1}{n_2^2 n_4^2 n_6} + \frac{1}{n_{-2}^2 n_{-4}^2 n_{-6}} + \frac{1}{n_2^3 n_{[illegible]}} + \frac{1}{n_{-2}^3 n_{[illegible]}^2} \right)$$

$$+ 2 S_4 S_2^4 \left(\frac{1}{n_2 n_4^2 n_6} + \frac{1}{n_{-2} n_{-4}^2 n_{-6}} + \frac{1}{n_2^2 n_4 n_6} + \frac{1}{n_{[illegible]}^2 n_{[illegible]} n_{[illegible]}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n_2^2 n_4^2} + \frac{1}{n_{-2}^2 n_{-4}^2} + \frac{1}{n_2^2 n_{-2} n_4} + \frac{1}{n_2 n_{-2}^2 n_{[illegible]}} \right)$$

$$+ 2 S_6 S_2^3 \left(\frac{1}{n_2 n_4 n_6} + \frac{1}{n_{-2} n_{-4} n_{-6}} + \frac{1}{n_2 n_{[illegible]} n_4} + \frac{1}{n_2 n_{[illegible]} n_{[illegible]}} \right)$$

$$+ S_4^2 S_2^2 \left(\frac{1}{n_4^2 n_6} + \frac{1}{n_{-4}^2 n_{-6}} + \frac{2}{n_2 n_4 n_6} + \frac{2}{n_{-2} n_{-4} n_{-6}} + \frac{1}{n_{[illegible]}^2 n_{[illegible]}} \right.$$

$$+ \frac{1}{n_{-2}^2 n_{-6}} + \frac{1}{n_2 n_4^2} + \frac{1}{n_{-2} n_{-4}^2} + \frac{1}{n_{[illegible]} n_{[illegible]}}$$

$$\left. + \frac{2}{n_{[illegible]} n_{-2} n_{-4}} + \frac{1}{n_2^2 n_{[illegible]}} + \frac{1}{n_{[illegible]} n_{[illegible]}} \right)$$

$$+ 2 S_2 S_4 S_6 \left(\frac{1}{n_4 n_6} + \frac{1}{n_{-4} n_{-6}} + \frac{1}{n_2 n_6} + \frac{1}{n_{-2} n_{-6}} + \frac{1}{n_{[illegible]} n_{[illegible]}} + \ldots + \frac{1}{n_{[illegible]}} \right)$$

$$+ S_6^2 \left(\frac{1}{n_6} + \frac{1}{n_{-6}} \right) + \ldots$$

Dans cette formule, nous n'avons négligé que les produits $S_i S_j S_k$ qui sont au moins du seizième ordre par rapport à m, et par suite, en raison de la présence du facteur n_{-2} dans les dénominateurs, on peut dire que cette valeur de S' est exacte jusqu'aux termes du onzième ordre inclus par rapport à m.

Des approximations successives sont encore nécessaires pour résoudre l'équation

$$n_0 = S_2^2\left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_{-2}}\right) + S',$$

où nous regarderons n_0 comme l'inconnue principale, mais on peut les rendre extrêmement convergentes en procédant de la façon suivante.

On a

$$n_2 = 4 + 4h_0 + n_0, \qquad n_{-2} = 4 - 4h_0 + n_0,$$

et, par suite,

$$n_2 + n_{-2} = 8 + 2n_0, \qquad n_2 n_{-2} = (4 + n_0)^2 - 16(n_0 + S_0);$$

l'équation précédente s'écrit donc

$$8n_0^2 + 2n_0(8S_0 - 8 + S_2^2) + 8S_2^2 + n_2 n_{-2} S' - n_0^3 = 0,$$

et en faisant

$$A = S_0 - 1 + \frac{S_2^2}{8}, \qquad B = \sqrt{A^2 - S_2^2}, \qquad C = \frac{1}{16}(n_2 n_{-2} S' - n_0^3),$$

il vient

$$n_0 = -A + \sqrt{B^2 - 2C},$$

ou mieux

$$n_0 = -\frac{S_2^2}{A + B} - \frac{C}{B} - \frac{1}{2}\frac{C^2}{B^3} - \frac{1}{2}\frac{C^3}{B^5} - \frac{5}{8}\frac{C^4}{B^7} - \ldots,$$

comme on le voit en développant le radical, et remplaçant la différence $B - A$ par $\frac{B^2 - A^2}{A + B}$.

La seule quantité inconnue C étant fort petite, on obtient ainsi une formule très propre au calcul analytique ou numérique.

Connaissant n_0, on en tirera h_0 par la formule

$$h_0^2 = S_0 + n_0,$$

et les équations

$$n_k c_{1,k} = \Sigma S_i c_{1,j} \qquad (i + j = k, \; ik \neq 0)$$

fourniront très rapidement les coefficients $c_{i,k}$ par approximations successives.

Il est bien facile maintenant d'intégrer complètement l'équation (6); faisons, suivant la méthode de Lagrange, ou de la variation des constantes,

$$z = \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2,$$

avec la condition

$$\zeta_1 \mathrm{D}\lambda_1 + \zeta_2 \mathrm{D}\lambda_2 = 0,$$

on a aussi, pour déterminer λ_1 et λ_2,

$$\mathrm{D}\zeta_1 \mathrm{D}\lambda_1 + \mathrm{D}\zeta_2 \mathrm{D}\lambda_2 = \mathrm{Z},$$

d'ailleurs les relations

$$\mathrm{D}^2\zeta_1 - \mathrm{S}\zeta_1 = 0, \qquad \mathrm{D}^2\zeta_2 - \mathrm{S}\zeta_2 = 0$$

donnent

$$\zeta_2 \mathrm{D}^2\zeta_1 - \zeta_1 \mathrm{D}^2\zeta_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\zeta_2 \mathrm{D}\zeta_1 - \zeta_1 \mathrm{D}\zeta_2 = c$$

en désignant par c une constante.

On tire alors des équations ci-dessus

$$\mathrm{D}\lambda_1 = \frac{\zeta_2}{c}\mathrm{Z}, \qquad \mathrm{D}\lambda_2 = -\frac{\zeta_1}{c}\mathrm{Z},$$

et, par suite, on a finalement

$$z = \frac{\zeta_1}{c}\mathrm{D}^{-1}(\zeta_2 \mathrm{Z}) - \frac{\zeta_2}{c}\mathrm{D}^{-1}(\zeta_1 \mathrm{Z}) \tag{9}$$

Telle est la formule générale qui donne z, et dont nous expliquerons l'usage un peu plus loin.

Indiquons sommairement la marche et les résultats des calculs que nous venons de décrire.

D'après les valeurs de ρ_0 et de $\mathbf{k}$ rapportées au Chapitre précédent, on trouve d'abord sans peine, en nous bornant aux termes utiles,

$$\mathrm{S}_0 = 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 - \frac{9}{2^5}m^3 + 4m^4 + \frac{34}{3}m^5 + \ldots = 1{,}17804457,$$

$$\mathrm{S}_2 = \frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{2^2}m^3 + \frac{20}{3}m^4 + \frac{43}{32}m^5 + \ldots = [\bar{2},10095],$$

$$\mathrm{S}_4 = \frac{33}{2^4}m^4 + \ldots = [4,100]$$

On a ensuite

$$S_2^2 = \frac{9}{2^2}m^4 + \frac{57}{2^2}m^5 + \frac{681}{2^4}m^6 + \frac{233}{3}m^7 + \ldots = [\bar{4},20190],$$

$$A = 2m + \frac{5}{2}m^2 - 0\,m^3 + 0\,m^4 + \ldots = [\bar{1},25058]$$

$$B = 2m + \frac{5}{2}m^2 - \frac{9}{2^4}m^3 - \frac{183}{2^6}m^4 + \ldots = [\bar{1},24949]$$

$$-\frac{S_2^2}{A+B} = -\frac{9}{2^4}m^3 - \frac{183}{2^6}m^4 - \frac{7317}{2^{10}}m^5 - \frac{138719}{2^{12}\cdot 3}m^6 - \ldots = -0,00044755$$

C'est là une première valeur approchée de n_0, qui n'est exacte qu'à des termes près du sixième ordre par rapport à m. On en déduit, en n'écrivant d'abord que ce qui est nécessaire pour déterminer le coefficient exact de m^6 dans n_0,

$$h_0 = 1 + m + \ldots, \qquad n_{-2} = -4m + \ldots, \qquad n_2 = 8 + \ldots, \qquad n_{-4} = 8 + \ldots,$$

il suffit en effet de prendre

$$C = \frac{1}{16}n_2 n_{-2}\frac{S_2^4}{n_{-2}^2 n_{-4}} = -\frac{81}{2^{10}}m^7 + \ldots$$

pour avoir la correction cherchée, soit $+\frac{81}{2^{11}}m^6$, du dernier terme de la valeur approchée trouvée ci-dessus pour n_0.

Il vient donc exactement

$$n_0 = -\frac{9}{2^4}m^3 - \frac{183}{2^6}m^4 - \frac{7317}{2^{10}}m^5 - \frac{138233}{2^{12}\cdot 3}m^6 - \ldots,$$

d'où

$$h_0^2 = 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 - \frac{9}{2^4}m^3 - \frac{201}{2^6}m^4 - \frac{3221}{2^{10}}m^5 + \frac{1031}{2^{12}\cdot 3}m^6 - \ldots$$

et finalement

$$h_0 = 1 + m + \frac{3}{2^2}m^2 - \frac{33}{2^5}m^3 - \frac{105}{2^7}m^4 + \frac{43}{2^{11}}m^5 + \frac{2567}{2^{13}\cdot 3}m^6 + \ldots$$

Numériquement, on vérifie sans peine que la correction de notre première valeur approchée n'atteint pas une demi-unité du huitième ordre décimal, et l'on a

$$n_0 = -0,00044755,$$
$$h_0^2 = 1,17759702,$$
$$h_0 = 1,08517143$$

On trouve ensuite très rapidement

$$c_{1,0} = 1,$$

$$c_{1,-2} = -\frac{3}{2^3}m - \frac{29}{2^5}m^2 - \frac{2029}{2^9\,3}m^3 - \frac{18875}{2^{11}\,3^2}m^4 - \ldots = [\bar{2},56801-],$$

$$c_{1,2} = \frac{3}{2^4}m^2 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{197}{2^7\,3}m^4 + \ldots = [\bar{3},17961],$$

$$c_{1,-4} = -\frac{9}{2^7}m^3 - \frac{105}{2^9}m^4 - \ldots = [\bar{5},668-],$$

$$c_{1,4} = \frac{25}{2^8}m^4 + \ldots = [6,77],$$

Quant à la valeur de la constante c égale à $\zeta_2 D\zeta_1 - \zeta_1 D\zeta_2$, c'est

$$\begin{aligned} c &= 2\Sigma c_{1,k}^2(h_0 + k) \\ &= 2 + 2m + \frac{39}{2^5}m^2 - \frac{201}{2^6}m^3 - \frac{3567}{2^{10}}m^4 \\ &= [0,3360301] \end{aligned}$$

126. Prenons maintenant les équations (5) et (7), et observons tout d'abord que leurs premiers membres s'annulent quand on y fait

$$x' = Dx_0, \qquad y' = Dy_0,$$

ce fait, facile à vérifier directement, résulte de ce que les équations (4) de la variation et l'équation de Jacobi correspondante ne contiennent pas τ explicitement et, par suite, ne cessent pas d'être vérifiées quand on remplace dans la solution x_0, y_0 la variable τ par $\tau + \tau_0$, τ_0 étant une constante quelconque, x_0 et y_0 deviennent alors

$$x_0 + \tau_0 Dx_0 + \frac{\tau_0^2}{2}D^2x_0 + \ldots,$$

$$y_0 + \tau_0 Dy_0 + \frac{\tau_0^2}{2}D^2y_0 + \ldots,$$

substituant ces valeurs dans les équations, et annulant les coefficients de τ_0 dans les premiers membres, on tombe sur la proposition annoncée.

En conséquence, faisons

$$x' = x'' Dx_0, \qquad y' = -y'' Dy_0,$$

x'', y'' étant deux nouvelles variables conjuguées, comme x', y'. En tenant compte de ce qui précède, les coefficients de x'', y'' dans les premiers membres des équations (5) et (7) ainsi transformées doivent être égaux, puisque ces premiers membres doivent s'annuler quand on y fait $x'' = -y'' = 1$, on obtient ainsi sans calcul

$$\begin{aligned} &Dx_0 D^2 x'' + 2(D^2 x_0 + m Dx_0) Dx'' \\ &\quad + \left[D^3 x_0 + 2m D^2 x_0 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{k}\rho_0^3 + \frac{3}{2}m^2\right) Dx_0\right](x'' - y'') = X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Dy_0 D^2 y'' + 2(D^2 y_0 - m Dy_0) Dy'' \\ &\quad + \left[D^3 y_0 - 2m D^2 y_0 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{k}\rho_0^3 + \frac{3}{2}m^2\right) Dy_0\right](x'' + y'') = -Y, \end{aligned}$$

$$Dx_0 Dy_0 D(x'' - y'') + (Dy_0 D^2 x_0 - Dx_0 D^2 y_0 + 2m Dx_0 Dy_0)(x'' + y'') = J.$$

De ces trois équations, nous allons conserver seulement la dernière et la combinaison des deux premières que l'on obtient en les multipliant respectivement par Dy_0, Dx_0 et ajoutant, soit

$$\begin{aligned} &Dx_0 Dy_0 D^2(x'' + y'') + (Dy_0 D^2 x_0 + Dx_0 D^2 y_0) D(x'' + y'') \\ &\quad + (Dy_0 D^2 x_0 - Dx_0 D^2 y_0 + 2m Dx_0 Dy_0) D(x'' - y'') \\ &\quad + [Dy_0 D^3 x_0 + Dx_0 D^3 y_0 + 2m(Dy_0 D^2 x_0 - Dx_0 D^2 y_0) \\ &\quad + (\mathbf{k}\rho_0^3 + 3m^2) Dx_0 Dy_0](x'' + y'') = X Dy_0 - Y Dx_0. \end{aligned}$$

Faisons alors

$$x'' = a' + b, \qquad y'' = a' - b,$$

puis posons

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{D^2 x_0}{Dx_0} - \frac{D^2 y_0}{Dy_0}\right) + m, \qquad Q = \frac{1}{2}\left(\frac{D^2 x_0}{Dx_0} + \frac{D^2 y_0}{Dy_0}\right),$$

et observons qu'il en résulte

$$\frac{D^3 x_0}{Dx_0} + \frac{D^3 y_0}{Dy_0} = 2DQ + 2Q^2 + 2(P - m)^2.$$

Les équations que nous conservons deviennent, après division par $Dx_0 Dy_0$,

$$\begin{aligned} &D^2 a' + 2Q Da' + 2P Db \\ &\quad + (2DQ + 2Q^2 + 2P^2 + \mathbf{k}\rho_0^3 + m^2) a' = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{Dx_0} - \frac{Y}{Dy_0}\right), \end{aligned}$$

$$Db + 2Pa' = \frac{J}{2 Dx_0 Dy_0},$$

en remplaçant dans la première Db par sa valeur tirée de la seconde, on a encore

$$\begin{aligned} &D^2a' + 2QDa' \\ &\quad + (2DQ + 2Q^2 - 2P^2 + \mathbf{k}\rho_0^2 + m^2)a' \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{Dx_0} - \frac{Y}{Dy_0}\right) - \frac{PJ}{Dx_0 Dy_0} \end{aligned}$$

Faisons maintenant

$$R = \frac{1}{\sqrt{-Dx_0 Dy_0}},$$

et observons que

$$Q = -\frac{DR}{R},$$

de sorte que

$$RD^2\left(\frac{a'}{R}\right) = D^2a' + 2QDa' + (DQ + Q^2)a',$$

posons encore

$$a' = aR, \qquad S' = 2P^2 - Q^2 - DQ - \mathbf{k}\rho_0^2 - m^2$$

(sans qu'aucune confusion soit à craindre avec la quantité a déjà définie), et aussi

$$A = \frac{1}{2}\left(X\sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}} - Y\sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}}\right) + PRJ,$$

$$B = -2PRa - \frac{1}{2}R^2J,$$

nous obtenons enfin les deux équations

$$(10) \qquad \begin{cases} D^2a - S'a = A, \\ Db = B, \end{cases}$$

pour déterminer les deux inconnues a et b, d'où résulteront

$$x' = a\sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}} + bDx_0, \qquad y' = a\sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}} + bDy_0,$$

ou plutôt, en faisant

$$Dx_0 = \theta(u + v), \qquad Dy_0 = -\theta^{-1}(u - v),$$

$$\frac{1}{2}\left(\theta^{-1}\sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}} + \theta\sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}}\right) = uR = U,$$

$$\frac{1}{2}\left(\theta^{-1}\sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}} - \theta\sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}}\right) = vR = V,$$

on aura

$$\xi' = a\mathrm{U} + bu, \qquad \eta' = a\mathrm{V} + bv,$$

u, U sont des fonctions réelles, comme P, R, S', tandis que v, V sont purement imaginaires, comme Q.

La solution générale des équations (10) est maintenant immédiate, d'après ce que nous avons dit au numéro précédent. En effet, la première de ces équations est entièrement semblable à l'équation (6), privée de second membre; elle admet deux solutions particulières conjuguées de la forme

$$a_1 = \theta^{g_0}\alpha_1, \qquad a_2 = \theta^{-g_0}\alpha_2,$$

en désignant par g_0 une constante à déterminer, par α_1 une série périodique analogue à S,

$$\alpha_1 = \Sigma\,\sigma_{1,k}\,\theta^k \qquad (k \text{ pair}),$$

et par α_2 la série conjuguée. Le calcul de g_0 et des coefficients $\sigma_{1,k}$ se fera tout comme précédemment, en observant les quelques changements de notation nécessaires; on choisira $\sigma_{1,0}$ égal à l'unité.

Finalement, en appelant σ la constante $a_2\,\mathrm{D}a_1 - a_1\,\mathrm{D}a_2$, on aura toujours de la même façon,

$$(11)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{a_1}{\sigma}\,\mathrm{D}^{-1}(a_2\mathrm{A}) - \dfrac{a_2}{\sigma}\,\mathrm{D}^{-1}(a_1\mathrm{A}), \\ b = \mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}. \end{cases}$$

Telles sont les formules générales d'intégration pour déterminer a et b, c'est-à-dire x', y'; jointes à la formule (9), elles contiennent, si l'on veut, toute la théorie de la Lune.

En prenant

$$a = a_1, \qquad b = b_1 = \mathrm{D}^{-1}(-2\mathrm{PR}a_1),$$

cette quadrature n'étant accompagnée d'aucune constante, on obtiendra une solution x'_1, y'_1 (ou ξ'_1, η'_1) des équations (5) et (7) privées de seconds membres; b_1, ξ'_1, η'_1 sont de la même forme que a_1. On a aussi une seconde solution analogue a_2, b_2, ξ'_2, η'_2, dans laquelle a_2, ξ'_2 sont les conjuguées de a_1, ξ'_1, tandis que b_2, η'_2 sont les conjuguées changées de signe de b_1, η'_1.

Effectuons les calculs que nous venons d'indiquer. On a d'abord, en faisant $u = \Sigma\,u_k\theta^k$, et représentant de même les autres fonctions

analogues,

$$u_k = \xi_{0,k} + \lambda\,\eta_{0,k}, \qquad v_k = \eta_{0,k} + \lambda\,\xi_{0,k},$$

et, par suite,

$$u_0 = 1,$$

$$u_2 = \frac{7}{2^3}m^2 + \frac{19}{2^2\cdot 3}m^3 + \frac{53}{2^2\cdot 3^2}m^4 + \frac{155}{2^3\cdot 3^3}m^5 + \ldots = [\overline{3},82092] \quad (1),$$

$$u_4 = \frac{125}{2^9}m^4 \qquad = [\overline{5},160],$$

$$v_2 = -\frac{5}{2^4}m^2 - \frac{1}{2^2\cdot 3}m^3 + \frac{5}{2\cdot 3^2}m^4 + \frac{43}{2^3\cdot 3^3}m^5 + \ldots = [\overline{3},31687-],$$

$$v_4 = \frac{125}{2^9}m^4 + \ldots = [\overline{5},771],$$

On a ensuite facilement

$$P = 1 + m + \frac{1}{2}D\log\frac{u+v}{u-v} = 1 + m + D\left(\frac{v}{u} + \frac{v^3}{3u^3} + \ldots\right),$$

$$Q = \frac{1}{2}D\log(u^2 - v^2) = \frac{Du}{u} - D\left(\frac{v^2}{2u^2} + \frac{v^4}{4u^4} + \ldots\right),$$

$$R = (u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{u^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{u^4} + \ldots\right),$$

$$U = uR, \qquad V = vR,$$

formant donc préalablement $\frac{1}{u}$ et $\frac{v}{u}$, ainsi que les puissances successives de ce rapport, il vient

$$P_0 = 1 + m = 1,08084893,$$

$$P_2 = -\frac{5}{2^3}m^2 - \frac{1}{2\cdot 3}m^3 + \frac{5}{3^2}m^4 + \frac{43}{2^2\cdot 3^3}m^5 + \ldots = [\overline{3},61795-],$$

$$P_4 = \frac{265}{2^7}m^4 + \ldots = [\overline{4},0596],$$

(1) Ces valeurs numériques sont celles qui résultent des nombres déjà donnés, mais rectifiées, s'il y a lieu, d'après les résultats que fournirait un degré légèrement supérieur d'approximation; il en est de même pour d'autres cas analogues dans ce Chapitre.

et enfin

$$S'_0 = 1 + 2m - \frac{1}{2}m^2 + \frac{225}{2^5}m^4 + 19m^5 + \frac{80}{3}m^6 + \dots = 1,15884394,$$

$$S'_2 = -\frac{15}{2}m^2 - \frac{27}{2^2}m^3 - 11m^4 - \frac{23}{2 \cdot 3}m^5 + \dots = [\bar{2},756210-],$$

$$S'_4 = \frac{111}{2^4}m^4 + \dots = [\bar{4},4835],$$

D'après ces expressions des coefficients S'_k, on a pour première valeur approchée de g_0

$$g_0 = 1 + m - \frac{3}{4}m^2 + \dots,$$

et tout se passe comme au numéro précédent, quand il s'agit d'intégrer la première équation (10) privée de second membre.

Conservant les mêmes notations, sauf les quelques changements nécessaires, on a d'abord

$$S'^2_2 = \frac{225}{2^2}m^4 + \frac{855}{2^2}m^5 + \frac{5889}{2^4}m^6 + 371m^7 + \dots = [\bar{3},512420],$$

$$A = 2m - \frac{1}{2}m^2 + 15m^4 + \dots = [\bar{1},202081],$$

$$B = 2m - \frac{1}{2}m^2 - \frac{225}{2^4}m^3 - \frac{2685}{2^6}m^4 - \dots = [\bar{1},172263],$$

$$-\frac{S'^2_2}{A+B} = -\frac{225}{2^4}m^3 - \frac{3645}{2^6}m^4 - \frac{109429}{2^{10}}m^5 - \frac{1747583}{2^{12}}m^6 - \dots$$
$$= -0,01036726$$

C'est là une première valeur approchée de n_0, qui n'est exacte qu'à des termes près du sixième ordre par rapport à m; pour trouver le coefficient exact de m^6 dans n_0, il suffit de prendre

$$C = \frac{1}{16}n_2 n_{-2}\frac{S'_2}{n^2_2 n_{-4}} = -\frac{20622}{2^{10}}m^7 + \dots,$$

et l'on obtient exactement

$$n_0 = -\frac{225}{2^4}m^3 - \frac{3645}{2^6}m^4 - \frac{109429}{2^{10}}m^5 - \frac{1646333}{2^{12}}m^6 - \dots,$$

d'où

$$g_0^2 = 1 + 2m - \frac{1}{2}m^2 - \frac{225}{2^4}m^3 - \frac{3135}{2^6}m^4 - \frac{139973}{2^{10}}m^5 - \frac{4611319}{2^{12}\,3}m^6 - \dots$$

et finalement

$$g_0 = 1 + m - \frac{3}{2^2}m^2 - \frac{201}{2^5}m^3 - \frac{2367}{2^7}m^4 - \frac{111749}{2^{11}}m^5 - \frac{4095991}{2^{13}\,3}m^6 - \dots$$

Numériquement, on trouve pour la correction de la première valeur approchée de n_0 le nombre $+0,00001\,404$, d'où

$$n_0 = -0,010553\,22,$$
$$g_0^2 = 1,14829072,$$
$$g_0 = 1,07158328$$

On trouve ensuite analytiquement

$$\alpha_{1,0} = 1,$$
$$\alpha_{1,-2} = \frac{15}{2^3}m + \frac{159}{2^6}m^2 + \frac{2971}{2^9}m^3 + \frac{172811}{2^{11}\,3}m^4 + \dots,$$
$$\alpha_{1,2} = -\frac{15}{2^4}m^2 - \frac{21}{2^4}m^3 - \frac{137}{2^7}m^4 - \dots,$$
$$\alpha_{1,-4} = -\frac{225}{2^7}m^3 - \frac{4251}{2^9}m^4 - \dots,$$
$$\alpha_{1,4} = \frac{149}{2^8}m^4 + \dots,$$

puis, en faisant de même

$$b_1 = \theta^{n_0}\Sigma\beta_{1,k}\theta^k, \qquad \xi'_1 = \theta^{n_0}\Sigma\mu_{1,k}\theta^k, \qquad \eta'_1 = \theta^{n_0}\Sigma\nu_{1,k}\theta^k,$$

on a

$$\beta_{1,0} = -2 - \frac{3}{2}m^2 - \frac{87}{2^4}m^3 - \frac{2021}{2^7}m^4 - \dots,$$
$$\beta_{1,-2} = \frac{15}{2^2}m + \frac{231}{2^4}m^2 + \frac{10147}{2^8}m^3 + \frac{245243}{2^{10}\,3}m^4 + \dots,$$
$$\beta_{1,2} = \frac{13}{2^3}m^2 + \frac{65}{2^4\,3}m^3 + \frac{1589}{2^6\,3^2}m^4 + \dots,$$
$$\beta_{1,-4} = -\frac{195}{2^6}m^3 - \frac{3645}{2^8}m^4 - \dots,$$
$$\beta_{1,4} = -\frac{265}{2^7}m^4 - \dots.$$

$$\mu_{1,0} = 1 - \frac{72}{2^{6}} m^{3} - \frac{565}{2^{7}} m^{4} - \ldots,$$

$$\mu_{1,-2} = \frac{15}{2^{3}} m + \frac{139}{2^{5}} m^{2} + \frac{17657}{2^{9}\cdot 2} m^{3} + \frac{520033}{2^{11}\cdot 3^{2}} m^{4} + \ldots,$$

$$\mu_{1,2} = -\frac{5}{2^{4}} m^{2} - \frac{55}{2^{4}\cdot 3} m^{3} - \frac{1333}{2^{7}\cdot 3^{2}} m^{4} - \ldots,$$

$$\mu_{1,-4} = -\frac{72}{2^{7}} m^{3} - \frac{903}{2^{8}} m^{4} - \ldots,$$

$$\mu_{1,4} = -\frac{187}{2^{9}} m^{4} - \ldots,$$

$$\nu_{1,0} = -2 - \frac{3}{2} m^{2} - \frac{321}{2^{4}} m^{3} + \frac{1127}{2^{3}} m^{4} + \ldots,$$

$$\nu_{1,-2} = \frac{15}{2^{2}} m + 13 m^{2} + \frac{28073}{2^{8}\cdot 3} m^{3} + \frac{693937}{2^{10}\cdot 3^{2}} m^{4} + \ldots,$$

$$\nu_{1,2} = -\frac{7}{2^{4}} m^{2} - \frac{13}{2^{3}\cdot 3} m^{3} - \frac{703}{2^{6}\cdot 3^{2}} m^{4} - \ldots,$$

$$\nu_{1,-4} = \frac{105}{2^{7}} m^{3} + \frac{1289}{2^{8}} m^{4} + \ldots,$$

$$\nu_{1,4} = -\frac{167}{2^{9}} m^{4} - \ldots$$

Les résultats numériques correspondants sont

$\alpha_{1,0} = 1,$ $\qquad \beta_{1,0} = [0,303986 -],$

$\alpha_{1,-2} = [\bar{1},28302],$ $\qquad \beta_{1,-2} = [\bar{1},62582],$

$\alpha_{1,2} = [\bar{3},8379 -],$ $\qquad \beta_{1,2} = [\bar{2},08588],$

$\alpha_{1,-4} = [\bar{3},1536 -],$ $\qquad \beta_{1,-4} = [\bar{3},3822 -],$

$\alpha_{1,4} = [\bar{5},50],$ $\qquad \beta_{1,4} = [\bar{4},055 -],$

$\mu_{1,0} = [\bar{1},999628],$ $\qquad \nu_{1,0} = [0,303454 -],$

$\mu_{1,-2} = [\bar{1},27347],$ $\qquad \nu_{1,-2} = [\bar{1},61407],$

$\mu_{1,2} = [\bar{3},4315 -],$ $\qquad \nu_{1,2} = [\bar{3},5066 -],$

$\mu_{1,-4} = [\bar{4},712 -],$ $\qquad \nu_{1,-4} = [\bar{4},860],$

$\mu_{1,4} = [\bar{5},34 -],$ $\qquad \nu_{1,4} = [\bar{5},28 -],$

Quant à la valeur de la constante α, égale à $a_2 \mathrm{D}a_1 - a_1 \mathrm{D}a_2$, c'est

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2\Sigma\alpha_{1,i}^2(g_0 + h_i) \\
&= 2 + 2m - \frac{273}{2^5} m^2 - \frac{2739}{2^6} m^3 - \frac{139839}{2^{10}} m^4 - \dots \\
&= [0,3170326].
\end{aligned}
$$

Il est à peine utile de souligner la différence qui se manifeste entre l'ensemble de ces résultats et ceux du numéro précédent : les séries sont ici bien moins convergentes, les coefficients sont beaucoup plus grands.

127. Les formules (11) peuvent être avantageusement transformées, de façon à rendre plus direct le calcul de ξ' et η'. Mettons A sous la forme $\mathrm{A}_0 + \mathrm{PRJ}$, et n'oublions pas que l'on a

$$
-2\mathrm{PR} = \frac{\mathrm{D}b_1}{a_1} = \frac{\mathrm{D}b_2}{a_2},
$$

faisons aussi

$$
\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\alpha} = a',
$$

$$
\mathrm{D}^{-1}(-2\mathrm{PR}a' - \mathrm{R}^2) = \beta\tau + b',
$$

en désignant par β une constante, par a' et b' deux séries évidemment analogues à u et v, respectivement.

On a alors

$$
a = \frac{a_1}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_2\mathrm{A}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{JD}b_2\right) - \frac{a_2}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_1\mathrm{A}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{JD}b_1\right),
$$

et en intégrant par parties les termes qui contiennent J,

$$
a = \frac{a_1}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_2\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_2\mathrm{DJ}\right) - \frac{a_2}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_1\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_1\mathrm{DJ}\right) + \frac{1}{2}a'\mathrm{J}.
$$

On peut alors écrire

$$
\mathrm{D}b = \frac{\mathrm{D}b_1}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_2\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_2\mathrm{DJ}\right) - \frac{\mathrm{D}b_2}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_1\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_1\mathrm{DJ}\right) + \frac{1}{2}(\beta + \mathrm{D}b')\mathrm{J},
$$

et par suite, en appliquant encore l'intégration par parties,

$$
\begin{aligned}
b = {} & \frac{b_1}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_2\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_2\mathrm{DJ}\right) - \frac{b_2}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}\left(a_1\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_1\mathrm{DJ}\right) + \frac{1}{2}b'\mathrm{J} + \frac{\beta}{2}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{J} \\
& - \mathrm{D}^{-1}\left(a'\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b'\mathrm{DJ}\right).
\end{aligned}
$$

Faisons encore

$$u' = a'\mathrm{U} + b'v, \qquad v' = a'\mathrm{V} + b'u,$$

puis

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{X}\theta^{-1} + \mathrm{Y}\theta), \qquad \mathrm{N} = \frac{1}{2}(-\mathrm{X}\theta^{-1} + \mathrm{Y}\theta)$$

on a

$$\mathrm{DJ} = \mathrm{X}\,\mathrm{D}y_0 + \mathrm{Y}\,\mathrm{D}x_0 = 2(v\mathrm{M} + u\mathrm{N}),$$

et par suite,

$$a_1\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_1\mathrm{DJ} = \xi'_1\mathrm{M} + \eta'_1\mathrm{N},$$

$$a_2\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b_2\mathrm{DJ} = \xi'_2\mathrm{M} + \eta'_2\mathrm{N},$$

$$a\ \mathrm{A}_0 + \frac{1}{2}b'\mathrm{DJ} = u'\mathrm{M} + v'\mathrm{N}$$

Donc, finalement,

$$(12)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{\xi_1}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}(\xi'_2\mathrm{M} + \eta'_2\mathrm{N}) - \dfrac{\xi'_2}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}(\xi'_1\mathrm{M} + \eta'_1\mathrm{N}) \\ \qquad + u'\mathrm{D}^{-1}(v\mathrm{M} + u\mathrm{N}) - v\mathrm{D}^{-1}(u'\mathrm{M} + v'\mathrm{N}) + \beta v\mathrm{D}^{-2}(v\mathrm{M} + u\mathrm{N}), \\ \eta' = \dfrac{\eta'_1}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}(\xi'_2\mathrm{M} + \eta'_2\mathrm{N}) - \dfrac{\eta'_2}{\alpha}\mathrm{D}^{-1}(\xi'_1\mathrm{M} + \eta'_1\mathrm{N}) \\ \qquad + v'\mathrm{D}^{-1}(v\mathrm{M} + u\mathrm{N}) - u\mathrm{D}^{-1}(u'\mathrm{M} + v'\mathrm{N}) + \beta u\mathrm{D}^{-2}(v\mathrm{M} + u\mathrm{N}) \end{cases}$$

On trouve successivement

$$a'_0 = -2 + 2m - 5m^2 + 11m^3 + \frac{5937}{2^7}m^4 + \quad = [0,270153 -],$$

$$a'_2 = \quad 4m^2 + \frac{65}{2^2\ 3}m^3 + \frac{209}{2\ 3^2}m^4 + \quad = [\bar{2},46903],$$

$$a'_4 = -\frac{5}{2}m^4 + \quad = [\bar{4},138 -],$$

$$b'_2 = -\frac{49}{2^3}m^2 - \frac{121}{2^2\ 3}m^3 - \frac{821}{2^2\ 3^2}m^4 - \quad = [\bar{2},66538 -],$$

$$b'_4 = \quad \frac{891}{2^7}m^4 + \quad = [\bar{4},578],$$

$$\beta = 3 + 6m^2 - 12m^3 - \frac{10887}{2^7} m^4 - \ldots = [0,481200],$$

$$u'_0 = -2 + 2m - 2m^2 + 11m^3 - \frac{171}{2^5} m^4 - \ldots = [0,270196-],$$

$$u'_2 = 4m^2 + \frac{65}{2^2 \cdot 3} m^3 + \frac{209}{2 \cdot 3^2} m^4 + \ldots = [2,46905],$$

$$u'_4 = -\frac{175}{2^8} m^4 - \ldots = [5,629-]$$

$$v'_2 = -\frac{11}{2} m^2 - \frac{253}{2^3 \cdot 3} m^3 - \frac{3163}{2^4 \cdot 3^2} m^4 - \ldots = [3,62748-]$$

$$v'_4 = -\frac{175}{2^8} m^4 - \ldots = [5,630-],$$

On a une plus grande précision dans le calcul de a'_0, a'_2, a'_4, ..., en remarquant, d'après l'expression de a, que a' est solution de la première équation (10) où l'on prend $X = 0$, $Y = 0$, $J = 2$, soit

$$D^2 a' - S' a' = 2PR$$

et en appliquant la méthode des coefficients indéterminés par approximations successives.

On peut retrouver ce qui précède d'une façon différente. Les formules (12) nous font voir que si l'on suppose $M = N = 0$, de sorte que les quadratures se réduisent à des constantes arbitraires, les équations (5), privées de seconds membres, admettent les quatre solutions distinctes

$$\xi'_1, \eta'_1, \quad \xi'_2, \eta'_2,$$

$$\xi'_3 = v, \qquad \eta'_3 = u, \qquad \xi'_4 = u' + \beta v \tau, \qquad \eta'_4 = v' + \beta u \tau,$$

dont les trois premières sont déjà connues.

Revenons alors aux équations (4) qui définissent la variation, et en faisant

$$a x_0 = x_1, \qquad a y_0 = y_1, \qquad \rho_1 = (x_1 y_1)^{-\frac{1}{2}}, \quad u = \tau_1,$$

écrivons-les sous la forme

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau_1^2} + 2n' \frac{dx_1}{d\tau_1} + \frac{3}{2} n'^2 (x_1 + y_1) - f(M_0 + M_1) \rho_1^3 x_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 y_1}{d\tau_1^2} - 2n' \frac{dy_1}{d\tau_1} + \frac{3}{2} n'^2 (x_1 + y_1) - f(M_0 + M_1) \rho_1^3 y_1 = 0,$$

de façon à y faire disparaître toute trace de la constante arbitraire n. En différentiant par rapport à n, on a donc

$$\frac{d^2}{d\tau_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial n}\right) + 2n'\frac{d}{d\tau_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial n}\right) + \frac{3}{2}n'^2\left(\frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial y_1}{\partial n}\right)$$
$$+ f(M_0+M)\left(\frac{1}{2}\rho_1^3\frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{3}{2}\rho_1^5 x_1^2\frac{\partial y_1}{\partial n}\right) = 0$$

$$\frac{d^2}{d\tau_1^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right) - 2n'\frac{d}{d\tau_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right) + \frac{3}{2}n'^2\left(\frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial y_1}{\partial n}\right)$$
$$+ f(M_0+M)\left(\frac{3}{2}\rho_1^5 y_1^2\frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{1}{2}\rho_1^3\frac{\partial y_1}{\partial n}\right) = 0,$$

et l'on voit par suite que les équations (5), privées de seconds membres, admettent la solution $x' = \frac{\partial x_1}{\partial n}$, $y' = \frac{\partial y_1}{\partial n}$, ou plutôt

$$x' = \frac{n-n'}{a}\frac{\partial x_1}{\partial n}, \qquad y' = \frac{n-n'}{a}\frac{\partial y_1}{\partial n}.$$

D'après la relation

$$f(M_0+M) = \mathbf{k}(n-n')^2 a^3,$$

on a

$$\frac{n-n'}{a}\frac{\partial a}{\partial n} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{n-n'}{\mathbf{k}}\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial n},$$

$\mathbf{k}$ est une fonction de m, ou $\frac{n'}{n-n'}$, de sorte que

$$(n-n')\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial n} = -m\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial m},$$

et, par suite,

$$\frac{n-n'}{a}\frac{\partial a}{\partial n} = \mathbf{k}',$$

en faisant

$$\mathbf{k}' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{m}{\mathbf{k}}\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial m}.$$

D'autre part, x_0 dépend de m et θ, et l'on a

$$(n-n')\frac{\partial x_0}{\partial n} = -m\frac{\partial x_0}{\partial m} + (n-n')\frac{\partial x_0}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial n},$$

d'ailleurs

$$\theta\frac{\partial x_0}{\partial \theta} = \mathrm{D}x_0, \qquad (n-n')\theta^{-1}\frac{\partial \theta}{\partial n} = \tau,$$

en modifiant légèrement la définition de τ, que nous prenons ici égal à $i(n - n')t$, ce qui n'a aucun inconvénient

La solution envisagée est donc

$$x' = \mathbf{k}' x_0 - m \frac{\partial x_0}{\partial m} + \tau D x_0, \qquad y' = \mathbf{k}' y_0 - m \frac{\partial y_0}{\partial m} + \tau D y_0,$$

ou bien

$$\xi' = \mathbf{k}' \xi_0 - m \frac{\partial \xi_0}{\partial m} + u \tau, \qquad \eta' = \mathbf{k}' \eta_0 - m \frac{\partial \eta_0}{\partial m} + v \tau,$$

et sous cette forme, sa détermination analytique est immédiate, sa détermination numérique directe pourrait se faire aussi sans peine, en appliquant toujours la même méthode des coefficients indéterminés, par approximations successives, en partant des équations (5) sans seconds membres

Or ces valeurs de ξ', η' doivent être les mêmes combinaisons linéaires et homogènes de ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 et η'_1, η'_2, η'_3, η'_4, puisque les équations (5) considérées forment un système linéaire homogène du quatrième ordre D'après la nature des développements de ces solutions, on voit alors que l'on a nécessairement

$$u' = \beta\left(\mathbf{k}' \xi_0 - m \frac{\partial \xi_0}{\partial m}\right),$$

$$v' = \beta\left(\mathbf{k}' \eta_0 - m \frac{\partial \eta_0}{\partial m}\right),$$

ainsi qu'on peut le vérifier immédiatement

On sait maintenant que la solution générale des équations (5) complètes peut se mettre sous la forme

$$\xi' = C_1 \xi'_1 + C_2 \xi'_2 + C_3 \xi'_3 + C_4 \xi'_4,$$

$$\eta' = C_1 \eta'_1 + C_2 \eta'_2 + C_3 \eta'_3 + C_4 \eta'_4,$$

en déterminant les quantités C_1, C_2, C_3, C_4, suivant la méthode de la variation des constantes, par les équations

$$\xi'_1 DC_1 + \xi'_2 DC_2 + \xi'_3 DC_3 + \xi'_4 DC_4 = 0,$$

$$\eta'_1 DC_1 + \eta'_2 DC_2 + \eta'_3 DC_3 + \eta'_4 DC_4 = 0,$$

$$D\xi'_1 DC_1 + D\xi'_2 DC_2 + D\xi'_3 DC_3 + D\xi'_4 DC_4 = M,$$

$$D\eta'_1 DC_1 + D\eta'_2 DC_2 + D\eta'_3 DC_3 + D\eta'_4 DC_4 = - N$$

Avant de résoudre ces équations, nous ferons l'observation suivante

Si x'_i, y'_i et x'_j, y'_j sont deux solutions distinctes des équations (5) sans seconds membres, on a les relations

$$
\begin{aligned}
D^2 x'_i + 2m\, D y'_i + P x'_i + Q y'_i &= 0,\\
D^2 y'_i - 2m\, D x'_i + P y'_i + R x'_i &= 0,\\
D^2 x'_j + 2m\, D y'_j + P x'_j + Q y'_j &= 0,\\
D^2 y'_j - 2m\, D x'_j + P y'_j + R x'_j &= 0,
\end{aligned}
$$

P, Q, R désignant trois fonctions qu'il n'y a pas lieu de spécifier. Éliminant P, Q, R entre ces relations, on a

$$
\begin{vmatrix}
D^2 x'_i + 2m\, D y'_i & x'_i & y'_i & 0 \\
D^2 y'_i - 2m\, D x'_i & y'_i & 0 & x'_i \\
D^2 x'_j + 2m\, D y'_j & x'_j & y'_j & 0 \\
D^2 y'_j - 2m\, D x'_j & y'_j & 0 & x'_j
\end{vmatrix} = 0,
$$

ou bien après division par $x'_i y'_j - x'_j y'_i$,

$$
D[x'_i D y'_j - x'_j D y'_i + y'_i D x'_j - y'_j D x'_i - 2m(x'_i y'_j - x'_j y'_i)] = 0
$$

Posons

$$
D\xi'_i + (1+m)\eta'_i = D'\xi'_i, \qquad D\eta'_i + (1+m)\xi'_i = D'\eta'_i,
$$

ceci nous donne

$$
\xi'_i D'\xi'_j - \xi'_j D'\xi'_i - \eta'_i D'\eta'_j + \eta'_j D'\eta'_i = C_{ij},
$$

en désignant par C_{ij} une constante.

D'après la nature des développements des différentes fonctions ξ_i, η_i, il est d'ailleurs évident que l'on a

$$
C_{13} = C_{14} = C_{23} = C_{24} = 0
$$

Revenons aux équations qui déterminent DC_1, DC_2, ... et combinons-les tout d'abord de façon à remplacer dans les deux dernières $D\xi'_1$, $D\eta'_1$, ... par $D'\xi'_1$, $D'\eta'_1$, ... ; on en tire, par exemple,

$$
DC_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0},
$$

avec

$$
\Delta_0 = \begin{vmatrix}
\xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & \xi'_4 \\
D'\xi'_1 & D'\xi'_2 & D'\xi'_3 & D'\xi'_4 \\
\eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & \eta'_4 \\
D'\eta'_1 & D'\eta'_2 & D'\eta'_3 & D'\eta'_4
\end{vmatrix}, \qquad
\Delta_1 = \begin{vmatrix}
0 & \xi'_2 & \xi'_3 & \xi'_4 \\
M & D'\xi'_2 & D'\xi'_3 & D'\xi'_4 \\
0 & \eta'_2 & \eta'_3 & \eta'_4 \\
-N & D'\eta'_2 & D'\eta'_3 & D'\eta'_4
\end{vmatrix}
$$

Appelons Δ le déterminant Δ_0 ou Δ_1 dans lequel on remplace les éléments de la première colonne par des quantités quelconques a, a', b, b' : on peut écrire

$$\begin{aligned}\Delta = {} & (a\,D'\xi'_2 - a'\xi'_2)(\eta'_3\,D'\eta'_4 - \eta'_4\,D'\eta'_3) + (b\,D'\eta'_2 - b'\eta'_2)(\xi'_3\,D'\xi'_4 - \xi'_4\,D'\xi'_3)\\ & + (a\,D'\xi'_3 - a'\xi'_3)(\eta'_4\,D'\eta'_2 - \eta'_2\,D'\eta'_4) + (b\,D'\eta'_3 - b'\eta'_3)(\xi'_4\,D'\xi'_2 - \xi'_2\,D'\xi'_4)\\ & + (a\,D'\xi'_4 - a'\xi'_4)(\eta'_2\,D'\eta'_3 - \eta'_3\,D'\eta'_2) + (b\,D'\eta'_4 - b'\eta'_4)(\xi'_2\,D'\xi'_3 - \xi'_3\,D'\xi'_2)\end{aligned}$$

remplaçant chacun des seconds facteurs par sa valeur tirée des relations

$$\begin{aligned}\xi'_3\,D'\xi'_4 - \xi'_4\,D'\xi'_3 - \eta'_3\,D'\eta'_4 + \eta'_4\,D'\eta'_3 &= C_{34},\\ \xi'_4\,D'\xi'_2 - \xi'_2\,D'\xi'_4 - \eta'_4\,D'\eta'_2 + \eta'_2\,D'\eta'_4 &= 0,\\ \xi'_2\,D'\xi'_3 - \xi'_3\,D'\xi'_2 - \eta'_2\,D'\eta'_3 + \eta'_3\,D'\eta'_2 &= 0,\end{aligned}$$

il vient simplement

$$\Delta = C_{34}(-a\,D'\xi'_2 + b\,D'\eta'_2 + a'\xi'_2 - b'\eta'_2),$$

soit

$$\Delta_0 = -C_{12}C_{34}, \qquad \Delta_1 = C_{34}(\xi'_2\,M + N\,\eta'_2),$$

et par suite

$$DC_1 = -\frac{1}{C_{12}}(\xi'_2\,M + \eta'_2\,N),$$

on a de même

$$DC_2 = \frac{1}{C_{12}}(\xi'_1\,M + \eta'_1\,N), \qquad DC_3 = -\frac{1}{C_{34}}(\xi'_4\,M + \eta'_4\,N),$$
$$DC_4 = \frac{1}{C_{34}}(\xi'_3\,M + \eta'_3\,N).$$

En observant que l'on a généralement, en désignant par φ une fonction quelconque,

$$D^{-1}(\varphi\tau) = \tau D^{-1}\varphi - D^{-2}\varphi,$$

on retombe ainsi, comme il était nécessaire, sur les formules (12), avec en plus les relations

$$\alpha = -C_{12}, \qquad C_{34} = 1.$$

La première de ces égalités donne une nouvelle façon de calculer α ; quant à la seconde, elle permet de déterminer la constante β d'une manière entièrement indépendante des calculs relatifs à ξ'_1, ξ'_2, η'_1, η'_2. Si l'on pose en effet

$$\xi'_0 = \mathbf{k}'\xi_0 - m\frac{\partial\xi_0}{\partial m}, \qquad \eta'_0 = \mathbf{k}'\eta_0 - m\frac{\partial\eta_0}{\partial m},$$

on a immédiatement

$$\frac{1}{\beta} = v\,\mathrm{D}\xi'_0 - \xi'_0\,\mathrm{D}v - u\,\mathrm{D}\eta'_0 + \eta'_0\,\mathrm{D}u - u^2 + v^2 - 2(1+m)(u\xi_0 - v\eta'_0),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\beta} = -\sum_k [u_k^2 + v_k^2 + 2k(u_k\eta'_{0,k} + v_k\xi'_{0,k}) + 2(1+m)(u_k\xi'_{0,k} + v_k\eta'_{0,k})]$$

128 Revenons aux équations générales (5) et (6) Les inconnues x', y', z sont nécessairement petites, et les paramètres ε', σ sont plus petits encore Pour obtenir les parties principales de x, y, z, il suffit donc, d'après la nature des fonctions X, Y, Z, J, de supposer ces fonctions nulles Dans ces conditions, la formule (9) donne d'abord

$$z = C_1\zeta_1 - C_2\zeta_2,$$

en désignant par C_1 et C_2 deux constantes arbitraires conjuguées. Remplaçons ces constantes par deux autres réelles γ et ϑ_0, en posant

$$C_1 = \frac{\gamma\omega}{2} e^{-i\vartheta_0}, \qquad C_2 = \frac{\gamma\omega}{2} e^{i\vartheta_0},$$

formules où ω représente une constante numérique réelle qui sera fixée un peu plus loin Nommons de plus H_0 l'argument $h_0\mathrm{D} - \vartheta_0$, et faisons

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{i\mathrm{H}_0}, \qquad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-i\mathrm{H}_0},$$

puis

$$z_1 = \omega c_1, \qquad z_{-1} = -\omega c_2,$$

nous pourrons écrire

$$z = \gamma_1 z_1 + \gamma_{-1} z_{-1},$$

z_1 est une série de la même forme que c_1,

$$z_1 = \sum z_{1,k}\theta^k \qquad (k \text{ pair}),$$

de même

$$z_{-1} = \sum z_{-1,k}\theta^k \qquad (z_{-1,k} = -z_{1,-k})$$

D'après la formule générale qui définit la latitude, la partie correspondante de celle-ci sera

$$\sigma = \rho_0 z = \gamma_1\sigma_1 + \gamma_{-1}\sigma_{-1},$$

avec

$$\sigma_1 = \rho_0 z_1, \qquad \sigma_{-1} = \rho_0 z_{-1}.$$

Les développements de σ_1 et σ_{-1} sont pareils à ceux de z_1 et z_{-1}; nous choisirons la constante ω de façon que $\sigma_{1,0} = 1$.

Sous forme réelle, on a immédiatement

$$L = a\gamma \sum z_{1,k} \sin(H_0 + kD),$$
$$s = \gamma \sum \sigma_{1,k} \sin(H_0 + kD).$$

On voit ainsi, en négligeant pour un instant m, que l'on peut considérer grossièrement la Lune comme se mouvant dans une orbite dont l'inclinaison serait γ (cette constante étant petite), l'argument de la latitude étant égal à H_0. Par suite, en supposant encore la longitude dans l'orbite égale à N, la longitude du nœud ascendant serait $\vartheta = N - H_0$, et varierait proportionnellement au temps, avec un moyen mouvement égal à nh'_0, en faisant

$$h'_0 = 1 - \frac{h_0}{1+m},$$

pour ces raisons, nous appellerons γ l'inclinaison, et nh'_0 le mouvement du nœud ascendant de l'orbite de la Lune.

On trouve sans peine

$$h'_0 = -\frac{3}{2^2} m^2 + \frac{27}{2^6} m^3 - \frac{123}{2^7} m^4 + \frac{1925}{2^{11}} m^5 - \frac{25667}{2^{13}\cdot 3} m^6 + \ldots = -0,00399916;$$

le mouvement du nœud est donc rétrograde, et sa valeur, pour une année julienne, est $-69288''$.

On a encore

$$\omega = 1 - \frac{3}{2^4} m^3 + \frac{141}{2^8} m^4 + \ldots = [0,000055],$$

et par suite

$$z_{1,0} = 1 + \frac{3}{2^4} m^3 + \frac{141}{2^8} m^4 + \ldots = [0,000055],$$

$$z_{1,-2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{29}{2^6} m^2 - \frac{2029}{2^9\cdot 3} m^3 - \frac{20171}{2^{11}\cdot 3^2} m^4 - \ldots = [5,26807-],$$

$$z_{1,2} = \frac{3}{2^4} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{197}{2^7\cdot 3} m^4 + \ldots = [3,1797],$$

$$z_{1,-4} = -\frac{9}{2^7} m^3 - \frac{105}{2^9} m^4 - \ldots = [5,07-],$$

$$z_{1,4} = \frac{22}{2^8} m^4 + \ldots = [6,8],$$

$$\sigma_{1,0} = 1,$$

$$\sigma_{1,-2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{13}{2^5} m^2 - \frac{1133}{2^9 \cdot 3} m^3 - \frac{14539}{2^{11} \cdot 3^2} m^4 - \ldots = [2,52372 -],$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{11}{2^4} m^2 + \frac{13}{2^2 \cdot 3} m^3 + \frac{943}{2^7 \cdot 3^2} m^4 + \ldots = [\bar{3},7077],$$

$$\sigma_{1,-4} = -\frac{33}{2^7} m^3 - \frac{221}{2^9} m^4 - \ldots = [4,194 -],$$

$$\sigma_{1,4} = \frac{161}{2^8} m^4 + \ldots = [2,53],$$

Finalement, en prenant avec Brown $\gamma = 0,08977432$, la partie correspondante de la latitude s sera, avec la même approximation que précédemment,

$$18517'' \sin H_0 - 618'' \sin(H_0 - 2D) + 94'' \sin(H_0 + 2D)$$
$$- 3'' \sin(H_0 - 4D) + 1'' \sin(H_0 + 4D).$$

De la même façon, les formules (11) ou (12) conduisent à prendre

$$\xi' = C_1 \xi'_1 + C_2 \xi'_2, \qquad \eta' = C_1 \eta'_1 + C_2 \eta'_2,$$

en désignant encore par C_1, C_2 deux nouvelles constantes arbitraires conjuguées. Remplaçons-les par deux autres, réelles, ε et φ_0, en posant

$$C_1 = \frac{\varepsilon\omega}{2} e^{-i\varphi_0}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon\omega}{2} e^{i\varphi_0},$$

formules où ω désigne une constante numérique fixée plus loin. Soit de plus G_0 l'argument $g_0 D + \varphi_0$, et faisons

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iG_0}, \qquad \varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iG_0},$$

puis

$$\xi_1 = \omega\mu_1, \qquad \xi_{-1} = \omega\mu_2, \qquad \eta_1 = \omega\nu_1, \qquad \eta_{-1} = \omega\nu_2,$$

en mettant μ_1 pour $\Sigma \mu_{1,k} \theta^k$, et de même dans les cas analogues. Nous pourrons écrire

$$\xi' = \varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_{-1} \xi_{-1}, \qquad \eta' = \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_{-1} \eta_{-1},$$

ξ_1, η_1 sont de même forme que μ_1, ν_1, et l'on a

$$\xi_{-1,k} = \xi_{1,-k}, \qquad \eta_{-1,k} = -\eta_{1,-k}.$$

D'après les formules générales qui définissent la parallaxe et la longitude, on a sans peine pour les parties correspondantes de ces coordonnées

$$\rho' = \varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_{-1} \rho_{-1}, \qquad \lambda' = \varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_{-1} \lambda_{-1},$$

avec

$$\rho_1 = (\rho_0^3 \xi_0)\xi_1 + (\rho_0^3 \eta_0)\eta_1, \qquad \lambda_1 = -(\rho_0^3 \eta_0)\xi_1 + (\rho_0^3 \xi_0)\eta_1;$$

ρ_{-1} est la quantité conjuguée de ρ_1, λ_{-1} est la conjuguée changée de signe de λ_1. Nous choisirons la constante ω de façon que l'on ait $\lambda_{1,0} = 0$.

Sous forme réelle, on obtient encore immédiatement, après avoir fait $p_1 = \xi_1 + \eta_1$, $q_1 = \xi_1 - \eta_1$,

$$X' = \frac{a\varepsilon}{2} \sum (p_{1,k} \cos(N + G_0 + kD) + p_{-1,k} \cos(N - G_0 - kD)),$$

$$Y' = \frac{a\varepsilon}{2} \sum (p_{1,k} \sin(N + G_0 + kD) + p_{-1,k} \sin(N - G_0 - kD)),$$

puis

$$(\sin \varpi)' = \frac{b}{a} \varepsilon \Sigma \rho_{1,k} \cos(G_0 + kD),$$

$$\varphi = \varepsilon \Sigma \lambda_{1,k} \sin(G_0 + kD).$$

Comme précédemment alors, on peut, dans une approximation grossière, considérer la Lune comme se mouvant dans une orbite keplerienne dont l'excentricité serait la petite constante ε, l'anomalie moyenne étant G_0. Par suite, la longitude du périgée serait $\varphi + N - G_0$, et varierait proportionnellement au temps, avec un moyen mouvement égal à ng'_0, en faisant

$$g'_0 = 1 - \frac{g_0}{1 - m},$$

aussi appellerons-nous ε l'excentricité, et nh'_0 le mouvement du périgée de l'orbite de la Lune.

On trouve

$$g'_0 = \frac{3}{2^2} m^2 + \frac{177}{2^5} m^3 + \frac{1659}{2^7} m^4 + \frac{85205}{2^{11}} m^5 + \frac{3073531}{2^{13} \cdot 3} m^6 + \ldots = 0{,}008[illegible]7[illegible]7;$$

le mouvement du périgée est donc direct, plus de deux fois plus grand en valeur absolue que celui du nœud; sa valeur pour une année julienne est

$$+ 148525''.$$

Nous avons vu précédemment combien peu convergente était la série qui définit g'_0, de sorte que la solution numérique s'impose pour en déterminer exactement la valeur La même observation s'applique à presque tous les résultats suivants, qui complètent les éléments de la solution ici envisagée

On a

$$\omega = -1 + \frac{3}{2^2} m^2 + \frac{69}{2^6} m^3 - \frac{477}{2^7} m^4 - \dots = [\bar{1},997694 -],$$

et par suite

$$\xi_{1,0} = -1 + \frac{3}{2^2} m^2 + \frac{9}{2^2} m^3 + \frac{11}{2^4} m^4 + \dots = [\bar{1},997323 -],$$

$$\xi_{1,-2} = -\frac{15}{2^3} m - \frac{139}{2^6} m^2 - \frac{12497}{2^9 \cdot 3} m^3 - \frac{422725}{2^{11} \cdot 3^2} m^4 - \dots = [\bar{1},27117 -],$$

$$\xi_{1,2} = \frac{2}{2^4} m^2 + \frac{55}{2^4 \cdot 3} m^3 + \frac{1063}{2^4 \cdot 3^2} m^4 + \dots = [\bar{3},4292],$$

$$\xi_{1,-4} = \frac{75}{2^7} m^3 + \frac{903}{2^8} m^4 + \dots = [\bar{4},710],$$

$$\xi_{1,4} = \frac{187}{2^9} m^4 + \dots = [\bar{5},33],$$

$$\eta_{1,0} = 2 + \frac{75}{2^7} m^3 + \frac{2113}{2^9} m^4 + \dots = [0,301148],$$

$$\eta_{1,-2} = -\frac{15}{2^2} m - 13 m^2 - \frac{22913}{2^8 \cdot 3} m^3 - \frac{566821}{2^{10} \cdot 3^2} m^4 - \dots = [\bar{1},61177 -],$$

$$\eta_{1,2} = \frac{7}{2^4} m^2 + \frac{13}{2^3 \cdot 3} m^3 + \frac{227}{2^2 \cdot 3^2} m^4 + \dots = [\bar{3},5042],$$

$$\eta_{1,-4} = -\frac{105}{2^7} m^3 - \frac{1289}{2^8} m^4 - \dots = [4,858 -],$$

$$\eta_{1,4} = \frac{167}{2^9} m^4 + \dots = [\bar{5},28],$$

d'où

$$\rho_{1,0} = 1 - \frac{3}{2^2} m^2 - \frac{189}{2^6} m^3 - \frac{123}{2^4} m^4 - \dots = [\bar{1},996979],$$

$$\rho_{1,-2} = \frac{15}{2^3} m + \frac{127}{2^6} m^2 + \frac{13961}{2^9 \cdot 3} m^3 + \frac{387397}{2^{11} \cdot 3^2} m^4 + \dots = [\bar{1},26393],$$

$$\rho_{1,2} = \frac{33}{2^4} m^2 + \frac{35}{2^4} m^3 + \frac{275}{2^7 \cdot 3} m^4 + \dots = [\bar{3},16592],$$

$$\rho_{1,-4} = \frac{495}{2^7} m^3 + \frac{7785}{2^9} m^4 + \dots = [\bar{3},4581],$$

$$\rho_{1,4} = \frac{805}{2^8} m^4 + \dots = [\bar{4},210],$$

$$\lambda_{1,0} = 2,$$

$$\lambda_{1,-2} = -\frac{15}{2^2}m - \frac{203}{2^4}m^2 - \frac{25849}{2^8\cdot 3}m^3 - \frac{264629}{2^{10}\cdot 3^2}m^4 - \ldots = [\bar{1},60952-],$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{17}{2^3}m^2 + \frac{67}{2^3\cdot 3}m^3 + \frac{1081}{2^6\cdot 3^2}m^4 + \ldots = [\bar{2},18870],$$

$$\lambda_{1,-4} = -\frac{225}{2^6}m^3 - \frac{4041}{2^8}m^4 - \ldots = [\bar{3},4928-],$$

$$\lambda_{1,4} = \frac{309}{2^7}m^4 + \ldots = [\bar{4},106],$$

Finalement, en prenant avec Brown $\varepsilon = 0,05490056$, les parties correspondantes de la longitude et de la parallaxe seront, toujours avec la même approximation,

$$v' = 22648'' \sin G_0 - 4608'' \sin(G_0 - 2D) + 175'' \sin(G_0 + 2D)$$
$$- 35'' \sin(G_0 - 4D) + 1'' \sin(G_0 + 4D),$$

$$(\sin \varpi)' = 186'',6 \cos G_0 + 34'',5 \cos(G_0 - 2D) + 2'',8 \cos(G_0 + 2D)$$
$$+ 0'',5 \cos(G_0 - 4D)$$

Les inégalités de la longitude de la Lune qui dépendent de $\sin G_0$ et $\sin(G_0 - 2D)$ sont connues respectivement sous le nom d'*équation du centre* et d'*évection*, nous venons d'en déterminer les parties principales, qu'il faut encore augmenter de termes complémentaires beaucoup moindres, de plus il convient de joindre au terme en $\sin G_0$ ceux en $\sin 2G_0$, $\sin 3G_0$, ... pour avoir la véritable équation du centre

129 Après avoir déterminé complètement, comme nous venons de le faire, les inégalités du mouvement de la Lune qui sont du premier degré par rapport à l'excentricité et à l'inclinaison, il est clair que nous pouvons poursuivre la solution générale du problème par approximations successives ordonnées suivant les puissances entières et positives des quatre paramètres ε, γ, ε', σ En admettant cette forme de solution, nous pouvons en effet, prenant tout d'abord les parties de X, Y, J qui sont du premier degré en ε' et σ, déterminer par les formules (11) ou (12) les inégalités de même forme dans v et ν il n'y en a pas dans z On pourra calculer alors les parties de X, Y Z, J, qui sont de deuxième degré par rapport à l'ensemble des paramètres, et en déduire par les formules (9), (11) ou (12) les iné-

$$\rho'^5 e^{-3il'} = 1 - 3\varepsilon'_1 + 13\varepsilon'_{-1} + \dots$$
$$\rho'^5 e^{3il'} = 1 + 13\varepsilon'_1 - 3\varepsilon'_{-1}$$
$$\rho'^5 e^{-2il'} = 1 - \varepsilon'_1 + 9\varepsilon'_{-1} + \dots,$$
$$\rho'^5 e^{2il'} = 1 + 9\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1} + \dots$$
$$\rho'^5 = 1 + 5\varepsilon'_1 + 5\varepsilon'_{-1} + 20\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \dots,$$

Comme conséquence de ce fait et de ce qui a été dit plus haut, ainsi que de la forme des inégalités du premier degré par rapport à ε et γ, nous pouvons conclure que la solution générale de notre problème sera donnée par des séries ordonnées suivant les puissances positives entières des quantités ε_1, ε_{-1}, γ_1, γ_{-1}, ε'_1, ε'_{-1}, et α, les coefficients de ces séries étant eux-mêmes des fonctions de θ et de m (aussi β', β'', β''', ...).

Toutefois, les quadratures qu'exige l'application des formules (9), (11) ou (12) feraient bien vite apparaître la variable τ en dehors des signes périodiques, c'est-à-dire donneraient des termes séculaires et mixtes, si l'on procédait exactement comme nous l'avons indiqué. Pour éviter ces termes, il suffira d'introduire une modification bien simple. Remplaçons les coefficients g_0 et h_0 par deux autres g et h, et en même temps les arguments G_0 et H_0 par $G = gD - \varphi_0$, $H = hD - \vartheta_0$, de sorte que maintenant

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iG}, \qquad \varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iG}, \qquad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH}, \qquad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH}$$

Supposons alors g et h développés eux-mêmes suivant les puissances positives entières de ε^2, γ^2, ε'^2, α^2, leurs parties principales, c'est-à-dire indépendantes de ces paramètres, étant précisément g_0 et h_0. Supposons de même la partie constante de la fonction J, soit (J), développée suivant les puissances de ε^2, γ^2, ε'^2, α^2, sans terme indépendant de ces quantités. Nous allons faire voir dans ce qui suit qu'il sera possible de déterminer les coefficients des séries qui représentent g, h, J de façon à éviter l'apparition de τ en dehors des signes périodiques, et finalement, aucun terme à caractère séculaire ne figurera plus dans les expressions des coordonnées.

Mais il est nécessaire de préciser davantage.

Étant bien entendu que dorénavant les arguments G_0 et H_0 sont partout remplacés par G et H, et que ε_1, ε_{-1}, γ_1, γ_{-1} ont leurs défini-

tions nouvelles, désignons généralement par M_n les différents monomes de la forme

$$\varepsilon_1^{p_1}\varepsilon_{-1}^{p_{-1}}\gamma_1^{q_1}\gamma_{-1}^{q_{-1}}\varepsilon_1'^{r_1}\varepsilon_{-1}'^{r_{-1}}\alpha^{s},$$

les exposants étant des entiers non négatifs, si, en particulier, ces exposants sont tous nuls, M_n devient $M_0 = 1$

Distinguons aussi spécialement parmi les monomes M_n ceux qui se réduisent à des constantes et pour lesquels l'exposant de α est pair, soit les M'_n, de la forme $(\varepsilon_1 \varepsilon_{-1})^p (\gamma_1 \gamma_{-1})^q (\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1})^r \alpha^{2s}$

Nous supposons les différentes inconnues $x, y, z, p, q, \xi, \eta, \rho, \lambda, \sigma$ développables sous la forme

$$x = \Sigma x_n M_n, \qquad y = \Sigma y_n M_n, \qquad \ldots,$$

de plus g, h, (J) sont aussi des inconnues développables sous la forme plus particulière

$$g = \Sigma g_n M'_n, \qquad h = \Sigma h_{n'} M'_{n'}, \qquad (J) = \Sigma J_{n'} M'_{n'}$$

Il est clair d'abord que si l'on prend $M_n = M_0$, les coefficients x_0, y_0, … sont précisément les éléments de la variation, déterminés précédemment avec cette notation même, g_0 et h_0 sont aussi les coefficients mêmes calculés ci-dessus, et l'on a $J_0 = 0$

Si l'on prend M_n égal à ε_1 ou ε_{-1}, les coefficients ξ_n, η_n, … sont précisément les fonctions ξ_1 ou ξ_{-1}, η_1 ou η_{-1}, …, du n° 128, et l'on a $z_n = \sigma_n = 0$, si l'on prend M_n égal à γ_1 ou γ_{-1}, z_n, σ_n sont les fonctions z_1 ou z_{-1}, σ_1 ou σ_{-1}, du même numéro, et l'on a $x_n = y_n = \ldots = 0$ En d'autres termes, avec ces hypothèses, nous embrassons l'ensemble des inégalités que nous avons étudiées jusqu'à présent, savoir celles qui sont du premier degré par rapport à l'excentricité et l'inclinaison, et en outre la variation

Il suffit de porter un instant l'attention sur la façon dont est composée la fonction U, et de ne pas perdre de vue diverses observations déjà faites, pour se convaincre des propriétés générales suivantes des développements de nos diverses inconnues, nous laissons d'ailleurs de côté x et y, qui ne sont autres que θp et $\theta^{-1} q$

Dans les monomes M_n qui figurent dans p, q, ξ, η, ρ, λ, la somme $q_1 + q_{-1}$ est paire, dans ceux qui figurent dans z, σ, cette somme est au contraire impaire

Les coefficients p_n, q_n, …, z_n, σ_n sont développables suivant les

puissances positives ou non de θ sous la forme

$$p_n = \Sigma p_{n,k}\theta^k, \qquad q_n = \Sigma q_{n,k}\theta^k, \qquad \ldots,$$

les $p_{n,k}, q_{n,k}, \ldots$ étant de simples fonctions de m (et aussi $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$) dont nous aurons à chercher soit les développements analytiques suivant les puissances de m, soit les valeurs numériques.

Les coefficients $g_{n'}, h_{n'}, l_n$ sont analogues aux $p_{n,k}$.

Dans les développements des fonctions $p_n, q_n, \ldots$, les indices k seront tous de la même parité que l'exposant s de α dans le monome M_n.

Si M_{-n} désigne le monome conjugué de M_n, obtenu par l'échange de ε_1 et ε_{-1}, γ_1 et γ_{-1}, ε'_1 et ε'_{-1}, on a

$$p_{-n,k} = q_{n,-k}, \qquad q_{-n,k} = p_{n,-k},$$
$$\xi_{-n,k} = \xi_{n,-k}, \qquad \rho_{-n,k} = \rho_{n,-k},$$
$$\eta_{-n,k} = -\eta_{n,-k}, \qquad \lambda_{-n,k} = -\lambda_{n,-k}, \qquad z_{-n,k} = -z_{n,-k}, \qquad \sigma_{-n,k} = -\sigma_{n,-k}.$$

Dans le cas particulier d'un monome M'_n, qui est son propre conjugué, on aura donc (et il en sera de même pour tous les monomes M_n constants)

$$p_{n',k} = q_{n',-k}, \qquad \xi_{n',k} = \xi_{n',-k}, \qquad \ldots, \qquad \eta_{n',k} = -\eta_{n',-k}.$$

Sous forme réelle, en faisant

$$C_n = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_{-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{q_1+q_{-1}} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{r_1+r_{-1}} \alpha^s,$$
$$V_{n,k} = kD + (p_1 - p_{-1})G + (q_1 - q_{-1})H + (r_1 - r_{-1})G',$$

on obtient aisément les développements

$$X = a\Sigma C_n p_{n,k} \cos(N + V_{n,k}),$$
$$Y = a\Sigma C_n p_{n,k} \sin(N + V_{n,k}),$$
$$Z = a\Sigma C_n z_{n,k} \sin V_{n,k},$$

$$\sin\varpi = \frac{b}{a}\Sigma C_n \rho_{n,k}\cos V_{n,k},$$
$$v = N + \Sigma C_n \lambda_{n,k}\sin V_{n,k},$$
$$s = \Sigma C_n \sigma_{n,k}\sin V_{n,k},$$

pour les coordonnées rectilignes et polaires.

Les sommations sont étendues à tous les indices n, k possibles.

dans chaque cas, et par suite les quatre derniers développements se trouvent écrits sous forme symétrique.

On a aussi

$$g = \sum g_n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2p} \left(\frac{i}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{2r} \mu^{2s},$$

$$h = \sum h_n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2p} \left(\frac{i}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{2r} \mu^{2s}$$

et l'on a des développements analogues pour g' et h', en appelant ng', nh' les mouvements des arguments $N - G$, $N - H$.

Revenant maintenant aux équations (1), (2), (3), observons ce qui arrive quand on y substitue les valeurs supposées des inconnues et que l'on effectue les différentiations indiquées.

Pour un terme de x, par exemple, égal à $x_{n,\lambda}\theta^{\lambda}M_n$ soit K, on a

$$DK = K[\lambda + (p_1 - p_{-1})g + (q_1 - q_{-1})h + (r_1 - r_{-1})m]$$

Marquons de la caractéristique D_0 l'opération qui consiste à prendre la dérivée par rapport à τ d'un terme tel que K, dans lequel on remplacerait G par G_0, H par H_0, de sorte que

$$D_0K = K[\lambda + (p_1 - p_{-1})g_0 + (q_1 - q_{-1})h_0 + (r_1 - r_{-1})m]$$

Les différences $DK - D_0K$ se présentent ainsi, d'après les valeurs de g et h, comme développables suivant les produits du monome M_n par les différents monomes $M'_{n'}$ (M_0 exclu).

Convenons alors de remplacer partout D par D_0 dans les équations (5), (6), (7), les fonctions X, Y, Z, J se trouveront modifiées, puisqu'il faudra tenir compte pour les former des différences telles que $DK - D_0K$, mais, d'après ce que nous venons de dire, rien ne saurait cependant être changé à la méthode d'approximations successives indiquée précédemment : en effet, la partie de la fonction X par exemple qui correspond à un monome donné pourra toujours être calculée dès que l'on connaîtra les parties des inconnues qui correspondent aux différents monomes de degré inférieur, aux exceptions près qui vont être mises en évidence, et ne présentent aucun inconvénient.

L'opération D_0 est une pseudo-dérivation, qui jouit des mêmes propriétés que la dérivation ordinaire D, elle est d'ailleurs équivalente à D quand on l'applique aux fonctions ζ_1, ζ_2, α_1, α_2, qui

respectivement accompagnées si l'on veut de termes tels que $c\gamma_1\theta^{-h_0}M'_n$, $c\gamma_{-1}\theta^{h_0}M'_n$, $c\varepsilon_1\theta^{-g_0}M'_{n'}$, $c\varepsilon_{-1}\theta^{g_0}M'_{n'}$, $cM'_{n'}$, où c désigne une constante arbitraire, en effet de tels termes s'annulent quand on les soumet à l'opération D_0. Cependant on ne devra ajouter aucun terme cM'_n à $D_0^{-1}B$, afin de ne pas altérer la forme générale adoptée pour la solution, b ne devant contenir aucune constante.

L'addition d'un terme de la forme $c\varepsilon_1\theta^{-g_0}M'_n$ à $D_0^{-1}(\alpha_2 A)$, et par suite du terme conjugué à $D_0^{-1}(\alpha_1 A)$, est inutile, si l'on veut ; mais on peut aussi disposer de la constante c de façon que le coefficient de $\varepsilon_1 M'_n$ dans ξ, ou dans une autre coordonnée, ait une expression donnée à l'avance. En fait, nous ferons en sorte que le coefficient complet de $\sin G$ dans le développement non symétrique de la longitude v ait pour valeur

$$2\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \frac{5}{96}\varepsilon^5 - \dots,$$

tout comme s'il s'agissait d'un mouvement keplérien dans lequel ε serait l'excentricité : nous avons déjà réalisé cette condition pour les termes du premier degré en ε.

De même l'addition d'un terme de la forme $c\gamma_1\theta^{-h_0}M'_{n'}$ à $D_0^{-1}(\zeta_2 Z)$, et par suite du terme conjugué à $D_0^{-1}(\zeta_1 Z)$, n'est pas nécessaire, mais nous disposerons de la constante c de façon que le coefficient complet de $\sin H$ dans le développement non symétrique de la latitude s ait pour expression

$$\gamma - \gamma\varepsilon^2 - \frac{1}{128}\gamma^5 + \frac{7}{64}\gamma\varepsilon^4 + \dots,$$

tout comme s'il s'agissait encore d'un mouvement keplérien d'excentricité ε, dans lequel γ serait le double du sinus de la demi-inclinaison : cette condition est déjà réalisée pour les termes du premier degré en γ.

On ne s'est pas occupé dans ce qui précède des difficultés qui pourraient provenir de la quadrature $D^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial(iN')}\right]$ qui figure dans la fonction J elle-même : il est clair en effet, d'après la forme de la solution, que la quantité soumise à cette quadrature ne saurait contenir aucun terme constant, de sorte qu'elle ne peut donner lieu à aucun terme séculaire. Observons seulement qu'elle introduira des diviseurs tels que

$$k + (p_1 - p_{-1})g + (q_1 - q_{-1})h + (r_1 - r_{-1})m,$$

et qu'il conviendra de développer les inverses de ces diviseurs suivant les monomes M'_n qui figurent dans les expressions de g et h, les coefficients des développements étant les puissances négatives des quantités

$$k + (p_1 - p_{-1})g_0 + (q_1 - q_{-1})h_0 + (r_1 - r_{-1})m.$$

On arriverait exactement aux mêmes résultats en faisant usage des formules (12), où D est remplacé par D_0, la quadrature $D_0^{-1}(vM + uN)$ étant équivalente à $\frac{J}{2}$.

L'expérience démontre sans peine le succès des opérations que nous venons de décrire, et justifie par suite complètement la forme que nous avons adoptée pour la solution générale.

130. Si nous avons pu éviter l'introduction des termes à caractère séculaire, il est d'autres difficultés qui tiennent à la nature même du problème, et qu'il est impossible de faire disparaître.

Les formules (9) et (11), entendues comme nous venons de l'expliquer, renferment des quadratures, et de plus la fonction J elle-même dépend d'une quadrature, qui ne fournit d'ailleurs que des termes admettant $m^3 c'$ ou $m^3 \sigma$ en facteur, comme le montrent la forme de la fonction F et celle de l'équation (3).

Supposons alors en premier lieu que l'on étudie la partie de la solution relative à l'un des monomes, soit M_n, dont dépend la latitude. Il résulte de ce qui précède que, pour obtenir cette solution, on devra effectuer des divisions par les différentes quantités

$$D_{n,k} = k + (p_1 - p_{-1})g_0 + (q_1 - q_{-1})h_0 + (r_1 - r_{-1})m \pm h_0,$$

k prenant toutes les valeurs paires ou impaires, suivant le cas, et la différence $q_1 - q_{-1}$ étant impaire.

Ces quantités sont les *diviseurs* correspondant au monome M_n.

Si l'on développe $D_{n,k}$ suivant les puissances de m, on a

$$D_{n,k} = D^0_{n,k} + m D^1_{n,k} + m^2 D^2_{n,k} + \ldots,$$

avec

$$D^0_{n,k} = k + p_1 - p_{-1} + q_1 - q_{-1} \pm 1,$$

$$D^1_{n,k} = p_1 - p_{-1} + q_1 - q_{-1} + r_1 - r_{-1} \pm 1,$$

$$D^2_{n,k} = \frac{3}{4}(-p_1 + p_{-1} + q_1 - q_{-1} \pm 1),$$

Si l'on a $D^0_{n,k} \neq 0$, le diviseur $D_{n,k}$ est fini par rapport à la petite quantité m, et ne donne lieu à aucune difficulté.

Mais si l'on a $D^0_{n,k} = 0$, le diviseur $D_{n,k}$ est petit, de l'ordre de m au moins, par suite la division par $D_{n,k}$ grandit le dividende, quelquefois dans une très large mesure, de sorte que, pour obtenir une approximation donnée, il est nécessaire de calculer ce dividende, soit analytiquement, soit numériquement, avec une approximation supérieure, quelquefois de beaucoup supérieure : c'est la difficulté que nous voulions signaler.

L'influence de ce grandissement de certains dividendes se fera surtout sentir sur les inégalités qui dépendent de $\theta^k M_n$, et qui, d'après la condition $D^0_{n,k} = 0$, ont une période voisine du mois synodique. Ce sont les inégalités qui dépendent des arguments de la forme

$$p(G - D) + 2q(H - D) + r G' \pm H,$$

p, q, r étant des entiers quelconques (non tous nuls), et ce fait général a déjà été constaté précédemment sur les inégalités du premier degré par rapport à γ qui dépendent de $H - 2D$.

Si l'on a aussi $D^1_{n,k} = 0$, le diviseur $D_{n,k}$ devient de l'ordre de m^2 au moins, et la difficulté ne fait qu'augmenter, les inégalités correspondantes dépendent des arguments

$$p(G - G' - D) + 2q(H - G' - D) \pm H.$$

Si enfin, on a en outre $D^2_{n,k} = 0$, le diviseur $D_{n,k}$ est de l'ordre de m^3, et la difficulté grandit encore, les inégalités correspondantes dépendent des angles

$$2q(G + H - 2G' - 2D) \pm H;$$

elles contiennent donc certainement en facteur le produit très petit $\varepsilon^2 \gamma \varepsilon'^4$, ce qui les rend heureusement négligeables.

En réalité, d'ailleurs, la difficulté n'est augmentée qu'au point de vue analytique, et non au point de vue numérique. En effet, le plus petit des diviseurs qui correspondent aux derniers arguments, soit $2(g_0 + h_0) - 4(1 + m)$, est égal en valeur absolue à 0,009886. Il est facile d'en trouver de plus petits et qui ne sont cependant que du second ordre par rapport à m, en observant que

$$g_0 - 1 - m = -0,009266, \qquad 2(h_0 - 1 - m) = 0,008645,$$

les arguments

$$(G - G' - D) + H$$
$$2(H - G - D) - H$$
$$(G + 2H - 3G' - 3D) + H$$

donneront donc lieu respectivement aux diviseurs 0,009266, 0,008645, 0,000621. Les inégalités qui dépendent des angles

$$(G + 2H - 3G - 3D) + H$$

ont ainsi un diviseur extrêmement petit, mais elles contiennent certainement le facteur $\varepsilon\gamma e'^3\sigma$, ce qui les rend insensibles; leur existence possible a été signalée pour la première fois par Laplace.

Cherchons maintenant les particularités qui se présentent lorsqu'on étudie la partie de la solution relative à un monôme M_n dont dépendent le rayon vecteur et la longitude. On peut en premier lieu répéter tout ce que nous venons de dire, à de très légers changements près, sur la première formule (11), en laissant d'abord de côté les difficultés qui pourraient provenir de la quadrature qui figure dans la fonction J. On a les diviseurs

$$D_{n,k} = k + (p_1 - p_{-1})g_0 + (q_1 - q_{-1})h_0 + (r_1 - r_{-1})m \pm g_0,$$

qui ne diffèrent pas en réalité des précédents dans leur ensemble, puisqu'ici la différence $q_1 - q_{-1}$ est paire et non plus impaire.

Si l'un de ces diviseurs est petit, son influence se fera surtout sentir sur les inégalités du rayon vecteur et de la longitude qui dépendent de $\theta^k M_n$, c'est-à-dire des arguments

$$p(G - D) + 2q(H - D) + rG' \pm G,$$

et dont la période est encore voisine du mois synodique. Ce fait général a déjà été constaté sur l'évection.

Les diviseurs $D_{n,k}$ deviennent de l'ordre de m^2 ou m^3 respectivement pour les arguments

$$p(G - G' - D) + 2q(H - G' - D) \pm G, \qquad 2q(G + H - 2G - 2D) \pm G,$$

et donnent lieu aux mêmes remarques que ci-dessus; les inégalités qui correspondent au plus petit diviseur analytique, c'est-à-dire de l'ordre de m^3, contiennent $\varepsilon\gamma^2 e'^3$ en facteur; celles de Laplace contiennent $\gamma^2 e'^3\sigma$.

En second lieu, la quadrature de la seconde formule (11) et celle

qui figure dans J conduisent aux diviseurs

$$D_{n,k} = k + (p_1 - p_{-1})g_0 + (q_1 - q_{-1})h_0 + (r_1 - r_{-1})m,$$

qui sont encore les mêmes que les précédents, dans leur ensemble. Mais il faut observer en outre que, dans le cas où M_n dépend de ε' ou de σ, ces diviseurs interviennent au carré dans l'expression des inégalités correspondantes de la parallaxe et de la longitude, puisque la fonction B dépend elle-même de J. Les difficultés provenant de la petitesse de $D_{n,k}$ seraient donc alors considérablement augmentées, si la présence déjà signalée du facteur m^3 dans la quadrature de J ne venait pas détruire au moins partiellement cet effet.

Les inégalités qui correspondent aux petits diviseurs $D_{n,k}$ seront surtout sensibles dans la coordonnée η et dans la longitude, puisque la fonction b n'intervient dans ξ et dans la parallaxe que multipliée par m^2, elles dépendront des arguments

$$p(G - D) + 2q(H - D) + r G',$$

dont la période est longue, et quelquefois très longue par rapport au mois synodique. Les diviseurs $D_{n,k}$, qui sont de l'ordre de m^2 ou m^3 respectivement, proviennent des arguments

$$p(G - G' - D) + 2q(H - G' - D), \qquad 2q(G + H - 2G' - 2D),$$

et donnent lieu aux mêmes remarques que ci-dessus. Les inégalités qui correspondent au plus petit diviseur analytique contiennent $\varepsilon^2\gamma^2\varepsilon'^4$ en facteur, celles de Laplace contiennent $\varepsilon\gamma^2\varepsilon'^3\sigma$.

Observons enfin que, pour un même monome M_n, on a ou bien un seul petit diviseur correspondant à une inégalité à longue période, ou bien deux petits diviseurs, dont un seul peut être très petit, correspondant à des inégalités dont la période est voisine du mois. De même, dans le cas de la latitude, pour un monome donné, ou bien il n'y a aucun petit diviseur, ou bien il y en a deux, dont un seul peut être très petit. L'évidence de ces résultats résulte de ce que l'indice k peut prendre toutes les valeurs paires, ou toutes les valeurs impaires, suivant le cas.

131. Il nous reste à indiquer d'une façon plus précise le mode de calcul des fonctions A, M, N, J, Z, qui figurent dans les formules (9), (11) et (12).

Nous observerons d'abord que l'on a

$$\rho^{-2} = (x_0 + x')(y_0 + y') - z^2 = x_0 y_0 \left[\left(1 + \frac{x'}{x_0}\right)\left(1 + \frac{y'}{y_0}\right) - \frac{z^2}{x_0 y_0} \right],$$

posons alors

$$\frac{x'}{x_0} = \varphi + \psi, \qquad \frac{y'}{y_0} = \varphi - \psi, \qquad z\rho_0 = \lambda,$$

de sorte que

$$\varphi = (\rho_0^2 \xi_0)\xi' - (\rho_0^2 \eta_0)\eta',$$
$$\psi = -(\rho_0^2 \eta_0)\xi' + (\rho_0^2 \xi_0)\eta',$$

il vient

$$\mathbf{k}\rho^3 x = \mathbf{k}\rho_0^3 x_0 (1 + \varphi + \psi)[(1+\varphi)^2 - \psi^2 - \lambda^2]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mathbf{k}\rho^3 y = \mathbf{k}\rho_0^3 y_0 (1 + \varphi - \psi)[(1+\varphi)^2 - \psi^2 - \lambda^2]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mathbf{k}\rho^3 z = \mathbf{k}\rho_0^2 \lambda [(1+\varphi)^2 - \psi^2 - \lambda^2]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mathbf{k}\rho \quad = \mathbf{k}\rho_0 [(1+\varphi)^2 - \psi^2 - \lambda^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Tenant compte maintenant de la définition primitive de X, Y, Z, J, et de la correction qu'il faut lui apporter en raison du changement de D en D_0 dans les équations (5), (6), (7), on trouvera sans peine

$$M = D_0^2\xi' - D^2\xi' + 2(1+m)(D_0\eta' - D\eta') - \theta\frac{\partial F}{\partial x} - \theta^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}$$
$$+ (\mathbf{k}\rho_0^3\xi_0)K + (\mathbf{k}\rho_0^3\eta_0)K',$$

$$N = D_0^2\eta' - D^2\eta' + 2(1+m)(D_0\xi' - D\xi') + \theta\frac{\partial F}{\partial x} - \theta^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}$$
$$+ (\mathbf{k}\rho_0^3\eta_0)K + (\mathbf{k}\rho_0^3\xi_0)K',$$

$$Z = D_0^2 z - D^2 z + \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda\rho_0^2 K'',$$

$$J = 2(\eta_0 + D\xi_0)(D_0\xi' - D\xi') - 2(\xi_0 + D\eta_0)(D_0\eta' - D\eta')$$
$$+ (p' + Dp')(q' - Dq') + (Dz)^2 - \frac{3}{2}m^2 p' q'$$
$$- \frac{3}{4}m^2(p'^2\theta^2 + q'^2\theta^{-2}) - m^2 z^2$$
$$- 2F + 2mD^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial(iN')}\right) - 2\mathbf{k}\rho_0 J',$$

en faisant

$$K = 3\varphi^2 - 4\varphi^3 + 5\varphi^4 - 6\varphi^5 + \dots$$
$$+ \frac{3}{2}(\psi^2 + \chi^2)(1 - 4\varphi + 10\varphi^2 - 20\varphi^3 + \dots)$$
$$+ \frac{15}{8}(\psi^2 + \chi^2)^2(1 - 6\varphi + \dots) + \dots,$$

$$K' = \psi(-3\varphi + 6\varphi^2 - 10\varphi^3 + 15\varphi^4 - \dots)$$
$$+ \frac{3}{2}\psi(\psi^2 + \chi^2)(1 - 5\varphi + 15\varphi^2 - \dots)$$
$$+ \frac{15}{8}\psi(\psi^2 + \chi^2)^2(1 - \dots) + \dots,$$

$$K'' = \chi(-3\varphi + 6\varphi^2 - 10\varphi^3 + 15\varphi^4 - \dots)$$
$$+ \frac{3}{2}\chi(\psi^2 + \chi^2)(1 - 5\varphi + 15\varphi^2 - \dots)$$
$$+ \frac{15}{8}\chi(\psi^2 + \chi^2)^2(1 - \dots) + \dots,$$

$$J' = \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4 - \varphi^5 + \dots$$
$$+ \frac{1}{2}(\psi^2 + \chi^2)(1 - 3\varphi + 6\varphi^2 - 10\varphi^3 + \dots)$$
$$+ \frac{3}{8}(\psi^2 + \chi^2)^2(1 - 5\varphi + \dots) + \dots.$$

On a ensuite

$$\Lambda = UM + VN + PRJ,$$

et l'on pourra vérifier que

$$DJ = 2(vM + uN).$$

Pour le calcul des coordonnées polaires, on a d'abord

$$\rho' = \rho_0(-\varphi + J'),$$

puis, en vertu des relations

$$e^{2\lambda} = \frac{p}{q} = e^{2\lambda_0}\frac{1 + \varphi + \psi}{1 + \varphi - \psi},$$

$$\text{th}\,\sigma = z(xy)^{-\frac{1}{2}} = \chi[(1 + \varphi)^2 - \psi^2]^{-\frac{1}{2}},$$

on a encore

$$\lambda' = \psi(1-\varphi+\varphi^2-\varphi^3+\varphi^4-\dots)+\frac{1}{3}\psi^3(1-3\varphi+6\varphi^2-\dots)$$
$$+\frac{1}{5}\psi^5(1-\dots)+\dots,$$

$$\chi' = \chi(1-\varphi+\varphi^2-\varphi^3+\varphi^4-\dots)+\chi\left(\frac{1}{2}\psi^2+\frac{1}{3}\chi^2\right)(1-3\varphi+6\varphi^2-\dots)$$
$$+\chi\left(\frac{3}{8}\psi^4+\frac{1}{2}\psi^2\chi^2+\frac{1}{5}\chi^4\right)(1-\dots)+\dots$$

Voici les developpements des quelques fonctions necessaires pour appliquer les formules precedentes, et qui n'ont pas encore ete donnes

$$\rho_0^2\xi_0 = 1-\frac{57}{2^7}m^4+\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{7}{2^2\,3}m^3+\frac{11}{2^2\,3^2}m^4\right)(\theta^2+\theta^{-2})$$
$$+\left(\frac{345}{2^9}m^4\right)(\theta^4+\theta^{-4})+\dots$$
$$=[\bar{1},999989]+[\bar{3},52507](\theta^2+\theta^{-2})+[\bar{5},556](\theta^4+\theta^{-4})+\dots,$$

$$\rho_0^2\eta_0 = \left(\frac{11}{2^4}m^2+\frac{13}{2^2\,3}m^3+\frac{8}{3^2}m^4\right)(\theta^2-\theta^{-2})$$
$$+\left(\frac{377}{2^9}m^4\right)(\theta^4-\theta^{-4})+\dots$$
$$=[\bar{3},70805](\theta^2-\theta^{-2})+[\bar{5},597](\theta^4-\theta^{-4})+\dots,$$

$$k\rho_0^3\xi_0 = 1+2m+\frac{3}{2}m^2-\frac{57}{2^5}m^4+\left(1\,m^2+\frac{19}{2\,3}m^3+\frac{40}{3^2}m^4\right)(\theta^2+\theta^{-2})$$
$$+\left(\frac{697}{2^9}m^4\right)(\theta^4+\theta^{-4})+\dots$$
$$=[0,068712]+[\bar{3},92483](\theta^2+\theta^{-2})+[\bar{5},924](\theta^4+\theta^{-4})+\dots,$$

$$k\rho_0^3\eta_0 = \left(\frac{11}{2^4}m^2+\frac{59}{2^3\,3}m^3+\frac{1177}{2^5\,3^2}m^4\right)(\theta^2-\theta^{-2})$$
$$+\left(\frac{553}{2^9}m^4\right)(\theta^4-\theta^{-4})+\dots$$
$$=[\bar{3},77676](\theta^2-\theta^{-2})+[\bar{5},831](\theta^4-\theta^{-4})+\dots,$$

$$k\rho_0^2 = 1+2m+\frac{3}{2}m^2-\frac{335}{2^8}m^4+\left(1\,m^2+\frac{19}{2\,3}m^3+\frac{40}{3^2}m^4\right)(\theta^2+\theta^{-2})$$
$$+\left(\frac{9}{2^3}m^4\right)(\theta^4+\theta^{-4})+\dots$$
$$=[0,068723]+[\bar{3},92484](\theta^2+\theta^{-2})+[\bar{5},837](\theta^4+\theta^{-4})+\dots$$

Ajoutons encore qu'au lieu de determiner z et a par la formule (9) et la premiere des formules (11), ou bien d'appliquer les formules (12), il sera bien souvent tout aussi avantageux, tant au point de vue numerique qu'au point de vue analytique, d'integrer par approximations successives les deux equations

$$D_0^2 z - S z = Z,$$
$$D^2 a - S'a = A,$$

ces approximations sont en effet tres faciles, et peuvent etre rendues très convergentes par quelques precautions bien simples, qu'il serait superflu de detailler ici

CHAPITRE XXI.

NOUVELLE MÉTHODE PRATIQUE POUR LE CALCUL DES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE. DÉTERMINATION DES INÉGALITÉS DÉPENDANTES DE L'EXCENTRICITÉ ET DE L'INCLINAISON.

132. La méthode développée au Chapitre précédent est entièrement satisfaisante au point de vue théorique, il n'en est pas de même pratiquement. Comme nous l'avons déjà dit, et comme on le voit maintenant, elle exige de nombreux développements en série extrêmement pénibles, et elle conduit à des calculs fort complexes, en partie superflus. Ces inconvénients sont surtout sensibles quand on cherche les développements analytiques des inégalités, ainsi que nous le ferons dorénavant d'une façon exclusive. Nous allons donc exposer une nouvelle méthode pratique qui se montre tout à fait propre aux calculs analytiques.

Pour plus de commodité ultérieure, modifions tout d'abord la valeur de **k** que nous prendrons maintenant égale à

$$1+2m+\frac{3}{2}m^2=1,17150269.$$

Appelons f le facteur

$$\left(\frac{\mathbf{k}}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

k ayant ici son ancienne valeur, on a

$$f=1+\frac{159}{128}m^4-\frac{65}{256}m^6+\ldots=[0,0000104].$$

Pour passer des anciennes valeurs de $\frac{b}{a}$, ξ, η, ζ aux nouvelles, il

suffit de les multiplier par j, ce qui donne en particulier

$$\frac{b}{a} = 3422'',782,$$

et pour passer de l'ancienne valeur de ρ à la nouvelle, il faut la multiplier par $\frac{1}{j}$, les valeurs de λ et σ ne changent pas

Revenons maintenant aux quatre équations (1), (2), (3), du Chapitre XIX, et ajoutons-les multipliées respectivement par

$$\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x, -z, 1,$$

il vient

$$(a'_1) \qquad \mathbf{k}\rho + \frac{1}{2}D^2(xy - z^2) + m(yDx - xDy) + 3m^2xy + 2m^2z^2$$
$$+ \frac{3}{2}m^2(x^2+y^2) + \Phi' = 0,$$

en faisant

$$\Phi' = 2F + x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} - 2mD^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial(\iota N')}\right]$$

D'autre part, multiplions les deux équations (1) respectivement par y, $-x$, puis ajoutons et intégrons, on a

$$yDx - xDy = -2mxy + D^{-1}\left[\frac{3}{2}m^2(x^2-y^2) + 2x\frac{\partial F}{\partial x} - 2y\frac{\partial F}{\partial y}\right],$$

de sorte que l'équation (a'_1) devient encore

$$(a_1) \qquad \mathbf{k}\rho + \frac{1}{2}D^2(xy - z^2) + m^2xy + 2m^2z^2 + \frac{3}{2}m^2(x^2+y^2)$$
$$+ \frac{3}{2}m^3D^{-1}(x^2-y^2) + \Phi = 0,$$

avec

$$\Phi = \Phi' + 2mD^{-1}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

Remplaçons partout les variables x, y dont nous ne ferons plus usage, par $p\theta$, $q\theta^{-1}$, et développons aussi F comme nous l'avons dit plus haut, suivant les puissances de ε'_1, ε'_{-1}, cette fonction prend la forme $\Sigma A p^\alpha q^\beta z^\gamma {\varepsilon'_1}^{\sigma_1} {\varepsilon'_{-1}}^{\sigma_{-1}} \theta^{\alpha-\beta}$, les coefficients A étant, aux facteurs m^2, ou $\sigma\beta' m^2$, près, purement numériques, et l'on a immé-

diatement

$$\Phi = \Sigma A[2+\alpha+\beta+\gamma+2m(\alpha-\beta-\sigma_1+\sigma_{-1})D^{-1}]p^\alpha q^\beta z^\gamma \varepsilon'^{\sigma_1}_1 \varepsilon'^{\sigma_{-1}}_{-1} \theta^{\alpha-\beta},$$
$$\Phi' = \Sigma A[2+\alpha-\beta+\gamma+2m(-\sigma_1-\sigma_{-1})D^{-1}]p^\alpha q^\beta z^\gamma \varepsilon'^{\sigma_1}_1 \varepsilon'^{\sigma_{-1}}_{-1} \theta^{\alpha-\beta},$$

on convient ici de représenter $af+bD^{-1}f$ par $(a+bD^{-1})f$, si a, b, f sont des fonctions quelconques.

D'autre part, les équations (a_1) et (a'_1) s'écrivent

$$(a)\quad \mathbf{k}\rho+\left(m^2+\frac{1}{2}D^2\right)\left(\frac{1}{\rho^2}\right)+3m^2z^2+\frac{3}{2}m^2(1+mD^{-1})p^2\theta^2 + \frac{3}{2}m^2(1-mD^{-1})q^2\theta^{-2}-\Phi=0,$$

$$(a')\quad \mathbf{k}\rho+\left(2m+3m^2+\frac{1}{2}D^2\right)\left(\frac{1}{\rho^2}\right)+(2m+5m^2)z^2+2m(\xi D\eta-\eta D\xi) + \frac{3}{2}m^2(p^2\theta^2+q^2\theta^{-2})+\Phi'=0,$$

puisque l'on a

$$xy=pq=\xi^2-\eta^2=\frac{1}{\rho^2}+z^2,$$
$$yDx-xDy=2xy+2(\xi D\eta-\eta D\xi).$$

D'après la nouvelle valeur de $\mathbf{k}$, mettons maintenant les équations (1) et (2) sous la forme

$$(b_1)\quad \begin{cases} [D^2+2(1+m)D-\mathbf{k}(\rho^3-1)]p+\dfrac{3}{2}m^2q\theta^{-2}+2\dfrac{\partial F}{\partial q}=0, \\ [D^2-2(1+m)D-\mathbf{k}(\rho^3-1)]q+\dfrac{3}{2}m^2p\theta^{2}+2\dfrac{\partial F}{\partial p}=0, \end{cases}$$

$$(c)\quad [D^2-m^2-\mathbf{k}\rho^3]z-\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Ajoutant les deux premières, on a

$$(b)\quad D^2\xi+2(1+m)D\eta-\mathbf{k}\xi(\rho^3-1)+\frac{3}{4}m^2(p\theta^2+q\theta^{-2})+\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}=0.$$

Faisons encore

$$(F)\quad z=\gamma_1p-\gamma_{-1}q+\zeta,$$

de sorte que la nouvelle inconnue ζ serait nulle si le mouvement avait lieu dans un plan dont l'inclinaison aurait γ pour tangente, et dont la longitude du nœud serait $N-H$, la longitude restant v

En ajoutant ensemble les équations (b_1) et (c) multipliées respectivement par $-\gamma_1$, $+\gamma_{-1}$, 1, il vient

$$(c') \quad (D^2 - m^2 - \mathbf{k}\rho^3)\zeta + 2(h - 1 - m)(\gamma_1 Dp + \gamma_{-1} Dq)$$
$$+ \left(h^2 - 1 - m - \frac{5}{2}m^2\right)(\gamma_1 p - \gamma_{-1} q)$$
$$- \frac{3}{2}m^2(\gamma_1 q\theta^{-2} - \gamma_{-1} p\theta^2) - 2\left(\gamma_1 \frac{\partial F}{\partial q} - \gamma_{-1}\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Changeons actuellement ξ et ρ en $1 + \xi$ et $1 + \rho$, puis posons

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} P = 3\rho^2 - 4\rho^3 + 5\rho^4 - 6\rho^5 + \ldots, \\ Q = 3\rho + 3\rho^2 + \rho^3, \\ \chi = \dfrac{P}{2} - \dfrac{\xi^2}{2} + \dfrac{\eta^2}{2} + \dfrac{z^2}{2}, \end{cases}$$

on aura

$$(1 + \rho)^{-2} = 1 - 2\rho + P$$
$$(1 + \rho)^3 = 1 + Q,$$

et, en vertu de la relation

$$(1 + \xi)^2 - \eta^2 = (1 + \rho)^{-2} + z^2,$$

on aura aussi

$$(\mathrm{E}) \quad \xi = -\rho + \chi,$$

enfin observons que

$$(1 + \xi)[(1 + \rho)^3 - 1] = 3\rho - 2\rho^3 - \rho^4 + Q\chi$$

Les équations (a), (a'), (b), (c), (c') deviennent alors

$$(\mathrm{A}) \quad \left(D^2 - 1 - 2m + \frac{1}{2}m^2\right)\rho = \left(\frac{1}{2}D^2 + m^2\right)P + 3m^2z^2$$
$$+ \frac{3}{2}m^2(1 + mD^{-1})p^2\theta^2$$
$$+ \frac{3}{2}m^2(1 - mD^{-1})q^2\theta^{-2} + \Phi,$$

$$(\mathrm{A}') \quad \left(D^2 - 1 + 2m + \frac{9}{2}m^2\right)\rho = \left(2m + 3m^2 + \frac{1}{2}D^2\right)P + (2m + 5m^2)z^2$$
$$+ 2m(D\eta + \xi D\eta - \eta D\xi)$$
$$+ \frac{3}{2}m^2(p^2\theta^2 + q^2\theta^{-2}) + \Phi',$$

$$(\mathrm{B}) \qquad 2(1+m)\mathrm{D}\eta = -\mathrm{D}^2\xi + \left(1+2m+\frac{3}{2}m^2\right)(3\rho-2\rho^3-\rho^4+\mathrm{Q}\chi)$$
$$-\frac{3}{4}m^2(p\theta^2+q\theta^{-2}) - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q},$$

$$(\mathrm{C}) \qquad \left(\mathrm{D}^2-1-2m-\frac{5}{2}m^2\right)z = \left(1+2m+\frac{3}{2}m^2\right)\mathrm{Q}z + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z},$$

$$(\mathrm{C}') \qquad \left(\mathrm{D}^2-1-2m-\frac{5}{2}m^2\right)\zeta = \left(1+2m+\frac{3}{2}m^2\right)\mathrm{Q}\zeta$$
$$-2(h-1-m)(\gamma_1\mathrm{D}p+\gamma_{-1}\mathrm{D}q)$$
$$-\left(h^2-1-m-\frac{5}{2}m^2\right)(\gamma_1 p-\gamma_{-1}q)$$
$$+\frac{3}{2}m^2(\gamma_1 q\theta^{-2}-\gamma_{-1}p\theta^2)$$
$$+2\left(\gamma_1\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q}-\gamma_{-1}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p}\right)+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z},$$

bien entendu, dans les équations (A) et (A′) figurent des constantes inconnues, provenant des quadratures indiquées.

Telles sont les équations qui vont nous servir dorénavant; nous appellerons (A) l'*équation de Laplace*, en raison du grand usage qu'en a fait constamment l'auteur de la *Mécanique Céleste*; nous l'avons déjà rencontrée précédemment sous des formes équivalentes. Ce n'est que dans quelques cas exceptionnels que nous la remplacerons par l'équation (A′) qui nous sera généralement inutile.

Pour la détermination de la latitude, nous userons de l'équation (C′) tant que son emploi sera plus simple que celui de (C).

La parallaxe ρ est obtenue directement; pour avoir enfin les expressions de la longitude et de la latitude, nous partirons des formules

$$\mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\sigma = (1+\rho)\eta, \qquad \mathrm{sh}\,\sigma = (1+\rho)z,$$

qui nous donneront

$$(\mathrm{G}) \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \eta+\rho\eta-\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda\sigma^2}{2}-\frac{\lambda^5}{120}-\frac{\lambda^3\sigma^2}{12}-\frac{\lambda\sigma^4}{24}-\ldots, \\ \sigma &= z+\rho z-\frac{\sigma^3}{6}-\frac{\sigma^5}{120}-\ldots \end{aligned}\right.$$

Les calculs et les développements en séries exigés pour l'application des équations (A), (A′), (B), (C), (C′), (D), (E), (F), (G) sont

relativement simples et faciles, l'emploi direct de la parallaxe diminue sensiblement les calculs superflus, et un grand avantage résulte du fait qu'au second membre de l'équation (B) le coefficient de $1 + 2m + \frac{3}{2}m^2$ ne contient pas de termes du second degré par rapport aux inconnues mais c'est l'expérience seule qui peut permettre de se rendre un compte exact de ces divers avantages

Il est nécessaire de procéder par approximations successives pour la détermination des différents coefficients $\rho_{n,k}$, $\xi_{n,k}$, $\eta_{n,k}$, ou $z_{n,k}$ qui correspondent à un monome donné M_n, il n'y a là aucun inconvénient au point de vue du calcul analytique, mais au point de vue du calcul numérique, c'est un grand désavantage, qui, à la vérité, se trouve notablement atténué si l'on prend comme premières valeurs approchées des inconnues celles qui résultent de leur détermination analytique préalable

Au surplus, pour être assuré d'éviter toute erreur, le mieux serait d'employer à la fois la présente méthode et celle du Chapitre précédent, et dans ce cas l'inconvénient que nous venons de signaler disparaîtrait entièrement, puisque l'on serait amené seulement à vérifier les valeurs numériques déjà obtenues directement.

133 Nous nous bornerons dans ce qui suit à donner les résultats analytiques dûment vérifiés, que l'on obtient en faisant usage des équations précédentes, et nous les accompagnerons seulement des quelques observations essentielles qui s'imposeront chemin faisant Nous porterons comme précédemment l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre inclusivement par rapport aux paramètres m, ε, γ, ε', α, en considérant toutefois ce dernier comme du second ordre, en raison de son extrême petitesse

Nous donnerons aussi, d'après M Brown, les valeurs numériques des inégalités correspondantes des coordonnées polaires, en nous bornant à l'approximation de la demi-seconde d'arc pour la longitude et la latitude, et à celle du demi-dixième de seconde pour la parallaxe, ainsi que nous l'avons déjà fait

De cette façon nous aurons fait comprendre suffisamment ce qu'est la théorie de la Lune, et la somme de travail qu'elle exige pour être amenée à son complet développement En même temps, nous nous rendrons un compte exact des diverses difficultés que l'on peut

rencontrer, et nous serons assurés qu'il suffit d'augmenter le degré d'approximation des calculs, sans rien changer aux méthodes, et sans être amené à de nouveaux efforts démesurés, pour obtenir telle exactitude que l'on pourra désirer. Enfin, nous serons en possession d'un résultat concret, et c'est là une occasion trop rare dans l'étude générale de la Mécanique Céleste pour ne pas s'empresser de la saisir.

Nous allons déterminer dans ce Chapitre les inégalités qui ne dépendent que de l'excentricité ε et de l'inclinaison γ, c'est-à-dire celles qui correspondent aux monomes

$M_1 = \varepsilon_1$,
$M_2 = \varepsilon_1^2$,
$M_3^* = \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$,
$M_4 = \varepsilon_1^3$,
$M_5 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}$,
$M_6 = \varepsilon_1^4$,
$M_7 = \varepsilon_1^3 \varepsilon_{-1}$,
$M_8^* = \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}^2$,
$M_9 = \varepsilon_1^5$,
$M_{10} = \varepsilon_1^4 \varepsilon_{-1}$,
$M_{11} = \varepsilon_1^3 \varepsilon_{-1}^2$,

$M_{12} = \gamma_1$,
$M_{13} = \gamma_1 \varepsilon_1$,
$M_{14} = \gamma_1 \varepsilon_{-1}$,
$M_{15} = \gamma_1 \varepsilon_1^2$,
$M_{16} = \gamma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$,
$M_{17} = \gamma_1 \varepsilon_{-1}^2$,
$M_{18} = \gamma_1 \varepsilon_1^3$,
$M_{19} = \gamma_1 \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}$,
$M_{20} = \gamma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}^2$,
$M_{21} = \gamma_1 \varepsilon_{-1}^3$,
$M_{22} = \gamma_1 \varepsilon_1^4$,
$M_{23} = \gamma_1 \varepsilon_1^3 \varepsilon_{-1}$,
$M_{24} = \gamma_1 \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}^2$,
$M_{25} = \gamma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}^3$,
$M_{26} = \gamma_1 \varepsilon_{-1}^4$,

$M_{27} = \gamma_1^2$,
$M_{28} = \gamma_1^2 \varepsilon_1$,
$M_{29} = \gamma_1^2 \varepsilon_{-1}$,
$M_{30} = \gamma_1^2 \varepsilon_1^2$,
$M_{31} = \gamma_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$,
$M_{32} = \gamma_1^2 \varepsilon_{-1}^2$,
$M_{33} = \gamma_1^2 \varepsilon_1^3$,
$M_{34} = \gamma_1^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}$,
$M_{35} = \gamma_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}^2$,
$M_{36} = \gamma_1^2 \varepsilon_{-1}^3$,
$M_{37}^* = \gamma_1 \gamma_{-1}$,
$M_{38} = \gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon_1$,
$M_{39} = \gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon_1^2$,
$M_{40}^* = \gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$,
$M_{41} = \gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon_1^3$,
$M_{42} = \gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}$,

$M_{43} = \gamma_1^3$,
$M_{44} = \gamma_1^3 \varepsilon_1$,
$M_{45} = \gamma_1^3 \varepsilon_{-1}$,
$M_{46} = \gamma_1^3 \varepsilon_1^2$,
$M_{47} = \gamma_1^3 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$,
$M_{48} = \gamma_1^3 \varepsilon_{-1}^2$,
$M_{49} = \gamma_1^2 \gamma_{-1}$,
$M_{50} = \gamma_1^2 \gamma_{-1} \varepsilon_1$,
$M_{51} = \gamma_1^2 \gamma_{-1} \varepsilon_{-1}$,
$M_{52} = \gamma_1^2 \gamma_{-1} \varepsilon_1^2$,
$M_{53} = \gamma_1^2 \gamma_{-1} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$,
$M_{54} = \gamma_1^2 \gamma_{-1} \varepsilon_{-1}^2$,

$M_{55} = \gamma_1^4$,
$M_{56} = \gamma_1^4 \varepsilon_1$,
$M_{57} = \gamma_1^4 \varepsilon_{-1}$,
$M_{58} = \gamma_1^3 \gamma_{-1}$,
$M_{59} = \gamma_1^3 \gamma_{-1} \varepsilon_1$,
$M_{60} = \gamma_1^3 \gamma_{-1} \varepsilon_{-1}$,
$M_{61} = \gamma_1^2 \gamma_{-1}^2$,
$M_{62} = \gamma_1^2 \gamma_{-1}^2 \varepsilon_1$,

$M_{63} = \gamma_1^5$,
$M_{64} = \gamma_1^4 \gamma_{-1}$,
$M_{65} = \gamma_1^3 \gamma_{-1}^2$,

et à leurs conjugués, les monômes M_3, M_8, M_{37}, M_{40}, M_{61}, marqués d'un astérisque sont conjugués d'eux-mêmes.

Dans cette détermination, la fonction F n'intervient en aucune façon.

Les bases du calcul sont les résultats obtenus aux deux Chapitres précédents relativement aux monômes $M_0 = 1$, M_1 et M_{12}, transcrivons seulement ceux qui se trouvent modifiés en raison du changement de **k**, de la nouvelle définition de ξ et ρ, et de la nouvelle notation adoptée pour le monôme γ_1. On a

$$\rho_{0,0} = -\frac{19}{2^5} m^4 + \frac{17}{2^4 \cdot 3} m^5 + \ldots,$$

$$\xi_{0,0} = \frac{159}{2^8} m^4 - \frac{65}{2^5 \cdot 3} m^5 + \ldots,$$

$$\rho_{1,0} = 1 - \frac{3}{2^2} m^2 - \frac{189}{2^6} m^3 - \frac{2127}{2^8} m^4 - \ldots,$$

$$\xi_{1,0} = -1 + \frac{3}{2^2} m^2 + \frac{9}{2^2} m^3 + \frac{17}{2^8} m^4 + \ldots,$$

$$\sigma_{1,0} = 2 + \frac{75}{2^7} m^3 + \frac{2749}{2^9} m^4 + \ldots,$$

$$\varpi_{12,0} = 1 + \frac{3}{2^4} m^3 + \frac{75}{2^6} m^4 + \ldots,$$

les autres coefficients $\varpi_{1,k}$ et les $\sigma_{1,k}$ sont remplacés par $\varpi_{12,k}$, $\sigma_{12,k}$.

134. $M_2 = \varepsilon_1^2$. On trouve

$$\xi_{2,0} = 1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{907}{2^7} m^3, \qquad \eta_{2,0} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2^3} m^2 - \frac{1105}{2^7} m^3,$$

$$\xi_{2,-2} = -\frac{15}{2^2} m - \frac{345}{2^5} m^2 - \frac{10227}{2^8} m^3, \qquad \eta_{2,-2} = -\frac{45}{2^3} m - \frac{257}{2^4} m^2 - \frac{171185}{2^9 \cdot 3} m^3,$$

$$\xi_{2,2} = \frac{39}{2^5} m^2 + \frac{11}{2^2} m^3, \qquad \eta_{2,2} = \frac{9}{2^3} m^2 + \frac{31}{2^4} m^3,$$

$$\xi_{2,-4} = \frac{225}{2^6} m^2 + \frac{1815}{2^6} m^3, \qquad \eta_{2,-4} = -\frac{225}{2^7} m^2 - \frac{3675}{2^8} m^3,$$

$$\rho_{2,0} = 2 - 2 m^2 - \frac{607}{2^5} m^3, \qquad \lambda_{2,0} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2^3} m^2 - \frac{2371}{2^7} m^3,$$

$$\rho_{2,-2} = -\frac{15}{2} m^2 - \frac{105}{2^3} m^3 - \frac{8883}{2^7} m^4, \qquad \lambda_{2,-2} = -\frac{45}{2^3} m - \frac{167}{2^3} m^2 - \frac{190321}{2^9 \cdot 3} m^3,$$

$$\rho_{2,2} = 7 m^2 + \frac{43}{2 \cdot 3} m^3, \qquad \lambda_{2,2} = \frac{95}{2^4} m^2 + \frac{343}{2^4 \cdot 3} m^3,$$

$$\rho_{3,-4} = \frac{225}{2^5} m^2 + \frac{2995}{2^6} m^3, \qquad \lambda_{2,-4} = -\frac{1125}{2^7} m^2 - \frac{13995}{2^8} m^3,$$

$$v = +771'' \sin 2G - 213'' \sin(2G - 2D) + 13'' \sin(2G + 2D)$$
$$- 31'' \sin(2G - 4D)$$
$$- 1'' \sin(2G - 6D),$$

$$\sin \varpi = +10'',2 \cos 2G - 0'',3 \cos(2G - 2D) + 0'',3 \cos(2G + 2D)$$
$$+ 0'',4 \cos(2G - 4D)$$

L'argument $2G - 2D$ étant à longue période, il a fallu pousser le calcul de $D\eta_{2,-2}$ et par suite celui de $\rho_{2,-2}$ jusqu'aux termes en m^4, mais il n'a pas été nécessaire d'aller au delà des termes en m^3 pour $\xi_{2,-2}$ et $P_{2,-2}$, puisque ces quantités ne figurent dans les seconds membres des équations (A) et (B) que multipliées par m^2 Il n'y a donc aucune difficulté réelle, de plus aucun des calculs effectués n'est superflu, ce qui veut dire qu'on n'est pas amené à combiner par addition ou soustraction des séries en m dont les premiers termes se détruisent par l'effet même de ces opérations

$M_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$ Ce monome étant constant, l'équation (A) ne peut servir à déterminer $\rho_{3,0}$, mais l'équation (B) convient alors à cet objet On trouve d'ailleurs $\rho_{3,0} = 0.m^3$, et nous verrons plus tard que l'on a rigoureusement $\rho_{3,0} = 0$ Les résultats sont

$$\xi_{3,0} = -2 - \frac{321}{2^6} m^2 - \frac{2673}{2^5} m^3,$$

$$\xi_{3,2} = \frac{12}{2^2} m + \frac{257}{2^4} m^2 + \frac{30265}{2^8 \, 3} m^3, \quad \eta_{3,2} = \frac{15}{2^3} m + \frac{161}{2^5} m^2 + \frac{25321}{2^9 \, 3} m^3,$$

$$\xi_{3,4} = \frac{585}{2^7} m^3, \qquad \eta_{3,4} = \frac{135}{2^5} m^3,$$

$$\rho_{3,0} = 0,$$

$$\rho_{3,2} = \frac{15}{2} m + \frac{129}{2^3} m^2 + \frac{2232}{2^7} m^3, \quad \lambda_{3,2} = \frac{75}{2^3} m + \frac{801}{2^5} m^2 + \frac{33839}{2^9} m^3,$$

$$\rho_{3,4} = \frac{105}{2^2} m^3, \qquad \lambda_{3,4} = \frac{1425}{2^6} m^3,$$

$$v = \;.+ 299'' \sin 2D + 5'' \sin 4D,$$
$$\sin \varpi = .\; + 3'',8 \cos 2D + 0'',1 \cos 4D$$

Ces termes s'ajoutent à ceux de la variation

$$M_4 = \varepsilon_1^3$$

$$\xi_{4,0} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} m^2, \qquad \eta_{4,0} = \frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3} m^2,$$

$$\xi_{4,-2} = -\frac{135}{2^4} m - \frac{6587}{2^6 \cdot 3} m^2, \qquad \eta_{4,-2} = -\frac{135}{2^4} m - \frac{3977}{2^6 \cdot 3} m^2,$$

$$\xi_{4,2} = \frac{85}{2^3 \cdot 3} m^2, \qquad \eta_{4,2} = \frac{77}{2^3 \cdot 3} m^2,$$

$$\xi_{4,-4} = \frac{1125}{2^7} m^2, \qquad \eta_{4,-4} = \frac{225}{2^7} m^2,$$

$$\rho_{4,0} = \frac{9}{2} - \frac{23}{2^2} m^2, \qquad \lambda_{4,0} = \frac{13}{3} - \frac{35}{2^2 \cdot 3} m^2,$$

$$\rho_{4,-2} = -\frac{105}{2^4} m - \frac{6443}{2^6 \cdot 3} m^2, \qquad \lambda_{4,-2} = -\frac{105}{2^3} m - \frac{4751}{2^5 \cdot 3} m^2,$$

$$\rho_{4,2} = \frac{2125}{2^5 \cdot 3} m^2, \qquad \lambda_{4,2} = \frac{779}{2^4 \cdot 3} m^2,$$

$$\rho_{4,-4} = \frac{675}{2^7} m^2, \qquad \lambda_{4,-4} = -\frac{675}{2^9} m^2,$$

$$v = +36'' \sin 3G - 13'' \sin(3G - 2D) + 1'' \sin(3G + 2D) - 1'' \sin(3G - 4D),$$

$$\sin \varpi = +0'',6 \cos 3G - 0'',1 \cos(3G - 2D)$$

Les arguments $3G - 2D$ et $3G - 4D$ étant à période voisine du mois, il est nécessaire de pousser le calcul des seconds membres des équations (A) correspondantes (et de celles-là seulement) jusqu'aux termes en m^3, le calcul des valeurs de $P_{4,-2}$, $P_{4,-4}$ présente des réductions ces quantités sont respectivement du second et du troisième ordre par rapport à m, et non du premier et du second, comme il pouvait sembler tout d'abord.

$M_5 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}$ L'argument de ce monome est G, comme pour M_1. On doit donc regarder $\rho_{5,0}$ comme une arbitraire que l'on déterminera finalement comme nous l'avons dit au Chapitre précédent, par contre l'équation (A) relative à $\rho_{5,0}$ permettra de déterminer le coefficient g_3 de $\varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$ ou $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$ dans le développement de g

Pour la commodité du calcul, on suppose d'abord $\rho_{5,0} = 0$, puis à la solution ainsi déterminée, on ajoute les termes analogues relatifs

au monome M_1, multipliés par un facteur que l'on choisit de façon que $\lambda_{1,0} = -1$ On a finalement

$$g_3 = \frac{3}{2} m^2 + \frac{651}{2^4} m^3, \qquad n g'_3 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} = n\left(-\frac{3}{2} m^2 - \frac{627}{2^4} m^3\right) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} = -519'',$$

$$\xi_{1,0} = -\frac{3}{2} - \frac{1123}{2^9} m^2, \qquad \eta_{1,0} = -\frac{3}{2} + \frac{89}{2^9} m^2,$$

$$\xi_{1,-2} = \frac{15}{2^2} m + \frac{107}{2^3} m^2, \qquad \eta_{1,-2} = \frac{15}{2} m + \frac{1507}{2^5} m^2,$$

$$\xi_{1,2} = \frac{135}{2^4} m + \frac{1809}{2^6} m^2, \qquad \eta_{1,2} = \frac{105}{2^4} m + \frac{1327}{2^6} m^2,$$

$$\xi_{1,-4} = \frac{2025}{2^7} m^2, \qquad \eta_{1,-4} = -\frac{1575}{2^7} m^2,$$

$$\rho_{1,0} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2^3} m^2 \qquad \lambda_{1,0} = -1,$$

$$\rho_{1,-2} = -\frac{463}{2^6} m^2, \qquad \lambda_{1,-2} = \frac{369}{2^4} m^2,$$

$$\rho_{1,2} = \frac{405}{2^4} m + \frac{3417}{2^6} m^2, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{195}{2^3} m + \frac{1875}{2^5} m^2,$$

$$\rho_{1,-4} = \frac{6075}{2^7} m^2, \qquad \lambda_{1,-4} = -\frac{2925}{2^6} m^2,$$

$$\begin{aligned} \nu = & -9'' \sin G + 1' \sin(G - 2D) + 21'' \sin(G + 2D) \\ & - 4'' \sin(G - 4D) \\ & + 1'' \sin(G + 4D), \end{aligned}$$

$$\sin \varpi = -0'',1 \cos G + 0'',3 \cos(G + 2D) + 0'',1 \cos(G - 4D)$$

$$M_0 = \varepsilon_4$$

$$\xi_{0,0} = \frac{67}{2^3\, 3}, \qquad \eta_{0,0} = \frac{29}{2^2\, 3},$$

$$\xi_{0,-2} = -\frac{305}{2^4} m, \qquad \eta_{0,-2} = -\frac{35}{2} m,$$

$$\rho_{0,0} = \frac{32}{3}, \qquad \lambda_{0,0} = \frac{103}{2^2\, 3},$$

$$\rho_{0,-2} = -\frac{55}{2} m, \qquad \lambda_{0,-2} = -32 m,$$

$$\nu = +2'' \sin 4G - 1'' \sin(4G - 2D)$$

Bien que l'argument $4G - 4D$ soit à longue période, il n'en résulte

aucune inégalité de l'ordre de m

$$M_7 = \varepsilon_1^3 \varepsilon_{-1}$$

$$\xi_{7,0} = -\frac{8}{3}, \qquad \eta_{7,0} = -\frac{10}{3},$$

$$\xi_{7,-2} = \frac{105}{2^4} m, \qquad \eta_{7,-2} = \frac{75}{2^3} m,$$

$$\xi_{7,2} = \frac{335}{2^4} m, \qquad \eta_{7,2} = \frac{145}{2^3} m,$$

$$\rho_{7,0} = -\frac{8}{3}, \qquad \lambda_{7,0} = -\frac{11}{3},$$

$$\rho_{7,-2} = 0\, m^2, \qquad \lambda_{7,-2} = -\frac{15}{2^3} m,$$

$$\rho_{7,2} = 80 m, \qquad \lambda_{7,2} = \frac{515}{2^3} m,$$

$$v = -1'' \sin 2G + 1'' \sin(2G + 2D)$$

$$M_8 = \varepsilon_1^3 \varepsilon_{-1}^2$$

$$\xi_{8,0} = -\frac{1}{2^2},$$

$$\xi_{8,2} = -\frac{135}{2^4} m, \qquad \eta_{8,2} = -\frac{45}{2^2} m,$$

$$\rho_{8,0} = 0\, m,$$

$$\rho_{8,2} = -\frac{15}{2} m, \qquad \lambda_{8,2} = -\frac{15}{2^2} m$$

$$M_9 = \varepsilon_1^5$$

$$\xi_{9,0} = \frac{17}{3}, \quad \eta_{9,0} = \frac{77}{3 \cdot 5}, \quad \rho_{9,0} = \frac{625}{2^3 \cdot 3}, \quad \lambda_{9,0} = \frac{1097}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}.$$

$$M_{10} = \varepsilon_1^4 \varepsilon_{-1}$$

$$\xi_{10,0} = -\frac{13}{2}, \quad \eta_{10,0} = -\frac{41}{2 \cdot 3}, \quad \rho_{10,0} = -\frac{81}{2^3}, \quad \lambda_{10,0} = -\frac{43}{2^2}$$

$$M_{11} = \varepsilon_1^3 \varepsilon_{-1}^2$$

$$\xi_{11,0} = \frac{5}{2 \cdot 3}, \quad \eta_{11,0} = \frac{5}{2 \cdot 3}, \quad \rho_{11,0} = \frac{1}{2^2 \cdot 3}, \quad \lambda_{11,0} = \frac{5}{2 \cdot 3}$$

Ces derniers coefficients $\xi_{9,0}$, …, $\lambda_{11,0}$ n'ont aussi aucun terme en m

Dans le cas du monome M_{11}, on a $\lambda_{11,0} = \frac{5}{2\cdot 3}$ *a priori*, et l'on peut déterminer le coefficient g_8 qui est insensible à notre degré d'approximation.

135. Pour les monomes $M_{13}, \ldots, M_{26}$, qui sont du premier degré en γ, l'équation (C') donne très aisément

$$z_{13,0} = 1 + \frac{1}{2^2} m^2 + \frac{61}{2^6} m^3, \qquad \sigma_{13,0} = 2 - \frac{1}{2} m^2 - \frac{13}{2^3} m^3,$$

$$z_{13,-2} = -\frac{9}{2} m - \frac{219}{2^4} m^2 - \frac{5491}{2^7} m^3, \qquad \sigma_{13,-2} = -3m - \frac{81}{2^3} m^2 - \frac{2193}{2^6} m^3,$$

$$z_{13,2} = \frac{3}{2^2} m^2 + \frac{27}{2^4} m^3, \qquad \sigma_{13,2} = \frac{7}{2} m^2 + \frac{119}{2^3\, 3} m^3,$$

$$z_{13,-4} = -\frac{45}{2^6} m^2 - \frac{249}{2^6} m^3, \qquad \sigma_{13,-4} = -\frac{45}{2^6} m^2 - \frac{177}{2^5} m^3,$$

$$s = +1014'' \sin(H + G) - 168'' \sin(H + G - 2D) + 13'' \sin(H + G + 2D) - 7'' \sin(H + G - 4D)$$

$$z_{14,0} = -3 + \frac{471}{2^6} m^2 + \frac{327}{2^6} m^3 + \frac{14385}{2^{11}} m^4,$$

$$z_{14,-2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{11}{2^5} m^2 + \frac{35}{2^9\, 3} m^3,$$

$$z_{14,2} = \frac{15}{2^3} m + \frac{277}{2^5} m^2 + \frac{34889}{2^9\, 3} m^3,$$

$$z_{14,-4} = -\frac{9}{2^5} m^3,$$

$$z_{14,4} = \frac{45}{2^5} m^3,$$

$$\sigma_{14,0} = -2 + \frac{189}{2^5} m^2 - \frac{3}{2^5} m^3 - \frac{2453}{2^{10}} m^4,$$

$$\sigma_{14,-2} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{11}{2^4} m^2 - \frac{445}{2^8\, 3} m^3,$$

$$\sigma_{14,2} = \frac{15}{2^2} m + \frac{181}{2^4} m^2 + \frac{23465}{2^8\, 3} m^3,$$

$$\sigma_{14,-4} = -\frac{21}{2^4} m^3,$$

$$\sigma_{14,4} = \frac{105}{2^4} m^3,$$

$$s = -997'' \sin(H - G) - 33'' \sin(H - G - 2D) + 201'' \sin(H - G + 2D) + 3'' \sin(H - G + 4D)$$

C'est en raison de la suite qu'il a fallu calculer $\zeta_{14,0}$ avec un degré supérieur d'approximation

$$z_{15,0} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^3} m^2, \qquad \sigma_{15,0} = \frac{9}{2} - \frac{17}{2^3} m^2,$$

$$z_{15,-2} = -\frac{93}{2^4} m - \frac{1499}{2^6} m^2, \qquad \sigma_{15,-2} = -\frac{147}{2^4} m - \frac{2669}{2^6} m^2,$$

$$z_{15,2} = \frac{75}{2^5} m^2, \qquad \sigma_{15,2} = \frac{425}{2^6} m^2,$$

$$z_{15,-4} = -\frac{315}{2^7} m^2, \qquad \sigma_{15,-4} = -\frac{585}{2^7} m^2,$$

$$s = +62'' \sin(H + 2G) - 16'' \sin(H + 2G - 2D) + 1'' \sin(H + 2G + 2D) - 1'' \sin(H + 2G - 4D)$$

$$z_{16,0} = -2 - \frac{11}{2^3} m^2, \qquad \sigma_{16,0} = -4,$$

$$z_{16,-2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{35}{2^5} m^2, \qquad \sigma_{16,-2} = -\frac{27}{2^3} m - \frac{315}{2^5} m^2,$$

$$z_{16,2} = \frac{45}{2^3} m + \frac{675}{2^5} m^2, \qquad \sigma_{16,2} = \frac{135}{2^3} m + \frac{1389}{2^5} m^2,$$

$$z_{16,-4} = -\frac{135}{2^6} m^2, \qquad \sigma_{16,-4} = -\frac{405}{2^6} m^2,$$

$$s = -56'' \sin H - 5'' \sin(H - 2D) + 24'' \sin(H + 2D) - 1'' \sin(H - 4D) + 1'' \sin(H + 4D),$$

le coefficient $\sigma_{16,0}$ est égal à -4 par convention, et l'on a en même temps

$$h_3 = 6 m^2 + \frac{141}{2^3} m^2,$$

$$nh'_3 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} = n\left(-6 m^2 - \frac{93}{2^3} m^3\right) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} = -616''$$

$$z_{17,0} = -2 + \frac{135}{2^4} m + \frac{61}{2^7} m^2, \qquad \sigma_{17,0} = -3 + \frac{135}{2^4} m + \frac{945}{2^7} m^2,$$

$$z_{17,-2} = -\frac{9}{2^4} m - \frac{45}{2^6} m^2, \qquad \sigma_{17,-2} = -\frac{27}{2^4} m - \frac{195}{2^6} m^2,$$

$$z_{17,2} = \frac{45}{2^4} m + \frac{21}{2^7} m^2 \qquad \sigma_{17,2} = -\frac{15}{2^4} m - \frac{1435}{2^7} m^2,$$

$$z_{17,4} = \frac{675}{2^7} m^2, \qquad \sigma_{17,4} = \frac{2025}{2^7} m^2,$$

$$s = -32'' \sin(H - 2G) - 2'' \sin(H - 2G - 2D) - 2'' \sin(H - 2G + 2D) + 2'' \sin(H - 2G + 4D)$$

L'argument $H - 2G$ ayant sa période très voisine du mois, il a fallu pousser le calcul du second membre de l'équation (C') correspondante jusqu'aux termes en m^4

$$z_{18,0} = \frac{8}{3}, \qquad \sigma_{18,0} = \frac{32}{3},$$

$$z_{18,-2} = -\frac{53}{2^2} m, \qquad \sigma_{18,-2} = -\frac{67}{2} m,$$

$$s = \quad + 4'' \sin(H + 3G) - 2'' \sin(H + 3G - 2D),$$

$$z_{19,0} = -3, \qquad \sigma_{19,0} = -10,$$

$$z_{19,-2} = 9m, \qquad \sigma_{19,-2} = 6m,$$

$$z_{19,2} = 15m, \qquad \sigma_{19,2} = 60m$$

$$s = \quad - 4'' \sin(H + G) + 2'' \sin(H + G + 2D),$$

$$z_{20,0} = \frac{15}{2} - \frac{405}{2^4} m - \frac{5529}{2^6} m^2, \qquad \sigma_{20,0} = 5 - \frac{135}{2^3} m - \frac{2211}{2^9} m^2,$$

$$z_{20,-2} = -\frac{75}{2^4} m, \qquad \sigma_{20,-2} = -\frac{123}{2^3} m,$$

$$z_{20,2} = -\frac{45}{2^4} m \qquad \sigma_{20,2} = -\frac{165}{2^3} m,$$

$$s = \quad 1'' \sin(H - G) - 1'' \sin(H - G - 2D) - 1'' \sin(H - G + 2D),$$

$$z_{21,0} = -\frac{13}{2 \cdot 3} \quad \frac{135}{2^4} m + \frac{2575}{2^7 \cdot 3} m^2, \qquad \sigma_{21,0} = -\frac{17}{3} + \frac{135}{2^3} m + \frac{4811}{2^6 \cdot 3} m^2,$$

$$z_{21,-2} = -1 \; m, \qquad \sigma_{21,-2} = -4m,$$

$$z_{21,2} = \frac{45}{2^2} m, \qquad \sigma_{21,2} = \frac{15}{2} m,$$

$$s = \quad - 2' \sin(H - 3G),$$

$$z_{22,0} = \frac{125}{2^3 \cdot 3}, \qquad \sigma_{22,0} = \frac{625}{2^3 \cdot 3},$$

$$z_{23,0} = -6, \qquad \sigma_{23,0} = -27,$$

ces derniers coefficients n'ont aucun terme en m

$$z_{24,0} = -\frac{11}{2^2}, \qquad \sigma_{24,0} = \frac{7}{2^2},$$

$$z_{25,0} = \frac{49}{2 \cdot 3}, \qquad \sigma_{25,0} = \frac{77}{2 \cdot 3},$$

$$z_{26,0} = -\frac{27}{2^3}, \qquad \sigma_{26,0} = \frac{99}{2^3},$$

on a $z_{21,0} = \frac{7}{2^2}$ par convention, le coefficient h_8 en résulte : il est de l'ordre de m^2, et $nh'_8 \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}^2$ est inférieur à une demi-seconde. L'argument H — 2G qui correspond à $z_{21,0}$ a sa période très voisine du mois, et c'est pourquoi il a fallu porter l'approximation de $z_{20,0}$, $z_{21,0}$ jusqu'aux termes en m^2.

136. Les monomes M_{27}, ..., M_{42} sont du second degré par rapport à l'inclinaison, ils donnent des inégalités de la longitude et de la parallaxe.

$$\xi_{27,0} = \frac{1}{2} - 1 \; m^2 + \frac{85}{2^6} m^3, \qquad \eta_{27,0} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2^3} m^2 - \frac{17}{2^2} m^3,$$

$$\xi_{27,-2} = -\frac{3}{2^3} m + \frac{19}{2^4} m^2 - \frac{7085}{2^9 \cdot 3} m^3, \qquad \eta_{27,-2} = -\frac{9}{2^3} m + \frac{121}{2^5} m^2 - \frac{7621}{2^9 \cdot 3} m^3,$$

$$\xi_{27,2} = \frac{3}{2^5} m^2 + \frac{1}{2^2} m^3, \qquad \eta_{27,2} = -\frac{3}{2^5} m^2 - \frac{1}{2^2} m^3,$$

$$\xi_{27,-4} = \frac{9}{2^7} m^2 + \frac{27}{2^8} m^3, \qquad \eta_{27,-4} = \frac{9}{2^7} m^2 - \frac{81}{2^8} m^3,$$

$$\rho_{27,0} = 1 \; m^2 - \frac{7}{2} m^3 + \frac{119}{2^5} m^4, \qquad \lambda_{27,0} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2^3} m^2 - \frac{583}{2^7} m^3,$$

$$\rho_{27,-2} = -\frac{3}{2} m^2 + \frac{33}{2^3} m^3 - \frac{543}{2^7} m^4, \qquad \lambda_{27,-2} = -\frac{9}{2^3} m + \frac{31}{2^3} m^2 - \frac{7237}{2^9 \cdot 3} m^3,$$

$$\rho_{27,2} = 0 \; m^3, \qquad \lambda_{27,2} = -\frac{11}{2^4} m^2 - \frac{13}{2^2 \cdot 3} m^3,$$

$$\rho_{27,-4} = \frac{3}{2^2} m^3, \qquad \lambda_{27,-4} = \frac{9}{2^7} m^2 - \frac{291}{2^8} m^3$$

$$v = \; -410'' \sin 2H - 56'' \sin(2H - 2D) - 4'' \sin(2H + 2D),$$

$$\sin \varpi = \; +0'',1 \cos 2H - 0'',1 \cos(2H - 2D)$$

Les coefficients $\rho_{27,0}$, $\rho_{27,-2}$ ont été calculés jusqu'aux termes en m^4, le premier en vue de la suite, le second parce que l'argument 2H — 2D est à longue période.

$$\xi_{28,0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m^2, \qquad \eta_{28,0} = -\frac{1}{2} + 1 \; m^2,$$

$$\xi_{28,-2} = -\frac{33}{2^4} m - \frac{15}{2^6} m^2, \qquad \eta_{28,-2} = -\frac{33}{2^4} m + \frac{663}{2^6} m^2,$$

$$\xi_{28,2} = \frac{3}{2^3} m^2, \qquad \eta_{28,2} = -\frac{3}{2^3} m^2,$$

$$\xi_{28,-4} = \frac{423}{2^7} m^2, \qquad \eta_{28,-4} = \frac{63}{2^7} m^2,$$

$$\rho_{28,0} = \frac{33}{2^3} m^2, \qquad \lambda_{28,0} = -2 + \frac{19}{2^2} m^2,$$

$$\rho_{28,-2} = -\frac{21}{2^3} m - \frac{27}{2^5} m^2, \qquad \lambda_{28,-2} = -\frac{3}{2} m + \frac{67}{2^2} m^2,$$

$$\rho_{28,2} = 0\ m^2, \qquad \lambda_{28,2} = -\frac{39}{2^3} m^2,$$

$$\rho_{28,-4} = \frac{42}{2^5} m^2, \qquad \lambda_{28,-4} = -\frac{99}{2^5} m^2,$$

$$v = -45'' \sin(2H + G) - 1'' \sin(2H + G + 2D),$$

$$\sin \varpi = -0'',1 \cos(2H + G - 2D)$$

$$\xi_{29,0} = 1 - \frac{135}{2^4} m + \frac{1025}{2^7} m^2, \qquad \eta_{29,0} = -\frac{7}{2} + \frac{135}{2^3} m - \frac{403}{2^5} m^2,$$

$$\xi_{29,-2} = \frac{75}{2^4} m - \frac{1955}{2^7} m^2, \qquad \eta_{29,-2} = 6m - \frac{833}{2^6} m^2,$$

$$\xi_{29,2} = \frac{15}{2^4} m + \frac{227}{2^6} m^2, \qquad \eta_{29,2} = -\frac{15}{2^4} m - \frac{347}{2^6} m^2,$$

$$\xi_{29,-4} = \frac{9}{2^7} m^2, \qquad \eta_{29,-4} = \frac{9}{2^7} m^2,$$

$$\rho_{29,0} = -\frac{3}{2} + \frac{135}{2^4} m - \frac{947}{2^7} m^2, \qquad \lambda_{29,0} = -3 + \frac{135}{2^3} m - \frac{867}{2^6} m^2,$$

$$\rho_{29,-2} = \frac{33}{2^4} m + \frac{767}{2^7} m^2, \qquad \lambda_{29,-2} = \frac{33}{2^3} m - \frac{495}{2^6} m^2,$$

$$\rho_{29,2} = -\frac{165}{2^5} m^2, \qquad \lambda_{29,2} = -\frac{15}{2^2} m - \frac{61}{2^2} m^2,$$

$$\rho_{29,-4} = 0\ m^2, \qquad \lambda_{29,-4} = \frac{9}{2^5} m^2,$$

$$v = -39'' \sin(2H - G) + 6'' \sin(2H - G - 2D) - 9'' \sin(2H - G + 2D),$$

$$\sin \varpi = -0'',7 \cos(2H - G)$$

$$\xi_{30,0} = \frac{3}{2^2}, \qquad \eta_{30,0} = -\frac{3}{2^2},$$

$$\xi_{30,-2} = -\frac{57}{2^3} m, \qquad \eta_{30,-2} = -3m,$$

$$\rho_{30,0} = 0\ m, \qquad \lambda_{30,0} = -\frac{13}{2},$$

$$\rho_{30,-2} = -\frac{21}{2} m, \qquad \lambda_{30,-2} = \frac{15}{2^2} m,$$

$$v = -4'' \sin(2H + 2G) + 1'' \sin(2H + 2G - 2D),$$

l'argument $2H+2G-4D$, bien qu'à longue période, ne donne aucune inégalité de l'ordre de m

$$\xi_{31,0} = -6 + \frac{135}{2^3}m, \qquad \eta_{31,0} = -\frac{3}{2} + \frac{135}{2^4}m,$$

$$\xi_{31,-2} = \frac{279}{2^4}m, \qquad \eta_{31,-2} = \frac{411}{2^4}m,$$

$$\xi_{31,2} = \frac{45}{2^4}m, \qquad \eta_{31,2} = -\frac{45}{2^4}m,$$

$$\rho_{31,0} = -10 + \frac{135}{2^2}m - \frac{1481}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{31,0} = -\frac{9}{2} + \frac{675}{2^4}m,$$

$$\rho_{31,-2} = \frac{57}{2}m^2, \qquad \lambda_{31,-2} = \frac{75}{2^2}m,$$

$$\rho_{31,2} = 0.m, \qquad \lambda_{31,2} = -\frac{195}{2^3}m,$$

$$v = -1''\sin 2H + 1''\sin(2H-2D) - 2''\sin(2H+2D),$$

$$\sin\varpi = -0'',1\cos 2H$$

Les coefficients $\rho_{31,0}$ et $\rho_{31,-2}$ sont calculés jusqu'aux termes en m^2, le premier en vue de la suite, le second parce que l'argument $2H-2D$ est à longue période

$$\xi_{32,0} = \frac{11}{2^2} - \frac{135}{2^4}m, \qquad \eta_{32,0} = \frac{9}{2^2} + \frac{135}{2^3}m,$$

$$\xi_{32,-2} = -3m, \qquad \eta_{32,-2} = \frac{33}{2^4}m,$$

$$\xi_{32,2} = -\frac{15}{2}m, \qquad \eta_{32,2} = -\frac{105}{2^4}m,$$

$$\rho_{32,0} = \frac{405}{2^3}m^3, \qquad \lambda_{32,0} = 1 + \frac{135}{2^3}m,$$

$$\rho_{32,-2} = -\frac{33}{2^2}m, \qquad \lambda_{32,-2} = \frac{45}{2^2}m,$$

$$\rho_{32,2} = -\frac{75}{2^2}m, \qquad \lambda_{32,2} = -15m,$$

$$v = +1''\sin(2H-2G) - 1''\sin(2H-2G+2D)$$

L'argument $2H-2G$ étant à très longue période, il a fallu calculer $\rho_{32,0}$ jusqu'au terme en m^3, et l'on s'est servi pour cela de l'équation (A′) qui n'exige pas, comme le ferait l'équation (A), la détermination préalable de $(p^2)_{32,-2}$ et $(q^2)_{32,2}$, c'est-à-dire de tous

les elements affectes des indices 32, — 2 et 32,2 jusqu'aux termes en m^3 Avec cette precaution, on ne rencontre donc aucune difficulte reelle, tout au plus doit-on signaler la necessite de connaître $\chi_{29,0}$ jusqu'au terme en m^3, ce qui ne demande aucune determination nouvelle

$$\xi_{33,0} = \frac{4}{3}, \qquad \eta_{33,0} = -\frac{4}{3}, \qquad \rho_{33,0} = 0\ m, \qquad \lambda_{33,0} = -\frac{59}{3},$$

ces coefficients ne contenant aucun terme en m,

$$\xi_{34,0} = -\frac{51}{2^2}, \qquad \eta_{34,0} = -\frac{29}{2^2}, \qquad \rho_{34,0} = -\frac{135}{2^2}, \qquad \lambda_{34,0} = -\frac{11}{2},$$

$$\xi_{35,0} = -\frac{5}{2^2}, \qquad \eta_{35,0} = \frac{65}{2}, \qquad \rho_{35,0} = \frac{75}{2^2}, \qquad \lambda_{35,0} = \frac{61}{2},$$

$$\xi_{36,0} = \frac{31}{2\ 3}, \qquad \eta_{36,0} = \frac{73}{2^2\ 3}, \qquad \rho_{36,0} = -\frac{3}{2}, \qquad \lambda_{36,0} = \frac{14}{3}$$

On a ensuite

$$\xi_{37,0} = -1 - \frac{9}{2^6} m^2 - \frac{21}{2^7} m^3,$$

$$\xi_{37,2} = \frac{3}{2^3} m + \frac{39}{2^5} m^2 + \frac{335}{2^9} m^3, \qquad \eta_{37,2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{57}{2^5} m^2 - \frac{959}{2^9} m^3,$$

$$\xi_{37,4} = \frac{9}{2^7} m^3, \qquad \eta_{37,4} = -\frac{9}{2^7} m^3,$$

$\rho_{37,0} =$ 0 (egalite rigoureuse),

$$\rho_{37,2} = -1\ m^2 - \frac{5}{2^2\ 3} m^3, \qquad \lambda_{37,2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{35}{2^5} m^2 - \frac{1213}{2^9\ 3} m^3,$$

$$\rho_{37,4} = 0\ m^3, \qquad \lambda_{37,4} = -\frac{33}{2^6} m^3,$$

$$\nu = -31'' \sin 2D, \qquad \sin \varpi = -0'',1 \cos 2D$$

$$g_{37} = 6m^2 + \frac{141}{2^3} m^3, \qquad n g'_{37} \gamma_1 \gamma_{-1} = n\left(-6m^2 - \frac{93}{2^3} m^3\right) \gamma_1 \gamma_{-1} = -1740'',$$

$$\xi_{38,0} = 1 - \frac{117}{2^4} m^2, \qquad \eta_{38,0} = -2 - \frac{63}{2^6} m^2,$$

$$\xi_{38,-2} = \frac{9}{2} m + \frac{285}{2^4} m^2, \qquad \eta_{38,-2} = \frac{81}{2^3} m + \frac{1671}{2^5} m^2,$$

$$\xi_{38,2} = \frac{3}{2^3} m - \frac{23}{2^5} m^2, \qquad \eta_{38,2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{19}{2^6} m^2,$$

$$\xi_{38,-4} = \frac{45}{2^6} m^2, \qquad \eta_{38,-4} = \frac{45}{2^6} m^2,$$

$$\rho_{38,0} = \frac{19}{2^5} m^2, \qquad \lambda_{38,0} = 0 \text{ (par convention)},$$

$$\rho_{38,-2} = -\frac{15}{2^2} m - \frac{131}{2^3} m^2, \qquad \lambda_{38,-2} = 6m + \frac{311}{2^3} m^2,$$

$$\rho_{38,2} = -\frac{33}{2^3} m^2, \qquad \lambda_{38,2} = -\frac{3}{2} m - \frac{29}{2^3} m^2,$$

$$\rho_{38,-4} = 0\ m^2, \qquad \lambda_{38,-4} = \frac{45}{2^4} m^2,$$

$$v = +19' \sin(G - 2D) - 3'' \sin(G + 2D) + 1'' \sin(G - 4D),$$

$$\sin \varpi = -0'',2 \sin(G - 2D)$$

$$\xi_{39,0} = \frac{3}{2} - \frac{135}{2^4} m \qquad \eta_{39,0} = -3 + \frac{135}{2^4} m,$$

$$\xi_{39,-2} = \frac{93}{2^4} m, \qquad \eta_{39,-2} = \frac{123}{2^4} m,$$

$$\xi_{39,2} = \frac{9}{2^4} m, \qquad \eta_{39,2} = -\frac{9}{2^4} m,$$

$$\rho_{39,0} = 0\ m, \qquad \lambda_{39,0} = -\frac{5}{2} + \frac{135}{2^4} m$$

$$\rho_{39,-2} = \frac{15}{2} m^2, \qquad \lambda_{39,-2} = 3m,$$

$$\rho_{39,2} = 0\ m, \qquad \lambda_{39,2} = -\frac{39}{2^3} m,$$

$$v = -1'' \sin 2G + 1'' \sin(2G - 2D)$$

$$\xi_{40,0} = 2,$$

$$\xi_{40,2} = -9m, \qquad \eta_{40,2} = -\frac{63}{2^3} m,$$

$$\rho_{40,0} = 0\ m,$$

$$\rho_{40,2} = -15m, \qquad \lambda_{40,2} = -\frac{63}{2^2} m,$$

$$v = -1'' \sin 2D$$

$$\xi_{41,0} = 1, \qquad \eta_{41,0} = -\frac{11}{3}, \qquad \rho_{41,0} = 0, \qquad \lambda_{41,0} = -10,$$

$$g_{40} = 0\ m, \qquad n g'_{40} \gamma_1 \gamma_{-1} c_1 c_{-1} = 7'',$$

$$\xi_{42,0} = -1, \qquad \eta_{42,0} = -1, \qquad \rho_{42,0} = -5, \qquad \lambda_{42,0} = 0 \text{ (par convention)}$$

137. Les monomes M_{43}, ..., M_{54}, du troisième degré en γ, donnent,

toujours par application de l'équation (C′)

$$\zeta_{43,0} = \frac{3}{2} m^2, \qquad \sigma_{43,0} = -\frac{1}{2\ 3} + \frac{11}{2^3} m^2,$$

$$\zeta_{43,-2} = -\frac{9}{2^3} m + \frac{117}{2^5} m^2, \qquad \sigma_{43,-2} = -\frac{15}{2^4} m + \frac{151}{2^6} m^2,$$

$$\zeta_{43,2} = 0\ m^2, \qquad \sigma_{43,2} = -\frac{11}{2^6} m^2,$$

$$\zeta_{43,-4} = -\frac{9}{2^5} m^2, \qquad \sigma_{43,-4} = -\frac{45}{2^7} m^2,$$

$$s = -6'' \sin 3H - 2'' \sin(3H - 2D)$$

$$\zeta_{44,0} = 0\ m, \qquad \sigma_{44,0} = -1$$

$$\zeta_{44,-2} = -\frac{15}{2^2} m \qquad \sigma_{44,-2} = -\frac{21}{2^2} m,$$

$$s = -1'' \sin(3H + G)$$

$$\zeta_{45,0} = -\frac{5}{2} + \frac{135}{2^4} m - \frac{337}{2^7} m^2, \qquad \sigma_{45,0} = -4 + \frac{135}{2^3} m - \frac{261}{2^4} m^2,$$

$$\zeta_{45,-2} = \frac{27}{2^5} m, \qquad \sigma_{45,-2} = \frac{33}{2^3} m,$$

$$\zeta_{45,2} = 0\ m, \qquad \sigma_{45,2} = -\frac{15}{2^3} m,$$

$$s = -3'' \sin(3H - G)$$

$$\zeta_{46,0} = 0\ m, \qquad \sigma_{46,0} = -\frac{17}{2^2} + 0\ m,$$

$$\zeta_{47,0} = -\frac{15}{2}, \qquad \sigma_{47,0} = -\frac{33}{2},$$

$$\zeta_{48,0} = -\frac{5}{2^2}, \qquad \sigma_{48,0} = \frac{13}{2^2}$$

$$h_{37} = -\frac{3}{2} m^2 + \frac{51}{2^4} m^3, \qquad n h'_{37} \gamma_1 \gamma_{-1} = n\left(\frac{3}{2} m^2 - \frac{75}{2^4} m^3\right) \gamma_1 \gamma_{-1} = 261'',$$

$$\zeta_{49,0} = -\frac{1}{2} + \frac{55}{2^6} m^2, \qquad \sigma_{49,0} = 0 \text{ (par convention)},$$

$$\zeta_{49,-2} = -\frac{3}{2^4} m + \frac{199}{2^6} m^2, \qquad \sigma_{49,-2} = -\frac{9}{2^4} m + \frac{211}{2^6} m^2,$$

$$\zeta_{49,2} = -\frac{15}{2^5} m^2, \qquad \sigma_{49,2} = -\frac{3}{2^4} m - \frac{79}{2^6} m^2,$$

$$\zeta_{49,-4} = 0\ m^2, \qquad \sigma_{49,-4} = \frac{9}{2^7} m^2,$$

$$s = -1'' \sin(H - 2D) - 1'' \sin(H + 2D)$$

$$z_{50,0} = -\frac{1}{2}, \qquad \sigma_{50,0} = 0\, m,$$

$$z_{50,-2} = \frac{27}{2^2} m, \qquad \sigma_{50,-2} = \frac{27}{2^3} m,$$

$$z_{50,2} = 0\, m, \qquad \sigma_{50,2} = -\frac{9}{2^3} m,$$

$$s = +1'' \sin(H + G - 2D)$$

$$z_{51,0} = -6 + \frac{405}{2^4} m - \frac{1731}{2^7} m^2, \qquad \sigma_{51,0} = -5 + \frac{135}{2^3} m + \frac{23}{2^6} m^2,$$

$$z_{51,-2} = \frac{15}{2^3} m, \qquad \sigma_{51,-2} = 3 m,$$

$$z_{51,2} = -\frac{45}{2^3} m, \qquad \sigma_{51,2} = -\frac{33}{2^2} m,$$

$$s = -4'' \sin(H - G) - 1'' \sin(H - G + 2D)$$

$$z_{52,0} = -\frac{3}{2^2} + 0\, m, \qquad \sigma_{52,0} = -\frac{5}{2^2},$$

$$h_{40} = 0\, m, \qquad n h'_{40} \gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} = -2'',$$

$$z_{53,0} = 6, \qquad \sigma_{53,0} = 0 \text{ (par convention)},$$

$$z_{54,0} = -\frac{51}{2^2}, \qquad \sigma_{54,0} = -20$$

Enfin, les monomes M_{55}, ..., M_{62} du quatrième degré en γ, et les monomes M_{63}, M_{64}, M_{65} du cinquième degré en γ donneront

$$\xi_{55,0} = 0\, m, \quad \eta_{55,0} = 0\, m, \quad \rho_{55,0} = 0\, m, \quad \lambda_{55,0} = \frac{1}{2^2} + 0\, m,$$

$$\xi_{55,-2} = -\frac{3}{2^3} m, \quad \eta_{55,-2} = \frac{3}{2^3} m, \quad \rho_{55,-2} = 0\, m, \quad \lambda_{55,-2} = \frac{3}{2^2} m,$$

$$\xi_{56,0} = 0\, m, \quad \eta_{56,0} = 0\, m, \quad \rho_{56,0} = 0\, m, \quad \lambda_{56,0} = 2 + 0\, m,$$

$$\xi_{57,0} = -\frac{5}{2^2}, \quad \eta_{57,0} = \frac{5}{2^2}, \quad \rho_{57,0} = 0, \quad \lambda_{57,0} = 3,$$

$$\xi_{58,0} = 0\, m, \quad \eta_{58,0} = 0.m, \quad \rho_{58,0} = -1\, m^2, \quad \lambda_{58,0} = -\frac{1}{2} + 0\, m,$$

$$\xi_{58,-2} = \frac{3}{2^3} m, \quad \eta_{58,-2} = \frac{15}{2^3} m, \quad \rho_{58,-2} = \frac{3}{2} m^2, \quad \lambda_{58,-2} = \frac{3}{2^2} m,$$

$$\xi_{58,2} = 0\, m, \quad \eta_{58,2} = 0\, m, \quad \rho_{58,2} = 0\, m, \quad \lambda_{58,2} = \frac{3}{2^3} m,$$

$$\nu = -1'' \sin 2H,$$

$$\xi_{59,0} = 0\ m, \qquad \eta_{59,0} = 0\ m, \qquad \rho_{59,0} = 0\ m, \qquad \lambda_{59,0} = -2 + 0\ m,$$

$$\xi_{60,0} = \frac{15}{2}, \qquad \eta_{60,0} = -15, \qquad \rho_{60,0} = -10, \qquad \lambda_{60,0} = -18,$$

$$\xi_{61,0} = 0\ m, \qquad \rho_{61,0} = 0\ m,$$

$$\xi_{61,2} = 0\ m, \qquad \eta_{61,2} = 0\ m, \qquad \rho_{61,2} = 0\ m, \qquad \lambda_{61,2} = -\frac{9}{2^3}\ m,$$

$$g_{61} = 0\ m, \qquad n g'_{61} \gamma_1^2 \gamma_{-1}^2 = -2'',$$

$$\xi_{62,0} = \frac{5}{2^2}, \qquad \eta_{62,0} = \frac{5}{2^2}, \qquad \rho_{62,0} = \frac{5}{2}, \qquad \lambda_{62,0} = 0 \text{(par convention)},$$

$$z_{63,0} = 0\ m, \qquad \sigma_{63,0} = \frac{3}{2^3\,5} + 0\ m,$$

$$z_{64,0} = 0\ m, \qquad \sigma_{64,0} = -\frac{1}{2^3} + 0\ m,$$

$$h_{61,0} = 0\ m,$$

$$z_{65,0} = -\frac{1}{2^3} + 0\ m, \qquad \sigma_{65,0} = -\frac{1}{2^3} \text{(par convention)}$$

CHAPITRE XXII.

DÉTERMINATION DES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE QUI DÉPENDENT DE L'EXCENTRICITÉ ET DE LA PARALLAXE SOLAIRES

138. Occupons-nous d'abord des inégalités qui dépendent de l'excentricité ε' de l'orbite solaire, en même temps que de ε et γ. Elles correspondent aux monomes

$M_{66} = \varepsilon'_1,$

$M_{67} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_1,$

$M_{68} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{69} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_1^2,$

$M_{70} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{71} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_{-1}^2,$

$M_{72} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_1^3,$

$M_{73} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_1^2\,\varepsilon_{-1},$

$M_{74} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_{-1}^2,$

$M_{75} = \varepsilon'_1\,\varepsilon_{-1}^3,$

$M_{76} = \varepsilon'_1\,\gamma_1,$

$M_{77} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1},$

$M_{78} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\varepsilon_1,$

$M_{79} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_{-1},$

$M_{80} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{81} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_1,$

$M_{82} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\varepsilon_1^2,$

$M_{83} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_{-1}^2,$

$M_{84} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{85} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{86} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\varepsilon_{-1}^2,$

$M_{87} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_1^2,$

$M_{88} = \varepsilon'_1\,\gamma_1^2,$

$M_{89} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}^2,$

$M_{90} = \varepsilon'_1\,\gamma_1^2\,\varepsilon_1,$

$M_{91} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}^2\,\varepsilon_{-1},$

$M_{92} = \varepsilon'_1\,\gamma_1^2\,\varepsilon_{-1},$

$M_{93} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}^2\,\varepsilon_1,$

$M_{94} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\gamma_{-1},$

$M_{95} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_1,$

$M_{96} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_{-1},$

$M_{97} = \varepsilon'_1\,\gamma_1^3,$

$M_{98} = \varepsilon'_1\,\gamma_{-1}^3,$

$M_{99} = \varepsilon'_1\,\gamma_1^2\,\gamma_{-1},$

$M_{100} = \varepsilon'_1\,\gamma_1\,\gamma_{-1}^2,$

$M_{101} = \varepsilon'^2_1,$

$M_{102} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon_1,$

$M_{103} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{104} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon_1^2,$

$M_{105} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{106} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon_{-1}^2,$

$M_{107} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_1,$

$M_{108} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_{-1},$

$M_{109} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_1\,\varepsilon_1,$

$M_{110} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_{-1},$

$M_{111} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{112} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_{-1}\,\varepsilon_1,$

$M_{113} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_1^2,$

$M_{114} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_{-1}^2,$

$M_{115} = \varepsilon'^2_1\,\gamma_1\,\gamma_{-1},$

$M^*_{116} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1},$

$M_{117} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\varepsilon_1,$

$M_{118} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\varepsilon_1^2,$

$M^*_{119} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{120} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\gamma_1,$

$M_{121} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\gamma_1\,\varepsilon_1,$

$M_{122} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\gamma_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{123} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\gamma_1^2$

$M^*_{124} = \varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}\,\gamma_1\,\gamma_{-1},$

$M_{125} = \varepsilon'^3_1,$

$M_{126} = \varepsilon'^3_1\,\varepsilon_1,$

$M_{127} = \varepsilon'^3_1\,\varepsilon_{-1},$

$M_{128} = \varepsilon'^3_1\,\gamma_1,$

$M_{129} = \varepsilon'^3_1\,\gamma_{-1},$

$M_{130} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon'_{-1},$

$M_{131} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon'_{-1}\,\varepsilon_1,$

$M_{132} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon'_{-1}\,\varepsilon_{-1},$

$M_{133} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon'_{-1}\,\gamma_1,$

$M_{134} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon'_{-1}\,\gamma_{-1},$

$M_{135} = \varepsilon'^4_1,$

$M_{136} = \varepsilon'^3_1\,\varepsilon'_{-1},$

$M^*_{137} = \varepsilon'^2_1\,\varepsilon'^2_{-1},$

et à leurs conjugués, les monomes M_{116}, M_{119}, M_{124}, M_{137}, marqués d'un astérisque, sont conjugués d'eux-mêmes

Il faudra tenir compte ici de la fonction F réduite à

$$\frac{m^2}{4}(\rho'^3 - 1)(pq + 2z^2) + \frac{3m^2}{8}(\rho'^3 e^{-2l} - 1)p^2\theta^2 + \frac{3m^2}{8}(\rho'^3 e^{2l} - 1)q^2\theta^{-2},$$

et pour les termes de la latitude, l'usage de l'équation (C) sera le plus simple

On trouve sans peine les résultats suivants

$$\xi_{66,0} = \frac{3}{2}m^2 - 3m^3 - \frac{3027}{2^7}m^4, \qquad \eta_{66,0} = -3m + 3m^2 + \frac{687}{2^4}m^3 + \frac{2887}{2^4}m^4,$$

$$\xi_{66,-2} = \frac{7}{2}m^2 - \frac{169}{2^4}m^3 - \frac{169}{2^3}m^4, \qquad \eta_{66,-2} = -\frac{77}{2^4}m^2 - \frac{301}{2^4}m^3 - \frac{2777}{2^6}m^4,$$

$$\xi_{66,2} = \frac{1}{2}m^2 + \frac{33}{2^4\,3}m^3 - \frac{139}{2^2\,3^2}m^4, \qquad \eta_{66,2} = -\frac{11}{2^4}m^2 - \frac{119}{2^4\,3}m^3 + \frac{1465}{2^6\,3^2}m^4,$$

$$\xi_{66,-4} = \frac{175}{2^8}m^4 \qquad \eta_{66,-4} = -\frac{175}{2^8}m^4,$$

$$\xi_{66,4} = -\frac{25}{2^8}m^4 \qquad \eta_{66,4} = -\frac{25}{2^8}m^4$$

$$\rho_{66,0} = -\frac{3}{2}m^2 + 3m^3 + \frac{381}{2^4}m^4 + \frac{347}{2^2}m^5,$$

$$\rho_{66,-2} = \frac{7}{2}m^2 + \frac{101}{2^3}m^3 + \frac{333}{2^4}m^4,$$

$$\rho_{66,2} = -\frac{1}{2}m^2 - \frac{67}{2^3\,3}m^3 + \frac{169}{2^4\,3^2}m^4,$$

$$\rho_{66,-4} = \frac{49}{2^3}m^4,$$

$$\rho_{66,4} = -\frac{7}{2^3}m^4,$$

$$\lambda_{66,0} = -3m + 3m^2 + \frac{687}{2^4}m^3 + \frac{2887}{2^4}m^4,$$

$$\lambda_{66,-2} = -\frac{77}{2^4}m^2 - \frac{325}{2^4}m^3 - \frac{2727}{2^6}m^4,$$

$$\lambda_{66,2} = -\frac{11}{2^4}m^2 - \frac{191}{2^4\,3}m^3 + \frac{727}{2^6\,3^2}m^4,$$

$$\lambda_{66,-4} = -\frac{1407}{2^8}m^4,$$

$$\lambda_{66,4} = -\frac{201}{2^8}m^4,$$

$$v = -659''\sin G' - 152''\sin(G' - 2D) - 22''\sin(G' + 2D) - 1''\sin(G' - 4D),$$

$$\sin\varpi = -0'',4\cos G' + 1'',7\cos(G' - 2D) - 0'',3\sin(G' + 2D),$$

l'inégalité de la longitude qui dépend de $\sin G'$ est connue sous le nom d'*équation annuelle* nous venons d'en obtenir la partie principale

$$\xi_{67,0} = -\frac{3}{2^2} m + \frac{765}{2^5} m^2 + \frac{4729}{2^5} m^3, \qquad \eta_{67,0} = -\frac{15}{2} m - \frac{549}{2^4} m^2 - \frac{20861}{2^7} m^3,$$

$$\xi_{67,-2} = -\frac{35}{2^2} m - \frac{713}{2^5} m^2 - \frac{4577}{2^7} m^3, \qquad \eta_{67,-2} = -\frac{35}{2} m - \frac{733}{2^3} m^2 - \frac{9199}{2^5} m^3,$$

$$\xi_{67,2} = -\frac{5}{2^4} m^2 - \frac{977}{2^6\, 3} m^3, \qquad \eta_{67,2} = -\frac{7}{2^4} m^2 - \frac{1093}{2^6\, 3} m^3,$$

$$\xi_{67,-4} = \frac{875}{2^7} m^3, \qquad \eta_{67,-4} = -\frac{1225}{2^7} m^3,$$

$$\rho_{67,0} = -\frac{21}{2^2} m - \frac{669}{2^5} m^2 - \frac{3743}{2^6} m^3, \qquad \lambda_{67,0} = -\frac{21}{2} m - \frac{549}{2^4} m^2 - \frac{1823}{2^4} m^3,$$

$$\rho_{67,-2} = \frac{35}{2^2} m + \frac{989}{2^5} m^2 + \frac{5693}{2^7} m^3, \qquad \lambda_{67,-2} = -\frac{35}{2} m - \frac{1521}{2^4} m^2 - \frac{18301}{2^6} m^3,$$

$$\rho_{67,2} = -\frac{33}{2^4} m^2 - \frac{1423}{2^6} m^3, \qquad \lambda_{67,2} = -\frac{17}{2^3} m^2 - \frac{2225}{2^6\, 3} m^3,$$

$$\rho_{67,-4} = \frac{5775}{2^7} m^3, \qquad \lambda_{67,-4} = -\frac{2975}{2^6} m^3,$$

$$v = -110'' \sin(G'+G) - 207'' \sin(G'+G-2D) - 3'' \sin(G'+G+2D) - 4'' \sin(G'+G-4D),$$

$$\sin\varpi = -1'',0 \cos(G'+G) + 1'',5 \cos(G'+G-2D) + 0'',1 \cos(G'+G-4D).$$

$$\xi_{68,0} = \frac{3}{2^2} m - \frac{1233}{2^5} m^2 - \frac{14241}{2^6} m^3, \qquad \eta_{68,0} = -\frac{15}{2} m - \frac{1161}{2^4} m^2 - \frac{46659}{2^7} m^3,$$

$$\xi_{68,-2} = \frac{35}{2^4} m^2 + \frac{1219}{2^6} m^3, \qquad \eta_{68,-2} = -\frac{49}{2^4} m^2 - \frac{935}{2^6} m^3,$$

$$\xi_{68,2} = \frac{15}{2^2} m - \frac{371}{2^5} m^2 - \frac{64865}{2^7\, 3} m^3, \qquad \eta_{68,2} = -\frac{15}{2} m + 2 m^2 + \frac{27673}{2^5\, 3} m^3,$$

$$\xi_{68,4} = -\frac{225}{2^7} m^3, \qquad \eta_{68,4} = -\frac{315}{2^7} m^3,$$

$$\rho_{68,0} = \frac{21}{2^2} m + \frac{945}{2^5} m^2 + \frac{1113}{2^3} m^3, \qquad \lambda_{68,0} = -\frac{21}{2} m - \frac{1065}{2^4} m^2 - \frac{10317}{2^5} m^3,$$

$$\rho_{68,-2} = \frac{231}{2^4} m^2 + \frac{3879}{2^6} m^3, \qquad \lambda_{68,-2} = -\frac{119}{2^3} m^2 - \frac{2179}{2^5} m^3,$$

$$\rho_{68,2} = -\frac{15}{2^2} m + \frac{23}{2^5} m^2 + \frac{52205}{2^7\, 3} m^3, \qquad \lambda_{68,2} = -\frac{15}{2} m - \frac{53}{2^4} m^2 + \frac{52837}{2^6\, 3} m^3,$$

$$\rho_{68,4} = -\frac{1485}{2^7} m^3, \qquad \lambda_{68,4} = -\frac{765}{2^6} m^3,$$

$$\rho = -149'' \sin(G'-G) - 14'' \sin(G'-G-2D) - 28'' \sin(G'-G+2D) - 1'' \sin(G'-G+4D),$$

$$\sin\varpi = +1'',2 \cos(G'-G) + 0'',2 \cos(G'-G-2D) - 0'',2 \cos(G'-G+2D)$$

$$\xi_{69,0} = -12m - \frac{477}{2^4}m^2, \qquad \eta_{69,0} = -\frac{33}{2^2}m - \frac{369}{2^5}m^2,$$

$$\xi_{69,-2} = -\frac{35}{2}m - \frac{1445}{2^6}m^2, \qquad \eta_{69,-2} = -\frac{105}{2^2}m - \frac{1169}{2^4}m^2,$$

$$\xi_{69,2} = -\frac{39}{2^5}m^2, \qquad \eta_{69,2} = -\frac{9}{2^3}m^2,$$

$$\xi_{69,-4} = \frac{525}{2^4}m^2, \qquad \eta_{69,-4} = -\frac{525}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{69,0} = -21m - \frac{621}{2^3}m^2, \qquad \lambda_{69,0} = -\frac{105}{2^2}m - \frac{2829}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{69,-2} = -\frac{105}{2}m^2 - \frac{1125}{2^3}m^3, \qquad \lambda_{69,-2} = -\frac{105}{2^2}m - 118m^2,$$

$$\rho_{69,2} = -7m^2, \qquad \lambda_{69,2} = -\frac{95}{2^4}m^2,$$

$$\rho_{69,-4} = \frac{525}{2^3}m^2, \qquad \lambda_{69,-4} = -\frac{2625}{2^6}m^2,$$

$$\rho = -8'' \sin(G'+2G) - 9'' \sin(G'+2G-2D) - 3'' \sin(G'+2G-4D),$$

$$\sin\varpi = -0'',1 \cos(G'+2G)$$

$$\xi_{70,0} = -54m^2, \qquad \eta_{70,0} = -\frac{15}{2}m - \frac{2865}{2^3}m^2,$$

$$\xi_{70,-2} = \frac{35}{2}m + 144m^2, \qquad \eta_{70,-2} = -\frac{35}{2^2}m - \frac{951}{2^4}m^2,$$

$$\xi_{70,2} = -\frac{15}{2}m - 32m^2, \qquad \eta_{70,2} = -\frac{12}{2^2}m - \frac{343}{2^4}m^2,$$

$$\rho_{70,0} = -9m^2 - \frac{903}{2^2}m^3, \qquad \lambda_{70,0} = -\frac{27}{2}m - \frac{2817}{2^8}m^2,$$

$$\rho_{70,-2} = 35m + \frac{659}{2^2}m^2, \qquad \lambda_{70,-2} = -\frac{175}{2^2}m - \frac{3841}{2^4}m^2,$$

$$\rho_{70,2} = -15m - \frac{147}{2^2}m^2, \qquad \lambda_{70,2} = -\frac{75}{2^2}m - \frac{813}{2^4}m^2,$$

$$\rho = -15'' \sin G' - 15'' \sin(G'-2D) - 3'' \sin(G'+2D) - 1'' \sin(G'-4D),$$

$$\sin\varpi = +0'',2 \cos(G'-2D)$$

$$\xi_{71,0} = 12m + \frac{1089}{2^4}m^2, \qquad \eta_{71,0} = -\frac{33}{2^2}m - \frac{1053}{2^5}m^2,$$

$$\xi_{71,-2} = \frac{273}{2^5}m^2, \qquad \eta_{71,-2} = -\frac{63}{2^3}m^2,$$

$$\xi_{71,2} = \frac{15}{2}m - \frac{1125}{2^5}m^2, \qquad \eta_{71,2} = -\frac{45}{2^2}m + \frac{823}{2^4}m^2,$$

$$\xi_{71,4} = -\frac{225}{2^4}m^2, \qquad \eta_{71,4} = -\frac{225}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{71,0} = 21m + \frac{993}{2^3}m^2, \qquad \lambda_{71,0} = -\frac{105}{2^2}m - \frac{5241}{2^6}m^2$$

$$\rho_{71,-2} = 49m^2, \qquad \lambda_{71,-2} = -\frac{665}{2^4}m^2,$$

$$\rho_{71,2} = \frac{15}{2}m^2 - \frac{345}{2^3}m^3, \qquad \lambda_{71,2} = -\frac{45}{2^2}m + \frac{283}{2^3}m^2,$$

$$\rho_{71,4} = -\frac{225}{2^3}m^2, \qquad \lambda_{71,4} = -\frac{1125}{2^5}m^2,$$

$$\nu = -10''\sin(G'-2G) - 1''\sin(G-2G-2D) + 3''\sin(G'-2G+2D)$$

$$\sin\varpi = +0'',1\cos(G'-2G)$$

$$\xi_{72,0} = -\frac{217}{2^3}m, \quad \eta_{72,0} = -\frac{183}{2^3}m \quad \rho_{72,0} = -\frac{567}{2^3}m \quad \lambda_{72,0} = -\frac{273}{2^2}m,$$

$$\xi_{72,-2} = -\frac{315}{2^3}m, \quad \eta_{72,-2} = -\frac{315}{2^3}m, \quad \rho_{72,-2} = -\frac{245}{2^3}m, \quad \lambda_{72,-2} = -\frac{245}{2^2}m,$$

$$\nu = -1''\sin(G'+3G),$$

$$\xi_{73,0} = -\frac{45}{2^3}m, \quad \eta_{73,0} = \frac{63}{2^3}m, \quad \rho_{73,0} = -\frac{51}{2^3}m, \quad \lambda_{73,0} = -\frac{51}{2^2}m$$

$$\xi_{73,-2} = \frac{35}{2}m, \quad \eta_{73,-2} = 35m, \quad \rho_{73,-2} = 0\,m, \quad \lambda_{73,-2} = 0\,m,$$

$$\xi_{73,2} = -\frac{135}{2^3}m, \quad \eta_{73,2} = -\frac{105}{2^3}m, \quad \rho_{73,2} = -\frac{405}{2^3}m, \quad \lambda_{73,2} = -\frac{195}{2^2}m;$$

$$\nu = -1''\sin(G'+G),$$

$$\xi_{74,0} = \frac{45}{2^3}m, \quad \eta_{74,0} = \frac{63}{2^3}m, \quad \rho_{74,0} = \frac{51}{2^3}m, \quad \lambda_{74,0} = -\frac{51}{2^2}m,$$

$$\xi_{74,-2} = \frac{315}{2^3}m, \quad \eta_{74,-2} = -\frac{245}{2^3}m, \quad \rho_{74,-2} = \frac{945}{2^3}m, \quad \lambda_{74,-2} = -\frac{455}{2^2}m,$$

$$\xi_{74,2} = -\frac{15}{2}m, \quad \eta_{74,2} = 15m, \quad \rho_{74,2} = 0\,m, \quad \lambda_{74,2} = 0\,m,$$

$$\nu = -1''\sin(G'-G-2D)$$

$$\xi_{75,0} = \frac{217}{2^3} m, \quad \eta_{75,0} = -\frac{183}{2^3} m, \quad \rho_{75,0} = \frac{567}{2^3} m, \quad \lambda_{75,0} = -\frac{273}{2^2} m,$$

$$\xi_{75,2} = \frac{135}{2^3} m, \quad \eta_{75,2} = -\frac{135}{2^3} m, \quad \rho_{75,2} = \frac{102}{2^3} m, \quad \lambda_{75,2} = -\frac{105}{2^2} m,$$

$$v = \quad -1'' \sin(G' - 3G)$$

D'une façon generale, on doit observer le peu de convergence des series qui representent les coefficients de toutes les inegalites qui dependent de ε', et surtout de celles qui dependent à la fois de ε' et ε

$$z_{76,0} = -\frac{3}{2^2} m + \frac{3}{2^5} m^2 + \frac{2449}{2^6} m^3, \qquad \sigma_{76,0} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{45}{2^5} m^2 + \frac{2597}{2^6} m^3,$$

$$z_{76,-2} = -\frac{7}{2^2} m - \frac{311}{2^5} m^2 - \frac{3333}{2^7} m^3, \qquad \sigma_{76,-2} = -\frac{7}{2^2} m - \frac{199}{2^5} m^2 - \frac{1693}{2^7} m^3,$$

$$z_{76,2} = -\frac{3}{2^4} m^2 - \frac{85}{2^6} m^3, \qquad \sigma_{76,2} = -\frac{11}{2^4} m^2 - \frac{863}{2^6 \cdot 3} m^3,$$

$$z_{76,-4} = -\frac{105}{2^7} m^3, \qquad \sigma_{76,-4} = -\frac{385}{2^7} m^3,$$

$$s = \quad -6'' \sin(G + H) - 29'' \sin(G' + H - 2D) - 1'' \sin(G' + H + 2D)$$

$$z_{77,0} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{33}{2^5} m^2 + \frac{1167}{2^5} m^3, \qquad \sigma_{77,0} = -\frac{3}{2^2} m + \frac{15}{2^5} m^2 + \frac{1101}{2^5} m^3,$$

$$z_{77,-2} = -\frac{21}{2^4} m^2 - \frac{501}{2^6} m^3, \qquad \sigma_{77,-2} = -\frac{77}{2^4} m^2 - \frac{1333}{2^6} m^3,$$

$$z_{77,2} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{107}{2^5} m^2 - \frac{323}{2^7 \cdot 3} m^3, \qquad \sigma_{77,2} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{91}{2^5} m^2 + \frac{389}{2^7 \cdot 3} m^3,$$

$$z_{77,4} = -\frac{27}{2^7} m^3, \qquad \sigma_{77,4} = -\frac{99}{2^7} m^3,$$

$$s = \quad -5'' \sin(G' - H) - 7'' \sin(G' - H - 2D) - 12'' \sin(G' - H + 2D)$$

$$z_{78,0} = -6m - \frac{261}{2^4} m^2, \qquad \sigma_{78,0} = -12m - \frac{309}{2^3} m^2,$$

$$z_{78,-2} = -21m - \frac{387}{2^2} m^2, \qquad \sigma_{78,-2} = -14m - \frac{143}{2} m^2,$$

$$z_{78,2} = -\frac{3}{2^2} m^2, \qquad \sigma_{78,2} = -\frac{7}{2} m^2,$$

$$z_{78,-4} = -\frac{105}{2^4} m^2, \qquad \sigma_{78,-4} = -\frac{105}{2^3} m^2,$$

$$s = \quad -5'' \sin(G' + H + G) - 8'' \sin(G' + H + G - 2D)$$
$$- 1'' \sin(G' + H + G - 4D)$$

$$z_{79,0} = -6m - \frac{561}{2^4} m^2, \qquad \sigma_{79,0} = -12m - \frac{513}{2^3} m^2,$$

$$z_{79,-2} = -\frac{21}{2^2} m^2, \qquad \sigma_{79,-2} = -\frac{49}{2} m^2,$$

$$z_{79,2} = -9m + 6m^2 \qquad \sigma_{79,2} = -6m + 3m^2,$$

$$z_{79,4} = -\frac{45}{2^4} m^2, \qquad \sigma_{79,4} = -\frac{45}{2^3} m^2,$$

$$s = -7'' \sin(G' - H - G) - 1'' \sin(G' - H - G - 2D) - 1'' \sin(G' - H - G + 2D)$$

$$z_{80,0} = -\frac{27}{2} m - \frac{315}{2^2} m^2, \qquad \sigma_{80,0} = -9m - \frac{93}{2} m^2,$$

$$z_{80,-2} = -\frac{7}{2^2} m - \frac{31}{2^2} m^2, \qquad \sigma_{80,-2} = -\frac{7}{2} m - \frac{31}{2} m^2,$$

$$z_{80,2} = -\frac{15}{2^2} m - \frac{43}{2^3} m^2, \qquad \sigma_{80,2} = -\frac{15}{2} m - \frac{19}{2^2} m^2,$$

$$s = -6'' \sin(G' + H - G) - 2'' \sin(G' + H - G - 2D) - 1'' \sin(G' + H - G + 2D)$$

$$z_{81,0} = -\frac{27}{2} m - \frac{279}{2^2} m^2, \qquad \sigma_{81,0} = -9m - \frac{105}{2} m^2,$$

$$z_{81,-2} = -\frac{35}{2^2} m - \frac{521}{2^3} m^2, \qquad \sigma_{81,-2} = -\frac{35}{2} m - \frac{353}{2^2} m^2,$$

$$z_{81,2} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{19}{2^2} m^2, \qquad \sigma_{81,2} = -\frac{3}{2} m - \frac{19}{2} m^2,$$

$$s = -5'' \sin(G' - H + G) - 9'' \sin(G' - H + G - 2D) - 1'' \sin(G' - H + G + 2D)$$

$$z_{82,0} = -\frac{135}{2^3} m, \qquad \sigma_{82,0} = -\frac{405}{2^3} m,$$

$$z_{82,-2} = -\frac{217}{2^3} m, \qquad \sigma_{82,-2} = -\frac{343}{2^3} m,$$

$$s = -1'' \sin(G' + H + 2G) - 1'' \sin(G + H + 2G - 2D)$$

$$z_{83,0} = -\frac{135}{2^3} m, \qquad \sigma_{83,0} = -\frac{405}{2^3} m,$$

$$z_{83,2} = -\frac{93}{2^3} m, \qquad \sigma_{83,2} = -\frac{147}{2^3} m,$$

$$s = -1'' \sin(G' - H - 2G)$$

$$\varsigma_{84,0} = 6\,m, \qquad \sigma_{84,0} = \frac{15}{2}\,m,$$

$$\varsigma_{84,-2} = -\frac{7}{2^2}\,m, \qquad \sigma_{84,-2} = -\frac{63}{2^2}\,m,$$

$$\varsigma_{84,2} = -\frac{45}{2^2}\,m, \qquad \sigma_{84,2} = -\frac{135}{2^2}\,m,$$

$$s = -1''\sin(G' + H)$$

$$\varsigma_{85,0} = 6\,m, \qquad \sigma_{85,0} = \frac{15}{2}\,m,$$

$$\varsigma_{85,-2} = -\frac{105}{2^2}\,m, \qquad \sigma_{85,-2} = -\frac{315}{2^2}\,m,$$

$$\varsigma_{85,2} = -\frac{3}{2^2}\,m, \qquad \sigma_{85,2} = -\frac{27}{2^2}\,m,$$

$$s = -1''\sin(G' - H - 2D)$$

$$\varsigma_{86,0} = -\frac{39}{2}\,m, \qquad \sigma_{86,0} = -\frac{117}{2^2}\,m,$$

$$\varsigma_{86,-2} = -\frac{21}{2^3}\,m, \qquad \sigma_{86,-2} = -\frac{63}{2^3}\,m,$$

$$\varsigma_{86,2} = -\frac{45}{2^3}\,m, \qquad \sigma_{86,2} = \frac{15}{2^3}\,m,$$

$$\varsigma_{87,0} = -\frac{39}{2}\,m, \qquad \sigma_{87,0} = -\frac{117}{2^2}\,m,$$

$$\varsigma_{87,-2} = -\frac{105}{2^3}\,m, \qquad \sigma_{87,-2} = \frac{35}{2^3}\,m,$$

$$\varsigma_{87,2} = -\frac{9}{2^3}\,m, \qquad \sigma_{87,2} = -\frac{27}{2^3}\,m$$

$$\xi_{88,0} = \frac{3}{2^2}\,m - \frac{165}{2^5}\,m^2, \qquad \eta_{88,0} = -\frac{3}{2^2}\,m + \frac{201}{2^5}\,m^2,$$

$$\xi_{88,-2} = -\frac{7}{2^2}\,m + \frac{275}{2^5}\,m^2, \qquad \eta_{88,-2} = -\frac{21}{2^2}\,m + \frac{535}{2^5}\,m^2,$$

$$\xi_{88,2} = -\frac{3}{2^5}\,m^2, \qquad \eta_{88,2} = \frac{3}{2^5}\,m^2,$$

$$\xi_{88,-4} = \frac{21}{2^5}\,m^2, \qquad \eta_{88,-4} = \frac{21}{2^5}\,m^2,$$

$$\rho_{88,0} = 3m^2, \qquad \lambda_{88,0} = \frac{3}{2^2}m + \frac{177}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{88,-2} = -\frac{21}{2}m^2 + \frac{183}{2^3}m^3, \qquad \lambda_{88,-2} = -\frac{21}{2^2}m + \frac{65}{2^2}m^2,$$

$$\rho_{88,2} = 0\, m^2, \qquad \lambda_{88,2} = \frac{11}{2^4}m^2,$$

$$\rho_{88,-4} = 0\, m^2, \qquad \lambda_{88,-4} = \frac{21}{2^6}m^2,$$

$$v = -2'' \sin(G' + 2\,\mathrm{II} - 2\,\mathrm{D}).$$

$$\xi_{89,0} = -\frac{3}{2^2}m - \frac{39}{2^5}m^2, \qquad \eta_{89,0} = -\frac{3}{2^2}m - \frac{75}{2^5}m^2,$$

$$\xi_{89,-2} = \frac{21}{2^5}m^2, \qquad \eta_{89,-2} = \frac{21}{2^5}m^2,$$

$$\xi_{89,2} = \frac{3}{2^2}m - \frac{77}{2^5}m^2, \qquad \eta_{89,2} = -\frac{9}{2^2}m - \frac{131}{2^5}m^2,$$

$$\xi_{89,4} = -\frac{9}{2^5}m^2, \qquad \eta_{89,4} = \frac{9}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{89,0} = 3m^2, \qquad \lambda_{89,0} = \frac{3}{2^2}m - \frac{147}{2^6}m^2,$$

$$\rho_{89,-2} = 0\, m^2, \qquad \lambda_{89,-2} = \frac{77}{2^4}m^2,$$

$$\rho_{89,2} = \frac{3}{2}m^2 + \frac{39}{2^3}m^3, \qquad \lambda_{89,2} = -\frac{9}{2^2}m - \frac{41}{2^3}m^2,$$

$$\rho_{89,4} = 0\, m^2, \qquad \lambda_{89,4} = \frac{9}{2^5}m^2,$$

$$v = -1'' \sin(G' - 2\,\mathrm{II} + 2\,\mathrm{D})$$

$$\xi_{90,0} = -\frac{15}{2^3}m, \quad \eta_{90,0} = \frac{15}{2^3}m, \quad \rho_{90,0} = 0\, m, \quad \lambda_{90,0} = \frac{27}{2},$$

$$\xi_{90,-2} = -\frac{77}{2^3}m, \quad \eta_{90,-2} = -\frac{77}{2^3}m, \quad \rho_{90,-2} = -\frac{49}{2^2}m, \quad \lambda_{90,-2} = -7m$$

$$\xi_{91,0} = \frac{15}{2^3}m, \quad \eta_{91,0} = \frac{15}{2^3}m, \quad \rho_{91,0} = 0\, m, \quad \lambda_{91,0} = \frac{27}{2},$$

$$\xi_{91,2} = \frac{33}{2^3}m, \quad \eta_{91,2} = -\frac{33}{2^3}m, \quad \rho_{91,2} = \frac{21}{2^2}m, \quad \lambda_{91,2} = -3m$$

$$\xi_{92,0} = \frac{57}{2^3} m, \quad \eta_{92,0} = -\frac{129}{2^3} m, \quad \rho_{92,0} = -\frac{75}{2^3} m, \quad \lambda_{92,0} = -\frac{45}{2^2} m,$$

$$\xi_{92,-2} = \frac{175}{2^3} m, \quad \eta_{92,-2} = 28\, m, \quad \rho_{92,-2} = -\frac{77}{2^3} m, \quad \lambda_{92,-2} = \frac{77}{2^2} m,$$

$$\xi_{92,2} = -\frac{15}{2^3} m, \quad \eta_{92,2} = \frac{15}{2^3} m, \quad \rho_{92,2} = 0\, m, \quad \lambda_{92,2} = \frac{15}{2} m$$

$$\xi_{93,0} = -\frac{57}{2^2} m, \quad \eta_{93,0} = -\frac{129}{2^3} m, \quad \rho_{93,0} = \frac{75}{2^3} m, \quad \lambda_{93,0} = -\frac{45}{2^2} m,$$

$$\xi_{93,-2} = \frac{35}{2^3} m, \quad \eta_{93,-2} = \frac{35}{2^3} m, \quad \rho_{93,-2} = 0\, m, \quad \lambda_{93,-2} = \frac{35}{2} m,$$

$$\xi_{93,2} = -\frac{75}{2^3} m, \quad \eta_{93,2} = 12 m, \quad \rho_{93,2} = \frac{33}{2^3} m, \quad \lambda_{93,2} = \frac{33}{2^2} m$$

$$\xi_{94,0} = -9 m^2, \qquad \eta_{94,0} = \frac{33}{2} m - \frac{249}{2^3} m^2,$$

$$\xi_{94,-2} = \frac{7}{2^2} m + \frac{177}{2^4} m^2, \qquad \eta_{94,-2} = \frac{7}{2^2} m + 15 m^2,$$

$$\xi_{94,2} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{45}{2^4} m^2, \qquad \eta_{94,2} = \frac{3}{2^2} m + \frac{27}{2^3} m^2,$$

$$\rho_{94,0} = 9 m^2 - \frac{111}{2^2} m^3, \qquad \lambda_{94,0} = \frac{27}{2} m - \frac{225}{2^3} m^2,$$

$$\rho_{94,-2} = -7 m^2, \qquad \lambda_{94,-2} = \frac{7}{2^2} m + \frac{181}{2^4} m^2,$$

$$\rho_{94,2} = 1\; m^2, \qquad \lambda_{94,2} = \frac{3}{2^2} m + \frac{61}{2^4} m^2,$$

$$\nu = \quad + 6'' \sin G' + 2'' \sin(G' - 2D) + 1'' \sin(G' + 2D)$$

$$\xi_{95,0} = -\frac{15}{2^2} m, \quad \eta_{95,0} = 57\, m, \quad \rho_{95,0} = \frac{63}{2} m, \quad \lambda_{95,0} = 63 m,$$

$$\xi_{95,-2} = 21\, m, \quad \eta_{95,-2} = \frac{189}{2^2} m, \quad \rho_{95,-2} = -\frac{35}{2} m, \quad \lambda_{95,-2} = 28 m,$$

$$\xi_{95,2} = -\frac{3}{2^2} m, \quad \eta_{95,2} = \frac{3}{2^2} m, \quad \rho_{95,2} = 0\, m, \quad \lambda_{95,2} = 3 m,$$

$$\nu = \quad + 1'' \sin(G' + G) + 1'' \sin(G'' + G - 2D),$$

$$\xi_{96,0} = \frac{15}{2^2} m, \quad \eta_{96,0} = 57\, m, \quad \rho_{96,0} = -\frac{63}{2} m, \quad \lambda_{96,0} = 63 m,$$

$$\xi_{96,-2} = \frac{7}{2^2} m, \quad \eta_{96,-2} = \frac{7}{2^2} m, \quad \rho_{96,-2} = 0\, m, \quad \lambda_{96,-2} = 7 m,$$

$$\xi_{96,2} = -9 m, \quad \eta_{96,2} = \frac{81}{2^2} m, \quad \rho_{96,2} = \frac{15}{2} m, \quad \lambda_{96,2} = 12 m,$$

$$\nu = \quad + 2'' \sin(G' - G)$$

$$z_{97,0} = 0\, m, \qquad \sigma_{97,0} = \frac{3}{2^3} m,$$

$$z_{97,-2} = -\frac{21}{2^2} m, \qquad \sigma_{97,-2} = -\frac{35}{2^3} m,$$

$$z_{98,0} = 0\, m, \qquad \sigma_{98,0} = \frac{3}{2^3} m,$$

$$z_{98,2} = -\frac{9}{2^2} m, \qquad \sigma_{98,2} = -\frac{15}{2^3} m,$$

$$z_{99,0} = \frac{75}{2^3} m, \qquad \sigma_{99,0} = 9 m,$$

$$z_{99,-2} = -\frac{7}{2^3} m, \qquad \sigma_{99,-2} = -\frac{21}{2^3} m,$$

$$z_{99,2} = 0\, m, \qquad \sigma_{99,2} = \frac{3}{2^3} m,$$

$$z_{100,0} = \frac{75}{2^3} m, \qquad \sigma_{100,0} = 9 m,$$

$$z_{100,-2} = 0\, m, \qquad \sigma_{100,-2} = \frac{7}{2^3} m,$$

$$z_{100,2} = -\frac{3}{2^3} m, \qquad \sigma_{100,2} = -\frac{9}{2^3} m$$

139 Pour les inégalités qui dépendent des puissances supérieures de ε', on a

$$\xi_{101,0} = 9 m^2 - 18 m^3, \qquad \eta_{101,0} = -\frac{9}{2} m + \frac{9}{2} m^2 + \frac{5175}{2^6} m^3,$$

$$\xi_{101,-2} = -17 m^2 - \frac{7837}{2^5\, 3} m^3, \qquad \eta_{101,-2} = -\frac{187}{2^3} m^2 - \frac{6851}{2^4\, 3} m^3,$$

$$\xi_{101,2} = \frac{15}{2^5} m^3, \qquad \eta_{101,2} = -\frac{21}{2^4} m^3,$$

$$\rho_{101,0} = -\frac{9}{2} m^2 + 9 m^3 + \frac{3177}{2^5} m^4, \qquad \lambda_{101,0} = -\frac{9}{2} m + \frac{9}{2} m^2 + \frac{5463}{2^6} m^3,$$

$$\rho_{101,-2} = 17 m^2 + \frac{595}{2\; 3} m^3, \qquad \lambda_{101,-2} = -\frac{187}{2^3} m^2 - \frac{7463}{2^4\, 3} m^3,$$

$$\rho_{101,2} = -\frac{3}{2} m^3 + 7 m^4, \qquad \lambda_{101,2} = -\frac{33}{2^4} m^3,$$

$$v = -7'' \sin 2G' - 8'' \sin(2G' - 2D),$$

$$\sin \varpi = +0'',1 \cos(2G' - 2D)$$

$$\xi_{102,0} = -\frac{9}{2^3}m + \frac{3189}{2^6}m^2, \qquad \eta_{102,0} = -\frac{45}{2^2}m - \frac{813}{2^5}m^2,$$

$$\xi_{102,-2} = -\frac{255}{2^3}m - \frac{6347}{2^6}m^2, \qquad \eta_{102,-2} = -\frac{255}{2^2}m - \frac{14369}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{102,0} = -\frac{63}{2^3}m - \frac{1461}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{102,0} = -\frac{63}{2^2}m - \frac{741}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{102,-2} = \frac{255}{2^3}m + \frac{9971}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{102,-2} = -\frac{255}{2^2}m - \frac{15139}{2^5}m^2,$$

$$v = -1''\sin(2G'+G) - 7''\sin(2G'+G-2D)$$

$$\xi_{103,0} = \frac{9}{2^3}m - \frac{3555}{2^6}m^2, \qquad \eta_{103,0} = -\frac{45}{2^2}m - \frac{5067}{2^5}m^2,$$

$$\xi_{103,-2} = \frac{85}{2^3}m^2, \qquad \eta_{103,-2} = -\frac{119}{2^3}m^2,$$

$$\xi_{103,2} = \frac{45}{2^3}m + \frac{6219}{2^6}m^2, \qquad \eta_{103,2} = -\frac{45}{2^2}m - \frac{5949}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{103,0} = \frac{63}{2^3}m + \frac{4131}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{103,0} = -\frac{63}{2^2}m - \frac{4851}{2^5}m^2,$$

$$\rho_{103,-2} = \frac{561}{2^3}m^2, \qquad \lambda_{103,-2} = -\frac{289}{2^2}m^2,$$

$$\rho_{103,2} = -\frac{45}{2^3}m - \frac{5859}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{103,2} = -\frac{45}{2^2}m - \frac{5859}{2^5}m^2,$$

$$v = -3''\sin(2G'-G) - 1''\sin(2G'-G-2D) - 3''\sin(2G'-G+2D)$$

$$\xi_{104,0} = -18m, \quad \eta_{104,0} = -\frac{99}{2^3}m, \quad \rho_{104,0} = -\frac{63}{2}m, \quad \lambda_{104,0} = -\frac{315}{2^3}m,$$

$$\xi_{104,-2} = -\frac{255}{2^2}m, \quad \eta_{104,-2} = -\frac{765}{2^3}m, \quad \rho_{104,-2} = -255m^2, \quad \lambda_{104,-2} = -\frac{765}{2^3}m,$$

$$\xi_{105,0} = 0m, \quad \eta_{105,0} = -\frac{45}{2^2}m, \quad \rho_{105,0} = -27m^2, \quad \lambda_{105,0} = -\frac{81}{2^2}m,$$

$$\xi_{105,-2} = \frac{255}{2^2}m, \quad \eta_{105,-2} = -\frac{255}{2^3}m, \quad \rho_{105,-2} = \frac{255}{2}m, \quad \lambda_{105,-2} = -\frac{1275}{2^3}m,$$

$$\xi_{105,2} = -\frac{45}{2^2}m, \quad \eta_{105,2} = -\frac{45}{2^3}m, \quad \rho_{105,2} = -\frac{45}{2}m, \quad \lambda_{105,2} = -\frac{225}{2^3}m,$$

$$v = -1''\sin(2G'-2D)$$

$$\xi_{106,0} = 18m, \quad \eta_{106,0} = -\frac{99}{2^3}m, \quad \rho_{106,0} = \frac{63}{2}m, \quad \lambda_{106,0} = -\frac{315}{2^3}m,$$

$$\xi_{106,2} = \frac{45}{2^2}m \quad \eta_{106,2} = -\frac{135}{2^3}m, \quad \rho_{106,2} = -\frac{135}{2^3}m^3, \lambda_{106,2} = -\frac{135}{2^3}m,$$

l'argument $2G' - 2G + 2D$, auquel correspondent les termes affectés de l'indice 106,2, étant à très longue période, on a usé de l'équation (A') pour déterminer $\rho_{106,2}$

$$z_{107,0} = -\frac{9}{2^3}m + \frac{51}{2^6}m^2, \qquad \sigma_{107,0} = -\frac{9}{2^3}m - \frac{237}{2^6}m^2,$$

$$z_{107,-2} = -\frac{51}{2^3}m - \frac{3409}{2^6}m^2 \qquad \sigma_{107,-2} = -\frac{51}{2^3}m - \frac{2321}{2^6}m^2,$$

$$s = \quad -1'' \sin(2G + H - 2D)$$

$$z_{108,0} = -\frac{9}{2^3}m - \frac{171}{2^6}m^2, \qquad \sigma_{108,0} = -\frac{9}{2^3}m + \frac{117}{2^6}m^2,$$

$$z_{108,-2} = -\frac{51}{2^3}m^2, \qquad \sigma_{108,-2} = -\frac{187}{2^3}m^2,$$

$$z_{108,2} = -\frac{9}{2^3}m + \frac{15}{2^6}m^2, \qquad \sigma_{108,2} = -\frac{9}{2^3}m + \frac{15}{2^6}m^2,$$

$$z_{109,0} = -9m, \qquad \sigma_{109,0} = -18m,$$

$$z_{109,-2} = -\frac{153}{2}m, \qquad \sigma_{109,-2} = -51m,$$

$$z_{110,0} = -9m, \qquad \sigma_{110,0} = -18m$$

$$z_{110,2} = -\frac{27}{2}m, \qquad \sigma_{110,2} = -9m,$$

$$z_{111,0} = -\frac{81}{2^2}m, \qquad \sigma_{111,0} = -\frac{27}{2}m,$$

$$z_{111,-2} = -\frac{51}{2^3}m, \qquad \sigma_{111,-2} = -\frac{51}{2^2}m,$$

$$z_{111,2} = -\frac{45}{2^3}m, \qquad \sigma_{111,2} = -\frac{45}{2^2}m,$$

$$z_{112,0} = -\frac{81}{2^2}m, \qquad \sigma_{112,0} = -\frac{27}{2}m,$$

$$z_{112,-2} = -\frac{255}{2^3}m, \qquad \sigma_{112,-2} = -\frac{255}{2^2}m,$$

$$z_{112,2} = -\frac{9}{2^3}m, \qquad \sigma_{112,2} = -\frac{9}{2^2}m$$

$$\xi_{113,0} = \frac{9}{2^3}m, \quad \eta_{113,0} = -\frac{9}{2^3}m \quad \rho_{113,0} = 0\,m, \quad \lambda_{113,0} = \frac{9}{2^3}m,$$

$$\xi_{113,-2} = -\frac{51}{2^3}m, \quad \eta_{113,-2} = -\frac{153}{2^3}m, \quad \rho_{113,-2} = -51\,m^2, \quad \lambda_{113,-2} = -\frac{153}{2^3}m,$$

$$\xi_{114,0} = -\frac{9}{2^3}m, \quad \eta_{114,0} = -\frac{9}{2^3}m, \quad \rho_{114,0} = 0\,m, \quad \lambda_{114,0} = \frac{9}{2^3}m,$$

$$\xi_{114,2} = \frac{9}{2^3}m, \quad \eta_{114,2} = -\frac{27}{2^3}m, \quad \rho_{114,2} = \frac{27}{2^3}m^3, \quad \lambda_{114,2} = -\frac{27}{2^3}m,$$

$$\xi_{115,0} = 0\,m, \quad \eta_{115,0} = \frac{99}{2^2}m, \quad \rho_{115,0} = 27\,m^2, \quad \lambda_{115,0} = \frac{81}{2^2}m,$$

$$\xi_{115,-2} = \frac{51}{2^3}m, \quad \eta_{115,-2} = \frac{51}{2^3}m, \quad \rho_{115,-2} = 0\,m, \quad \lambda_{115,-2} = \frac{51}{2^3}m,$$

$$\xi_{115,2} = -\frac{9}{2^3}m, \quad \eta_{115,2} = \frac{9}{2^3}m, \quad \rho_{115,2} = 0\,m, \quad \lambda_{115,2} = \frac{9}{2^3}m,$$

la détermination de $\rho_{114,2}$ a demandé les mêmes soins que celle de $\rho_{106,2}$

$$\xi_{116,0} = -10\,m^2 + 20\,m^3,$$

$$\xi_{116,2} = 5\,m^2 + \frac{40}{3}m^3, \qquad \eta_{116,2} = -\frac{55}{2^3}m^2 - \frac{191}{2\cdot 3}m^3,$$

$$\rho_{116,0} = 1\,m^2 - 2\,m^3,$$

$$\rho_{116,2} = -5\,m^2 - \frac{179}{2\cdot 3}m^3, \qquad \lambda_{116,2} = -\frac{55}{2^3}m^2 - \frac{263}{2\cdot 3}m^3,$$

$$v = -2''\sin 2D$$

$$g_{116} = -\frac{9}{2}m^2 - \frac{789}{2^3}m^3, \quad n g'_{116}\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} = n\left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{753}{2^3}m^3\right)\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} = 156'',$$

$$\xi_{117,0} = -\frac{97}{2}m^2, \qquad \eta_{117,0} = \frac{23}{2}m^2,$$

$$\xi_{117,-2} = \frac{75}{2^2}m - \frac{335}{2^3}m^2, \qquad \eta_{117,-2} = \frac{75}{2}m + \frac{575}{2^3}m^2,$$

$$\xi_{117,2} = -\frac{25}{2^3}m^2, \qquad \eta_{117,2} = -\frac{35}{2^3}m^2,$$

$$\rho_{117,0} = -\frac{7}{2}m^2, \qquad \lambda_{117,0} = 0 \text{ (par convention)},$$

$$\rho_{117,-2} = -\frac{75}{2^2}m - \frac{235}{2^3}m^2, \qquad \lambda_{117,-2} = \frac{75}{2}m + \frac{425}{2^2}m^2,$$

$$\rho_{117,2} = -\frac{165}{2^3}m^2, \qquad \lambda_{117,2} = -\frac{85}{2^2}m^2,$$

$$v = +2''\sin(G - 2D)$$

$$\xi_{118,-2} = \frac{75}{2} m, \quad \eta_{118,-2} = \frac{225}{2^2} m, \quad \rho_{118,-2} = 75 m^2, \quad \lambda_{118,-2} = \frac{225}{2^2} m,$$

$$\xi_{119,2} = -\frac{75}{2} m, \quad \eta_{119,2} = -\frac{75}{2^2} m, \quad \rho_{119,2} = -75 m, \quad \lambda_{119,2} = -\frac{375}{2^2} m,$$

$$g_{119} = 0\ m, \qquad n g'_{119} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} = -1''$$

$$h_{116} = \frac{9}{2} m^2 - \frac{69}{2^3} m^3, \quad n h'_{116} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} = n\left(-\frac{9}{2} m^2 + \frac{105}{2^3} m^3\right) \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} = -25'',$$

$$z_{120,0} = -1\ m^2, \qquad \sigma_{120,0} = 0 \text{ (par convention)},$$

$$z_{120,-2} = \frac{15}{2^2} m + \frac{209}{2^3} m^2, \qquad \sigma_{120,-2} = \frac{15}{2^2} m + \frac{169}{2^3} m^2,$$

$$z_{120,2} = -\frac{15}{2^3} m^2, \qquad \sigma_{120,2} = -\frac{55}{2^3} m^2,$$

$$s = +1'' \sin(H - 2D)$$

$$z_{121,-2} = 45 m, \qquad \sigma_{121,-2} = 30 m,$$

$$z_{122,-2} = \frac{15}{2^2} m, \qquad \sigma_{122,-2} = \frac{15}{2} m,$$

$$z_{122,2} = -\frac{75}{2^2} m, \qquad \sigma_{122,2} = -\frac{75}{2} m,$$

$$h_{119} = 0\ m, \qquad n h'_{119} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} = -1''$$

$$\xi_{123,-2} = \frac{15}{2^2} m, \quad \eta_{123,-2} = \frac{45}{2^2} m, \quad \rho_{123,-2} = 15 m^2, \quad \lambda_{123,-2} = \frac{45}{2^2} m,$$

$$\xi_{124,2} = -\frac{15}{2^2} m, \quad \eta_{124,2} = \frac{15}{2^2} m, \quad \rho_{124,2} = 0\ m, \quad \lambda_{124,2} = \frac{15}{2^2} m,$$

$$g_{124} = 0\ m, \qquad n g'_{124} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1} = -2''$$

$$h_{124} = 0\ m$$

$$\xi_{125,0} = \frac{107}{2^2} m^2, \qquad \eta_{125,0} = -\frac{53}{2\cdot 3} m + \frac{53}{2\cdot 3} m^2,$$

$$\xi_{125,-2} = -\frac{845}{2^2\cdot 3} m^2, \qquad \eta_{125,-2} = -\frac{9295}{2^5\cdot 3} m^2,$$

$$\xi_{125,2} = -\frac{1}{2^2\cdot 3} m^2, \qquad \eta_{125,2} = \frac{11}{2^5\cdot 3} m^2,$$

$$\rho_{125,0} = -\frac{53}{2^2} m^2 + \frac{53}{2} m^3, \qquad \lambda_{125,0} = -\frac{53}{2\cdot 3} m + \frac{53}{2\cdot 3} m^2,$$

$$\rho_{125,-2} = \frac{845}{2^2\,3} m^2 \qquad \lambda_{125,-2} = -\frac{9295}{2^6\,3} m^2,$$

$$\rho_{125,2} = \frac{1}{2^2\,3} m^2, \qquad \lambda_{125,2} = \frac{11}{2^5\,3} m^2,$$

$$\xi_{126,0} = -\frac{53}{2^3\,3} m, \qquad \eta_{126,0} = -\frac{265}{2^2\,3} m,$$

$$\xi_{126,-2} = -\frac{845}{2^3} m, \qquad \eta_{126,-2} = -\frac{845}{2^2} m,$$

$$\rho_{126,0} = -\frac{371}{2^3\,3} m, \qquad \lambda_{126,0} = -\frac{371}{2^2\,3} m,$$

$$\rho_{126,-2} = \frac{845}{2^3} m, \qquad \lambda_{126,-2} = -\frac{845}{2^2} m,$$

$$\xi_{127,0} = \frac{53}{2^3\,3} m, \qquad \eta_{127,0} = -\frac{265}{2^2\,3} m,$$

$$\xi_{127,2} = \frac{5}{2^3} m, \qquad \eta_{127,2} = -\frac{5}{2^2} m,$$

$$\rho_{127,0} = \frac{371}{2^3\,3} m, \qquad \lambda_{127,0} = -\frac{371}{2^2\,3} m,$$

$$\rho_{127,2} = -\frac{5}{2^3} m, \qquad \lambda_{127,2} = -\frac{5}{2^2} m,$$

$$\varpi_{128,0} = -\frac{53}{2^3\,3} m, \qquad \sigma_{128,0} = -\frac{53}{2^3\,3} m,$$

$$\varpi_{128,-2} = -\frac{169}{2^3} m, \qquad \sigma_{128,-2} = -\frac{169}{2^3} m,$$

$$\varpi_{129,0} = -\frac{53}{2^3\,3} m, \qquad \sigma_{129,0} = -\frac{53}{2^3\,3} m,$$

$$\varpi_{129,2} = -\frac{1}{2^3} m, \qquad \sigma_{129,2} = -\frac{1}{2^3} m,$$

$$\xi_{130,0} = -\frac{27}{2^2} m^2, \qquad \eta_{130,0} = -\frac{27}{2} m + \frac{27}{2} m^2,$$

$$\xi_{130,-2} = \frac{123}{2^2} m^2, \qquad \eta_{130,-2} = \frac{1323}{2^5} m^2,$$

$$\xi_{130,2} = -\frac{1}{2^2} m^2, \qquad \eta_{130,2} = \frac{11}{2^5} m^2;$$

$$\rho_{130,0} = -\frac{27}{2^2} m^2 + \frac{27}{2} m^3, \qquad \lambda_{130,0} = -\frac{27}{2} m + \frac{27}{2} m^2,$$

$$
\begin{array}{llll}
\rho_{130,-2} = -\dfrac{123}{2^2}\,m^2, & & \lambda_{130,-2} = \dfrac{1353}{2^6}\,m^2, \\[2ex]
\rho_{130,2} = \dfrac{1}{2^2}\,m^2, & & \lambda_{130,2} = \dfrac{11}{2^6}\,m^2, \\[2ex]
\xi_{131,0} = \dfrac{27}{2^3}\,m, & & \eta_{131,0} = -\dfrac{135}{2^2}\,m, \\[2ex]
\xi_{131,-2} = \dfrac{615}{2^3}\,m, & & \eta_{131,-2} = \dfrac{615}{2^2}\,m, \\[2ex]
\rho_{131,0} = -\dfrac{189}{2^3}\,m, & & \lambda_{131,0} = -\dfrac{189}{2^2}\,m, \\[2ex]
\rho_{131,-2} = -\dfrac{615}{2^3}\,m, & & \lambda_{131,-2} = \dfrac{615}{2^2}\,m, \\[2ex]
\xi_{132,0} = \dfrac{27}{2^3}\,m, & & \eta_{132,0} = -\dfrac{135}{2^2}\,m, \\[2ex]
\xi_{132,2} = -\dfrac{15}{2^3}\,m, & & \eta_{132,2} = \dfrac{15}{2^2}\,m, \\[2ex]
\rho_{132,0} = \dfrac{189}{2}\,m, & & \lambda_{132,0} = -\dfrac{189}{2^2}\,m, \\[2ex]
\rho_{132,2} = \dfrac{15}{2}\,m & & \lambda_{132,2} = \dfrac{15}{2^2}\,m, \\[2ex]
z_{133,0} = -\dfrac{27}{2^3}\,m, & & \sigma_{133,0} = -\dfrac{27}{2^3}\,m, \\[2ex]
z_{133,-2} = \dfrac{123}{2^3}\,m, & & \sigma_{133,-2} = \dfrac{123}{2^3}\,m, \\[2ex]
z_{134,0} = -\dfrac{27}{2^3}\,m, & & \sigma_{134,0} = -\dfrac{27}{2^3}\,m, \\[2ex]
z_{134,2} = \dfrac{3}{2^3}\,m, & & \sigma_{134,2} = \dfrac{3}{2^3}\,m,
\end{array}
$$

$$
\xi_{135,0} = 0\ m, \quad \eta_{135,0} = -\frac{77}{2^2}\,m, \quad \rho_{135,0} = -\frac{77}{2}\,m^2, \quad \lambda_{135,0} = -\frac{77}{2^2}\,m,
$$

$$
\xi_{136,0} = 0\ m, \quad \eta_{136,0} = -14\,m \quad \rho_{136,0} = -14\,m^2, \quad \lambda_{136,0} = -14\,m,
$$

$$
g_{137} = 0\ m, \qquad h_{137} = 0\ m
$$

140 Envisageons maintenant les inégalités du mouvement de la Lune qui dépendent de la parallaxe solaire, c'est-à-dire, d'une façon plus précise, du rapport α des parallaxes moyennes du Soleil et de la Lune En regardant ce rapport comme étant du second ordre, ainsi que nous l'avons déjà dit, nous devions considérer les monomes sui-

vants (et leurs conjugués), dont la notation est évidente

$$M_{200}=\alpha\beta',\quad M_{201}=\alpha\beta'\varepsilon_1,\quad M_{202}=\alpha\beta'\varepsilon_1^2,\quad M_{203}=\alpha\beta'\varepsilon_1\varepsilon_{-1},$$

$$M_{212}=\alpha\beta'\gamma_1,\quad M_{213}=\alpha\beta'\gamma_1\varepsilon_1,\quad M_{214}=\alpha\beta'\gamma_1\varepsilon_{-1},$$

$$M_{227}=\alpha\beta'\gamma_1^2,\quad M_{237}=\alpha\beta'\gamma_1\gamma_{-1},$$

$$M_{266}=\alpha\beta'\varepsilon'_1,\quad M_{267}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\varepsilon_1,\quad M_{268}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\varepsilon_{-1},\quad M_{269}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\varepsilon_1^2,\quad M_{270}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\varepsilon_1\varepsilon_{-1},\quad M_{271}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\varepsilon_{-1}^2,$$

$$M_{276}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_1,\quad M_{277}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_{-1},\quad M_{278}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_1\varepsilon_1,\quad M_{279}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_{-1}\varepsilon_{-1},\quad M_{280}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_1\varepsilon_{-1},\quad M_{281}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_{-1}\varepsilon_1,$$

$$M_{288}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_1^2,\quad M_{289}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_{-1}^2,\quad M_{294}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\gamma_1\gamma_{-1},$$

$$M_{301}=\alpha\beta'\varepsilon_1'^2,\quad M_{316}=\alpha\beta'\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1},\quad M_{330}=\alpha\beta'\varepsilon_1'^2\varepsilon'_{-1}$$

La fonction F doit être complétée ici par l'expression

$$\alpha\beta' m^2\left[\frac{5}{16}\rho'^4 e^{-3\lambda'}p^3\theta^3+\frac{5}{16}\rho'^4 e^{3\lambda'}q^3\theta^{-3}+\frac{3}{16}(\rho'^4 e^{-\lambda'}p\theta+\rho'^4 e^{\lambda'}q\theta^{-1})(pq+4z^2)\right]$$

On trouve ainsi

$$\xi_{200,1}=\frac{15}{2^6}m+\frac{33}{2^4}m^2+\frac{3255}{2^9}m^3,\qquad \eta_{200,1}=-\frac{15}{2^4}m-\frac{39}{2^3}m^2-\frac{8457}{2^9}m^3,$$

$$\xi_{200,3}=-\frac{25}{2^7}m^2-\frac{35}{2^7}m^3,\qquad \eta_{200,3}=\frac{15}{2^6}m^2+\frac{5}{2^9}m^3,$$

$$\rho_{200,1}=-\frac{15}{2^6}m-\frac{33}{2^4}m^2-\frac{3465}{2^9}m^3,\qquad \lambda_{200,1}=-\frac{15}{2^4}m-\frac{39}{2^3}m^2-\frac{4191}{2^8}m^3,$$

$$\rho_{200,3}=\frac{25}{2^7}m^2-\frac{215}{2^8}m^3,\qquad \lambda_{200,3}=\frac{15}{2^6}m^2-\frac{25}{2^5}m^3,$$

$$v=\quad-125''\sin D+1''\sin 3D,$$

$$\sin\varpi=\quad-1'',0\cos D,$$

l'inégalité de la longitude qui dépend de sin D, et dont on vient d'obtenir la partie principale, est connue sous le nom d'*équation parallactique*.

$$\xi_{201,1} = -\frac{15}{2^4} m - \frac{75}{2^4} m^2, \qquad \eta_{201,1} = -\frac{15}{2^5} m - \frac{105}{2^5} m^2,$$

$$\xi_{201,-1} = \frac{15}{2^4} m + \frac{585}{2^7} m^2, \qquad \eta_{201,-1} = \frac{165}{2^5} m + \frac{5805}{2^8} m^2,$$

$$\xi_{201,3} = -\frac{5}{2^6} m^2, \qquad \eta_{201,3} = \frac{35}{2^7} m^2,$$

$$\xi_{201,-3} = \frac{265}{2^7} m^2, \qquad \eta_{201,-3} = \frac{1595}{2^8} m^2,$$

$$\rho_{201,1} = -\frac{15}{2^3} m - \frac{147}{2^4} m^2, \qquad \lambda_{201,1} = -\frac{75}{2^5} m - \frac{393}{2^5} m^2,$$

$$\rho_{201,-1} = \frac{45}{2^4} m^2 + \frac{1215}{2^7} m^3, \qquad \lambda_{201,-1} = \frac{165}{2^5} m + \frac{5997}{2^8} m^2,$$

$$\rho_{201,3} = \frac{15}{2^4} m^2, \qquad \lambda_{201,3} = \frac{115}{2^7} m^2,$$

$$\rho_{201,-3} = -\frac{475}{2^6} m^2, \qquad \lambda_{201,-3} = \frac{2535}{2^8} m^2,$$

$$\nu = -9'' \sin(G+D) + 19'' \sin(G-D) + 3'' \sin(G-3D),$$

$$s \sin \varpi = -0'',1 \cos(G+D)$$

$$\xi_{202,1} = -\frac{135}{2^6} m, \quad \eta_{202,1} = -\frac{105}{2^6} m, \quad \rho_{202,1} = -\frac{405}{2^6} m, \quad \lambda_{202,1} = -\frac{195}{2^5} m,$$

$$\xi_{202,-1} = \frac{285}{2^6} m, \quad \eta_{202,-1} = \frac{555}{2^6} m, \quad \rho_{202,-1} = \frac{435}{2^6} m, \quad \lambda_{202,-1} = \frac{435}{2^5} m,$$

$$\xi_{202,-3} = \frac{175}{2^5} m, \quad \eta_{202,-3} = \frac{175}{2^4} m, \quad \rho_{202,-3} = -\frac{175}{2^5} m, \quad \lambda_{202,-3} = \frac{175}{2^4} m;$$

$$\nu = -1'' \sin(2G+D) + 2'' \sin(2G-D) + 1'' \sin(2G-3D)$$

$$\xi_{203,1} = -\frac{15}{2^3} m, \quad \eta_{203,1} = -\frac{15}{2} m, \quad \rho_{203,1} = -\frac{105}{2^4} m, \quad \lambda_{203,1} = -\frac{105}{2^3} m,$$

$$\nu = -2'' \sin D$$

$$z_{212,1} = -\frac{15}{2^5} m - \frac{35}{2^4} m^2, \qquad \sigma_{212,1} = -\frac{15}{2^4} m - \frac{17}{2^2} m^2,$$

$$z_{212,-1} = \frac{45}{2^5} m + \frac{1065}{2^8} m^2, \qquad \sigma_{212,-1} = \frac{15}{2^4} m + \frac{291}{2^7} m^2,$$

$$z_{212,3} = \frac{5}{2^7} m^2, \qquad \sigma_{212,3} = \frac{15}{2^6} m^2,$$

$$z_{212,-3} = \frac{95}{2^8} m^2, \qquad \sigma_{212,-3} = \frac{95}{2^7} m^2,$$

$$s = -5'' \sin(H+D) + 5'' \sin(H-D)$$

$$z_{213,1} = -\frac{45}{2^6}m, \qquad \sigma_{213,1} = -\frac{135}{2^5}m,$$

$$z_{213,-1} = \frac{15}{2^5}m, \qquad \sigma_{213,-1} = \frac{45}{2^6}m,$$

$$z_{213,-3} = \frac{25}{2^4}m, \qquad \sigma_{213,-3} = \frac{25}{2^4}m,$$

$$s = -1''\sin(H+G+D)$$

$$z_{214,1} = \frac{15}{2^6}m, \qquad \sigma_{214,1} = \frac{45}{2^6}m,$$

$$z_{214,-1} = \frac{165}{2^5}m, \qquad \sigma_{214,-1} = \frac{195}{2^5}m,$$

$$s = +1''\sin(H-G-D)$$

$$\xi_{227,1} = -\frac{15}{2^6}m, \quad \eta_{227,1} = \frac{15}{2^6}m, \quad \rho_{227,1} = 0\,m, \quad \lambda_{227,1} = \frac{15}{2^4}m,$$

$$\xi_{227,-1} = -\frac{135}{2^6}m, \quad \eta_{227,-1} = \frac{315}{2^6}m, \quad \rho_{227,-1} = \frac{45}{2^4}m, \quad \lambda_{227,-1} = \frac{75}{2^4}m,$$

$$\rho = +1''\sin(2H-D)$$

$$\xi_{237,1} = -\frac{45}{2^3}m, \quad \eta_{237,1} = \frac{45}{2^2}m, \quad \rho_{237,1} = \frac{165}{2^6}m, \quad \lambda_{237,1} = \frac{165}{2^4}m,$$

$$\rho = +3''\sin D$$

$$\xi_{266,1} = -\frac{5}{2^2} + \frac{45}{2^3}m - \frac{2391}{2^6}m^2, \qquad \eta_{266,1} = \frac{3}{2} - \frac{45}{2^2}m + \frac{1269}{2^4}m^2,$$

$$\xi_{266,-1} = -\frac{15}{2^4}m + \frac{827}{2^6}m^2, \qquad \eta_{266,-1} = -\frac{15}{2^3}m + \frac{1867}{2^6}m^2,$$

$$\xi_{266,3} = \frac{25}{2^5}m^2, \qquad \eta_{266,3} = \frac{5}{2^6}m^2,$$

$$\xi_{266,-3} = -\frac{125}{2^6}m^2, \qquad \eta_{266,-3} = -\frac{75}{2^8}m^2,$$

$$\rho_{266,1} = \frac{5}{2^2} - \frac{45}{2^3}m + \frac{2571}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{266,1} = \frac{5}{2} - \frac{45}{2^2}m + \frac{2583}{2^6}m^2,$$

$$\rho_{266,-1} = \frac{15}{2^4}m - \frac{1037}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{266,-1} = -\frac{15}{2^3}m + \frac{991}{2^6}m^2,$$

$$\rho_{266,3} = \frac{35}{2^4}m^2, \qquad \lambda_{266,3} = \frac{35}{2^4}m^2,$$

$$\rho_{266,-3} = \frac{125}{2^6}m^2, \qquad \lambda_{266,-3} = -\frac{75}{2^6}m^2,$$

$$\rho = +18''\sin(G'+D) + 1''\sin(G'-D),$$

$$\sin\varpi = +0'',1\cos(G'+D)$$

$$\xi_{267,1} = \frac{5}{2} - \frac{45}{2^2} m, \qquad \eta_{267,1} = \frac{5}{2^2} - \frac{45}{2^3} m,$$

$$\xi_{267,-1} = -\frac{105}{2^4} m, \qquad \eta_{267,-1} = \frac{45}{2^3} m,$$

$$\rho_{267,1} = 5 - \frac{45}{2} m + \frac{5357}{2^9} m^2, \qquad \lambda_{267,1} = \frac{25}{2^2} - \frac{225}{2^3} m,$$

$$\rho_{267,-1} = -\frac{15}{2^3} m^2, \qquad \lambda_{267,-1} = \frac{45}{2^5} m,$$

$$v = \quad + 1'' \sin (G' + G + D)$$

$$\xi_{268,1} = -\frac{5}{2} + \frac{45}{2^2} m, \qquad \eta_{268,1} = \frac{25}{2^2} - \frac{495}{2^3} m,$$

$$\xi_{268,-1} = \frac{15}{2^3} m, \qquad \eta_{268,-1} = -\frac{15}{2^4} m,$$

$$\xi_{268,3} = \frac{75}{2^4} m, \qquad \eta_{268,3} = \frac{75}{2^5} m,$$

$$\rho_{268,1} = \frac{15}{2^3} m^2 - \frac{735}{2^6} m^3, \qquad \lambda_{268,1} = \frac{25}{2^2} - \frac{495}{2^3} m,$$

$$\rho_{268,-1} = \frac{15}{2^2} m, \qquad \lambda_{268,-1} = -\frac{75}{2^4} m,$$

$$\rho_{268,3} = \frac{75}{2^3} m, \qquad \lambda_{268,3} = \frac{375}{2^9} m,$$

$$v = \quad + 1'' \sin (G' - G + D),$$

l'argument $G' - G + D$ étant à très longue période, c'est à l'aide de l'équation (A′) qu'on a calculé $\rho_{268,1}$

$$\xi_{269,1} = \frac{45}{2^3}, \qquad \eta_{269,1} = \frac{35}{2^3}, \qquad \rho_{269,1} = \frac{135}{2^3}, \qquad \lambda_{269,1} = \frac{65}{2^2},$$

$$\xi_{270,1} = -\frac{15}{2}, \qquad \eta_{270,1} = \frac{45}{2}, \qquad \rho_{270,1} = 15, \qquad \lambda_{270,1} = 30,$$

$$v = \quad + 1'' \sin (G' + D),$$

$$\xi_{271,1} = -\frac{15}{2^3}, \qquad \eta_{271,1} = \frac{165}{2^3}, \qquad \rho_{271,1} = -\frac{105}{2^3}, \qquad \lambda_{271,1} = \frac{105}{2^2}$$

$$z_{276,1} = \frac{5}{2^2} - \frac{45}{2^3} m + \frac{5315}{2^7} m^2, \qquad \sigma_{276,1} = \frac{5}{2} - \frac{45}{2^2} m + \frac{5251}{2^7} m^2,$$

$$z_{276,-1} = -\frac{45}{2^3} m, \qquad \sigma_{276,-1} = -\frac{15}{2^4} m,$$

$$s = \quad + 1'' \sin (G' + H + D)$$

on trouve d'abord

$$\rho_{400,0} = \frac{75}{2^7} m^3 + \left(\frac{3}{2^4} m^2 - \frac{3}{2^3} m^3\right) \kappa,$$

$$\rho_{400,2} = \frac{225}{2^9} m^2 + \frac{5}{2^4} m^2 \kappa,$$

$$\rho_{401,-2} = \frac{105}{2^6} m \kappa, \qquad \xi_{401,-2} = -\frac{105}{2^6} m \kappa, \qquad \zeta_{401,-2} = -\frac{105}{2^6} m \kappa,$$

$$\varpi_{412,-2} = -\frac{45}{2^6} m \kappa,$$

et l'on en deduit

$$g_{400} = -\frac{1125}{2^9} m^3 + \left(-\frac{45}{2^5} m^2 - \frac{1395}{2^7} m^3\right) \kappa,$$

$$h_{400} = \frac{2475}{2^9} m^3 + \left(\frac{45}{2^5} m^2 - \frac{315}{2^7} m^3\right) \kappa,$$

de soite que

$$n g'_{400} (\alpha \beta')^2 = n \left[\frac{1125}{2^9} m^3 + \left(\frac{45}{2^5} m^2 + \frac{1215}{2^7} m^3\right) \kappa \right] (\alpha \beta')^2 = 2'',$$

$$n h'_{400} (\alpha \beta')^2 = n \left[-\frac{2475}{2^9} m^3 + \left(-\frac{45}{2^5} m^2 + \frac{495}{2^7} m^3\right) \kappa \right] (\alpha \beta')^2 = -1''$$

CHAPITRE XXIII.

RETOUR A LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES ÉLÉMENTS

141. En exécutant les calculs décrits dans les Chapitres précédents et en examinant les résultats avec quelque attention, on est nécessairement frappé de certaines particularités que l'on est tenté de transformer en règles générales, et que l'on peut en effet justifier *a priori*.

Reprenons le problème sous la forme du mouvement d'un point matériel de masse égale à l'unité, avec la fonction de forces

$$U = \frac{f(M_0 + M)}{r} + V,$$

la fonction perturbatrice V étant définie au n° 120, et correspondant à la théorie solaire du mouvement de la Lune.

Si l'on néglige V, on a un mouvement keplérien, aux éléments n_0, a_0, l_0, $\varepsilon_0 = \sin\varphi_0$, ϖ_0, J_0, θ_0, suivant nos notations habituelles, on a d'ailleurs $n_0^2 a_0^3 = f(M_0 + M)$, et pour simplifier l'écriture, nous supposerons que les unités de temps et de distance sont choisies de façon que l'on ait $f(M_0 + M) = 1$, les nombres n_0 et a_0 étant eux-mêmes très voisins de l'unité.

En appelant n, a, l, $\varepsilon = \sin\varphi$, , les éléments variables de l'orbite keplérienne osculatrice à chaque instant au mouvement réel, on peut, comme au n° 93, leur substituer les nouveaux éléments

$$\Lambda = \sqrt{a}, \qquad B_1 = \sqrt{2\Lambda}\sin\frac{\varphi}{2}e^{-i\varpi}, \qquad C_1 = \sqrt{2\Lambda\cos\varphi}\,\sin\frac{J}{2}e^{-i\theta},$$

$$L = il, \qquad B_2 = \sqrt{2\Lambda}\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\varpi}, \qquad C_2 = \sqrt{2\Lambda\cos\varphi}\,\sin\frac{J}{2}e^{i\theta},$$

on a alors

$$n = \frac{1}{\Lambda^3},$$

et en faisant encore

$$\tau = \iota t,$$

les équations du mouvement prennent la forme simple

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial L}, \qquad \frac{dL}{d\tau} = n - \frac{\partial V}{\partial \Lambda},$$

$$\frac{dB_2}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial B_1}, \qquad \frac{dB_1}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial B_2},$$

$$\frac{dC_2}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial C_1}, \qquad \frac{dC_1}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial C_2}.$$

Soit encore

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = n \qquad L = \lambda + \mu,$$

et désignons généralement les six variables Λ, μ, B_2, B_1, C_2, C_1 par x_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). On a plus simplement, comme au n° 97,

$$\frac{dx_j}{d\tau} = \Sigma \alpha_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \qquad \frac{d\lambda}{d\tau} = n = \frac{1}{\Lambda^3},$$

avec

$$\alpha_{12} = \alpha_{34} = \alpha_{56} = -\alpha_{21} = -\alpha_{43} = -\alpha_{65} = 1,$$

tous les autres coefficients α_{jk} étant nuls.

La fonction V contient en facteur la petite quantité n'^2, puisque l'on a $fM' = n'^2 a'^3$, et l'on peut ajouter qu'elle se compose de groupes de termes ordonnés suivant les puissances entières non négatives de la très petite quantité $\frac{1}{a'}$, mais nous ne tiendrons pas compte de cette particularité pour l'instant. De plus, si l'on appelle l' la longitude moyenne du Soleil, et que l'on fasse $L' = \iota l'$, la fonction V apparaît comme étant de la forme

$$\Sigma n'^2 C e^{\iota(sl + s'l')},$$

s et s' sont des entiers quelconques, les coefficients C dépendent de Λ, B_1, B_2, C_1, C_2, ainsi que de l'excentricité ε' et de la longitude du périgée ϖ' de l'orbite du Soleil, en même temps que de $\frac{1}{a'}$, et des paramètres β', β'', ..., il serait d'ailleurs aisé de préciser davantage la forme de ces coefficients, mais il est inutile de le faire explicitement, afin d'éviter une plus grande complication.

On peut intégrer les équations précédentes par approximations successives, comme nous avons fait aux n°s 94 et 97. Pour abréger

l'écriture, supprimons les indices o qui affectent les valeurs initiales des inconnues, et représentons celles-ci par $A + \delta A + \delta^2 A + \ldots$, $\lambda + \delta\lambda + \delta^2\lambda + \ldots$, $\mu + \delta\mu + \delta^2\mu + \ldots$, en mettant en évidence leurs parties fournies par les approximations successives. $A, \mu, B_1, B_2, \ldots$ sont des constantes, et l'on a $\lambda = n\tau$, de sorte que $L = n\tau + \mu$.

Dans l'expression de la fonction V, nous supposons aussi que les inconnues reçoivent ces valeurs de première approximation, ce qui ne change pas sa forme.

Pour déterminer en premier lieu les quantités δA, $\delta\lambda$, ..., on a les équations générales

$$\frac{d(\delta x_j)}{d\tau} = \Sigma \alpha_{jh}\frac{\partial V}{\partial x_h}, \qquad \frac{d(\delta\lambda)}{d\tau} = \frac{\partial n}{\partial A}\delta A,$$

les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_h}$ sont de la même forme générale que V, $\frac{\partial V}{\partial \mu}$ ne différant pas d'ailleurs de $\frac{\partial V}{\partial L}$. Distinguons alors leurs divers termes de la façon suivante : les produits tels que $Ce^{sl+s'l'}$ seront désignés par P si l'on a $s \neq 0$, par Q si l'on a $s = 0$, $s' \neq 0$, par S si l'on a simultanément $s = 0$, $s' = 0$. L'intégration d'un terme P donne $\frac{C}{sn+s'n'}e^{sl+s'l'}$; on peut développer l'inverse du diviseur $sn + s'n'$ suivant les puissances de la petite quantité n', et en convenant d'appeler toujours C non pas seulement les quantités définies il y a un instant sous ce nom, mais encore des quantités analogues développées suivant les puissances entières non négatives de n', et ne s'annulant pas avec n', on voit que l'intégration d'un terme P conduit à un terme de même nature. L'intégration d'un terme Q donne $\frac{C}{s'n'}e^{s'l'}$, c'est-à-dire un terme de la forme $\frac{Q}{n'}$; enfin, l'intégration d'un terme S donne un terme séculaire τS. Il est entendu d'ailleurs que toutes les quadratures sont effectuées sans addition de constantes superflues.

Il résulte de ces considérations que les quantités δx_j sont de la forme

$$n'^2 P + n' Q + n'^2 \tau S,$$

en employant une notation symbolique de signification immédiate. Mais le cas de δx_1 ou δA demande une attention spéciale : on a en effet

$$\frac{d(\delta A)}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial L},$$

et comme la dérivée $\frac{\partial V}{\partial L}$ ne peut évidemment contenir que des termes $n'^2 P$, il en est de même de δA, et aussi de $\delta\lambda$, par suite.

On a maintenant

$$\frac{d(\delta^2 x_j)}{d\tau} = \Sigma \alpha_{jk} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial L} \delta\lambda + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} \delta x_m \right),$$

les indices autres que j prenant toutes les valeurs possibles, d'où, en général,

$$\delta^2 x_j = (n'^3 + n'^4 \tau) P + (n'^2 + n'^3 \tau) Q + (n'^3 \tau + n'^4 \tau^2) S,$$

ainsi que le montre la composition du second membre de la formule précédente.

Plus particulièrement, on a

$$\frac{d(\delta^2 A)}{d\tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} \delta\lambda + \sum \frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_j} \delta x_j,$$

et comme les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial L^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_j}$ ne contiennent que des termes $n'^2 P$, il vient

$$\delta^2 A = (n'^3 + n'^4 \tau) P + n'^3 Q + n'^4 \tau S.$$

En continuant de la même façon, on aurait généralement

$$\begin{aligned} \delta^3 x_j = & \ (n'^4 + n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) P \\ & + (n'^3 + n'^4 \tau + n'^5 \tau^2) Q \\ & + (n'^4 \tau + n'^5 \tau^2 + n'^6 \tau^3) S, \end{aligned}$$

et spécialement

$$\delta^3 A = (n'^4 + n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) P + (n'^4 + n'^5 \tau) Q + (n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) S,$$

et ainsi de suite, la loi de formation étant en évidence.

Ces résultats sont ceux qui correspondent, dans le problème actuel, à ceux du n° 94, relatifs aux inégalités séculaires en général. Nous devons par suite prévoir que la forme des inégalités $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, doit encore se réduire d'une façon correspondant au théorème de Poisson, démontré au n° 97. Examinons donc de plus près ces quantités.

On peut écrire

$$\frac{d(\delta^2 A)}{d\tau} = \frac{\partial n}{\partial A} \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} \int\int \frac{\partial V}{\partial L} d\tau^2 + \Sigma \alpha_{jk} \frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_j} \int \frac{\partial V}{\partial x_k} d\tau,$$

et en raisonnant comme au n° 97, on voit que le second membre de cette formule ne saurait contenir aucun terme constant, et aussi que les termes $n'^4 Q$ qui y figurent naturellement acquièrent un nouveau facteur n'. Donc, on a simplement

$$\delta^2 A = (n'^3 + n'^4\tau) P + n'^4 Q,$$

et par suite

$$\delta^2 \lambda = (n'^3 + n'^4\tau) P + n'^3 Q + n'^4 \tau S$$

Allant plus loin, on a de même

$$\frac{d(\delta^3 A)}{d\tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial L^2}\delta^2\lambda + \sum \frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_j}\delta^2 x_j + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 V}{\partial L^3}(\delta\lambda)^2 + \sum \frac{\partial^3 V}{\partial L^2 \partial x_j}\delta\lambda\,\delta x_j$$
$$+ \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^3 V}{\partial L\,\partial x_j \partial x_m}\delta x_j\,\delta x_m$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial A^2}\frac{\partial^2 V}{\partial L^2}\int \left[\int \frac{\partial V}{\partial L} d\tau\right]^2 d\tau$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial n}{\partial \Lambda}\right)^2 \left[2\frac{\partial^2 V}{\partial L^2}\int\int\int \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} d\tau^2 \int\int \frac{\partial V}{\partial L} d\tau^2 + \frac{\partial^3 V}{\partial L^3}\left(\int\int \frac{\partial V}{\partial L} d\tau^2\right)^2\right]$$
$$+ \frac{\partial n}{\partial A}\Sigma\alpha_{jk}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial L^2}\int\int\int \frac{\partial^2 V}{\partial L\,\partial x_j} d\tau^2 \int \frac{\partial V}{\partial x_k} d\tau\right.$$
$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_j}\int \frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_k} d\tau \int\int \frac{\partial V}{\partial L} d\tau^2$$
$$\left. + \frac{\partial^3 V}{\partial L^2 \partial x_j}\int\int \frac{\partial V}{\partial L} d\tau^2 \times \int \frac{\partial V}{\partial x_j} d\tau\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\Sigma\alpha_{jl}\,\alpha_{mn}\left[2\frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_j}\int \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} d\tau \int \frac{\partial V}{\partial x_n} d\tau\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 V}{\partial L\,\partial x_j \partial x_m}\int \frac{\partial V}{\partial x_k} d\tau \times \int \frac{\partial V}{\partial x_n} d\tau\right],$$

et l'on peut encore écrire cette dernière ligne sous la forme suivante, en échangeant d'abord les indices j et k dans le premier terme, et permutant ensuite simultanément j et m, k et n,

$$\frac{1}{2}\Sigma\alpha_{jk}\alpha_{mn}\left[\frac{\partial^3 V}{\partial L\,\partial x_j \partial x_m}\int \frac{\partial V}{\partial x_k} d\tau \times \int \frac{\partial V}{\partial x_n} d\tau\right.$$
$$- \frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_k}\int \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_m} d\tau \int \frac{\partial V}{\partial x_n} d\tau$$
$$\left. - \frac{\partial^2 V}{\partial L \partial x_n}\int \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_m} d\tau \int \frac{\partial V}{\partial x_k} d\tau\right]$$

Il est facile alors, avec un peu d'attention, et en profitant des

résultats déjà acquis, d'analyser la forme des différents termes de cette expression, en raisonnant encore comme au n° 97 quand il s'agit des termes qui proviennent, dans la troisième ligne, de la partie $(n'^2 Q + n'^2 S)$ de $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, et dans la quatrième des parties analogues de $\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial x_n}$, on constate que la dérivée $\frac{d(\delta^3 A)}{d\tau}$ est de la forme

$$(n'^4 + n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) P + (n'^6 + n'^7 \tau) Q + n'^6 S,$$

par suite, on a

$$\begin{aligned}
\delta^3 A &= (n'^4 + n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) P + (n'^5 + n'^6 \tau) Q + n'^6 \tau S, \\
\delta^3 \lambda &= (n'^4 + n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) P + (n'^4 + n'^5 \tau) Q + (n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) S
\end{aligned}$$

La loi que nous cherchions est suffisamment mise en évidence, sans qu'il soit nécessaire de continuer dans la même voie

Envisageons encore une quantité variable A′ définie par l'équation

$$\frac{dA'}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial L'},$$

la fonction V étant ici exprimée sous sa première forme, c'est-à-dire que A, L, B_1, B_2, ... reçoivent leurs valeurs variables complètes. En supposant arbitraire la valeur initiale de A′, et désignant par A′ cette valeur même, on peut remplacer la valeur générale de A′ par $A' + \delta A' + \delta^2 A' + \dots$, on a alors successivement

$$\frac{d(\delta A')}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial L'}, \qquad \frac{d(\delta^2 A')}{d\tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial L \, \partial L'} \delta\lambda + \sum \frac{\partial^2 V}{\partial L' \, \partial x_i} \delta x_i, \qquad \dots,$$

la fonction V étant maintenant exprimée à l'aide des valeurs initiales de A, L, B_1, ...

La dérivée $\frac{\partial V}{\partial L'}$ ne peut contenir aucun terme constant, et par suite $\delta A'$ est de la forme $n'^2 P + n' Q$ De même $\delta^2 A'$ apparaît immédiatement sous la forme

$$(n'^3 + n'^4 \tau) P + (n'^2 + n'^3 \tau) Q + n'^3 \tau S,$$

mais d'après le théorème de Poisson, et en se reportant au n° 97, on voit que les termes séculaires τS ne sauraient exister, donc

$$\delta^2 A' = (n'^3 + n'^4 \tau) P + (n'^2 + n'^3 \tau) Q,$$

en poursuivant plus loin, on a de même

$$\delta^3 A' = (n'^4 + n'^5 \tau + n'^6 \tau^2) P + (n'^3 + n'^4 \tau + n'^6 \tau^2) Q + n'^4 \tau S,$$

les termes séculaires $\tau^2 S$ ne pouvant exister, et ainsi de suite.

142. Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent se transporter immédiatement aux perturbations des différentes coordonnées elles-mêmes, qui sont des fonctions des éléments. Toutefois, il faut avoir soin de prendre la précaution que nous allons indiquer.

Soit f une coordonnée quelconque dont l'expression en fonction des éléments se développe suivant les puissances de e^{I}, et, s'il s'agit de la longitude vraie ou dans l'orbite, comprend en outre le terme L, on a donc

$$f = \Sigma f_q e^{q\mathrm{I}} + (\mathrm{L}),$$

la parenthèse indiquant la présence éventuelle de L. Les f_q sont des fonctions des éléments autres que L, en remplaçant tous les éléments par leurs valeurs nouvelles, désignées par $A^0 + \Delta A$, $L^0 + \Delta L$, ..., afin d'éviter toute ambiguïté, on peut mettre $f_q e^{q\mathrm{I}}$ sous la forme $(f_q^0 + f_q')e^{q\mathrm{I}_0}$, le sens de f_q^0 étant clair par lui-même. La perturbation de f sera donc, en effaçant maintenant l'indice supérieur o, comme nous avons déjà fait plus haut,

$$\Delta f = \Sigma f'_q e^{q\mathrm{I}} + (\Delta \mathrm{L}),$$

et c'est aux coefficients f'_q que se transportent immédiatement les résultats obtenus précédemment pour les perturbations des divers éléments ; en particulier, tout ce qui est relatif aux termes séculaires et aux termes Q subsiste.

La parallaxe $\frac{1}{r}$ jouit de propriétés spéciales, qu'il faut mettre en évidence. Appelons, comme au n° **121**, X, Y, Z les coordonnées rectilignes de la Lune par rapport aux axes TX, TY, TZ, d'après la relation $f(M_0 + M) = 1$, les équations directes du mouvement sont

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{r} + V\right) = 0,$$

Une combinaison évidente donne l'équation de Laplace sous la

forme

$$\frac{dX^2}{d\tau^2}+\frac{dY^2}{d\tau^2}+\frac{dZ^2}{d\tau^2}+X\frac{d^2X}{d\tau^2}+Y\frac{d^2Y}{d\tau^2}+Z\frac{d^2Z}{d\tau^2}$$
$$+\frac{1}{r}+X\frac{\partial V}{\partial X}+Y\frac{\partial V}{\partial Y}+Z\frac{\partial V}{\partial Z}+2\int\left(\frac{\partial V}{\partial X}dX+\frac{\partial V}{\partial Y}dY+\frac{\partial V}{\partial Z}dZ\right)=0,$$

la première ligne n'étant autre chose que $\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{d\tau^2}$

Reportons-nous à l'expression de V qui peut s'ordonner, nous l'avons déjà dit, suivant les puissances de $\frac{1}{a'}$, la partie indépendante de $\frac{1}{a'}$, est homogène et du second degré par rapport à X, Y, Z, nous pouvons donc poser

$$X\frac{\partial V}{\partial X}+Y\frac{\partial V}{\partial Y}+Z\frac{\partial V}{\partial Z}=2V+W,$$

W étant une fonction facile à écrire plus explicitement, qui contient $\frac{1}{a'}$ en facteur

V est une fonction de X, Y, Z, τ, le temps n'y entrant explicitement que par l'intermédiaire des coordonnées du Soleil, par suite

$$V=\int\left(\frac{\partial V}{\partial X}dX+\frac{\partial V}{\partial Y}dY+\frac{\partial V}{\partial Z}dZ\right)+\int\frac{\partial V}{\partial\tau}d\tau,$$

et l'on peut mettre l'équation de Laplace sous la forme

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{d\tau^2}+W+4\int\left(\frac{\partial V}{\partial X}dX+\frac{\partial V}{\partial Y}dY+\frac{\partial Y}{\partial Z}dZ\right)+2\int\frac{\partial V}{\partial\tau}d\tau=0$$

Mais on a, d'après les équations qui définissent A, L, B_1, B_2, ,

$$\frac{\partial V}{\partial X}dX+\frac{\partial V}{\partial Y}dY+\frac{\partial V}{\partial Z}dZ=\frac{\partial V}{\partial A}dA+\frac{\partial V}{\partial L}dL+\frac{\partial V}{\partial B_1}dB_1+$$
$$=n\frac{\partial V}{\partial L}d\tau=n\,dA=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{a}\right),$$

d'autre part, comme les coordonnées du Soleil ne contiennent le temps que par l'intermédiaire de L', on a

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}d\tau=n'\frac{\partial V}{\partial L'}d\tau=n'dA,$$

de sorte que, finalement, l'equation de Laplace devient

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} + W - \frac{2}{a} + 2n'A' = 0,$$

la constante provenant des quadratures est incluse dans A', si l'on veut.

D'après la forme générale des coordonnées, les termes séculaires et les termes Q contenus dans r^2 sont de la forme

$$(n' + n'^3\tau + n'^5\tau^2 + \dots)Q + (n'^2\tau + n'^4\tau^2 + n'^6\tau^3 + \dots)S,$$

et, par suite, les termes correspondants de $\frac{d^2(r^2)}{d\tau^2}$ sont

$$(n'^3 + n'^5\tau + n'^7\tau^2 + \dots)Q + (n'^6\tau + \dots)S,$$

dans $\frac{1}{a}$, qui jouit des mêmes propriétés que A, on a de même

$$(n'^4 + n'^6\tau + \dots)Q + (n'^6\tau + \dots)S,$$

et dans $n'A'$, les termes de même espèce sont

$$(n'^2 + n'^4\tau + \dots)Q + (n'^5\tau + \dots)S,$$

enfin la fonction W, qui dépend des coordonnées de la Lune et du Soleil, et qui contient en facteur $\frac{n'^2}{a'}$, donnera des termes

$$\frac{1}{a'}(n'^2 + n'^4\tau + \dots)Q + \frac{1}{a'}(n'^4\tau + \dots)S$$

D'après l'équation de Laplace, on voit donc que la parallaxe $\frac{1}{r}$ ne contiendra des termes Q ou des termes séculaires que sous la forme plus particulière

$$(n'^2 + n'^4\tau + \dots)Q + \left[\left(\frac{n'^4}{a'} + n'^6\right)\tau + \dots\right]S,$$

et il serait bien facile de préciser davantage la provenance de leurs parties principales.

143. Afin de pouvoir comparer utilement les résultats des Chapitres précédents avec ceux que nous venons d'obtenir par l'application de ce procédé d'approximations successives que fournit immé-

diatement la méthode de la variation des éléments, il convient d'amorcer au moins le développement explicite de la solution que donnerait cette méthode, en suivant les principes généraux du Livre III

Reprenons toutes les notations du Chapitre XIII, de sorte qu'en particulier

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\varpi}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} e^{i\varpi}, \qquad \varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon'}{2} e^{-i\varpi'}, \qquad \varepsilon'_2 = \frac{\varepsilon'}{2} e^{i\varpi'},$$

$$\lambda = e^{il}, \qquad \lambda' = e^{il'}, \qquad \gamma = 2 \sin \frac{J}{2}, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta},$$

et comme ici $J' = 0$, on a de plus

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\gamma_1 \gamma_2, \qquad \sigma'_1 = \gamma_1^2, \qquad \sigma'_2 = \gamma_2^2$$

Le développement donné dans ce Chapitre pour la fonction R_0, multipliée par fM', ou $n'^2 a'^3$, convient encore ici pour la fonction perturbatrice V, à la condition suivante, évidente d'après le n° 5 dans les quantités $\frac{b_n^p}{\sqrt{aa'}}$ qui sont, au facteur $\frac{1}{a'}$ près, des fonctions du rapport $\frac{a}{a'}$, on laissera de côté les termes qui ne sont pas au moins du second degré par rapport à $\frac{a}{a'}$, et l'on multipliera $\frac{a^3}{a'^3}$, $\frac{a^4}{a'^4}$, respectivement par les facteurs β', β'', du n° 120 On a donc ici, en négligeant les termes en β', β'', , sauf quelques-uns

$$\frac{a' b_0^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{a'^2} + \frac{9}{64} \beta'' \frac{a^4}{a'^4} + \quad , \qquad \frac{a' b_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{3}{16} \beta' \frac{a^3}{a'^3} + \quad , \qquad \frac{a' b_2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{3}{8} \frac{a^2}{a'^2} +$$

$$\frac{a' b_3^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{5}{16} \beta' \frac{a^3}{a'^3} + \quad ,$$

$$\frac{a' b_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{9}{4} \beta' \frac{a^3}{a'^3} + \quad , \qquad \frac{a' b_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{3}{2} \frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{16} \beta'' \frac{a^4}{a'^4} + \quad , \qquad \frac{a' b_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{15}{8} \beta' \frac{a^3}{a'^3} + \quad ,$$

$$\frac{a' b_0^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{a^2}{a'^2} + \quad , \qquad \frac{a' b_1^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \frac{5}{2} \beta' \frac{a^3}{a'^3} + \quad , \qquad \frac{a' b_0^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{aa'}} = \beta' \frac{a^3}{a'^3} +$$

La fonction V sera de la forme générale

$$2 n'^2 a^2 \Sigma A \left(\frac{a}{a'}\right)^q \lambda^s \lambda'^{s'} \varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_2^{p_2} \gamma_1^{q_1} \gamma_2^{q_2} \varepsilon_1'^{p'_1} \varepsilon_2'^{p'_2},$$

les exposants étant des entiers non négatifs, sauf s et s' qui sont des entiers quelconques, A est un coefficient purement numérique, mul-

tiplie par β', β'', si $q = 1, 2$. On sait d'ailleurs que l'on a

$$s + s' - p_1 + p_2 - r_1 + r_2 - p'_1 + p'_2 = 0,$$

et que la différence $r_1 - r_2$ est paire.

Mais d'autres particularités sont à signaler. L'expression de $\cos H$ est linéaire et homogène par rapport à e^{iv}, e^{-iv} d'une part, et par rapport à $e^{iv'}$, $e^{-iv'}$ d'autre part, en appelant v, v' la longitude de la Lune dans son orbite, et la longitude du Soleil. D'après la façon dont $\cos H$ figure dans V, il est donc clair que les quantités $s - p_1 + p_2$, $s' - p'_1 + p'_2$, prises en valeur absolue, sont au plus égales à $q + 2$, et toujours de même parité que ce nombre.

Il y a plus : dans le cas particulier où l'on a $s' = 0$, la quantité $s' - p'_1 + p'_2$, c'est-à-dire la différence $p'_2 - p'_1$, prise en valeur absolue, ne saurait dépasser q. Pour s'en assurer, il suffit de faire l'observation suivante : les termes pour lesquels $|s' - p'_1 + p'_2|$ atteint en général sa limite supérieure $q + 2$, sont ceux qui proviennent du développement des fonctions

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{q+3} e^{\pm i(q+2)v'},$$

et si l'on suppose en outre $s' = 0$, il faut prendre seulement la partie constante de ces fonctions ; or, d'après le n° 81, la partie constante de $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{q+3} e^{i(q+2)v'}$ est égale, avec les notations de ce numéro, à

$$e^{i(q+2)\varpi'}\,\alpha^{-q-2}\,K^{-2,\,q+2,\,0}_{q},$$

et par conséquent est nulle, d'après la définition des $K^{p,q}_{n}$.

Écrivons explicitement la partie séculaire de V, soit (n° 91)

$$V_0 = 2n'^2 a^2 \Sigma S,$$

avec

$$\begin{aligned}
\Sigma S = {} & \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{3}{4}\gamma_1\gamma_2 + \frac{3}{4}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 - \frac{9}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma_1\gamma_2 + \frac{3}{4}\gamma_1^2\gamma_2^2 \\
& + \frac{9}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon'_1\varepsilon'_2 - \frac{9}{2}\gamma_1\gamma_2\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + \frac{15}{4}\varepsilon'^2_1\varepsilon'^2_2 + \frac{15}{4}(\varepsilon_1^2\gamma_2^2 + \varepsilon_2^2\gamma_1^2) + \\
& + \frac{a}{a'}\beta'\Big[(\varepsilon_1\varepsilon'_2 + \varepsilon_2\varepsilon'_1)\left(-\frac{15}{16} - \frac{45}{16}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{165}{16}\gamma_1\gamma_2 - \frac{75}{8}\varepsilon'_1\varepsilon'_2\right) \\
& \qquad - \frac{45}{8}(\varepsilon_1\gamma_2^2\varepsilon'_1 + \varepsilon_2\gamma_1^2\varepsilon'_2) + \quad\Big] \\
& + \frac{a^2}{a'^2}\beta''\left(\frac{9}{128} + \frac{45}{32}\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{45}{32}\gamma_1\gamma_2 + \frac{45}{32}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + \quad\right) + \quad ,
\end{aligned}$$

la partie periodique de V sera designee par

$$2n'^2a^2\Sigma P,$$

et generalement pour un terme S ou P, les exposants correspondants seront toujours appeles $q, s, s', p_1, p_2, r_1, r_2, p'_1, p'_2$, comme ci-dessus, de plus, pour un terme P, nous ferons $d = sn + s'n'$

Conformement aux remarques deja faites, on ne trouve dans la premiere partie de V_0 (celle qui correspond a $q = 0$) que le seul argument seculaire $2\varpi - 2\theta$, en dehors des termes qui ne dépendent que des excentricites et de l'inclinaison, de meme, la seconde partie (pour $q = 1$) ne depend que des arguments seculaires $\varpi - \varpi'$, $\varpi + \varpi' - 2\theta$, $3\varpi - \varpi' - 2\theta$, $3\varpi + \varpi' - 4\theta$, et ainsi de suite

Les equations qui determinent les differentes inconnues sont faciles a écrire, et a integrer comme au n° 98 Designons encore par n, a, $l = nt + l_0$, ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 les valeurs de premiere approximation, toutes constantes (sauf le terme nt de l), et representons les elements variables eux-mêmes par (n), (a), (l), On a immediatement, en ecrivant explicitement le seul resultat de la seconde approximation,

$$(n) = n - 6n'^2\sum \frac{sP}{d} + \quad ,$$

$$(\iota l) = \iota l - 6n'^2\sum \frac{sP}{d^2} + \frac{n'^2}{n}\sum\left\{\begin{matrix}\iota t S\\ \frac{P}{d}\end{matrix}\right\}[-4q - 8 + p_1 + p_2 + r_1 + r_2$$
$$- \varepsilon_1\varepsilon_2(p_1 + p_2 - 2r_1 - 2r_2) + \quad] + \quad ,$$

$$(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \frac{n'^2}{n}\sum\frac{1}{\varepsilon_2}\left\{\begin{matrix}\iota t S\\ \frac{P}{d}\end{matrix}\right\}[-p_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(2p_2 - s - r_1 - r_2) + \quad] + \quad ,$$

$$(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 + \frac{n'^2}{n}\sum\frac{1}{\varepsilon_1}\left\{\begin{matrix}\iota t S\\ \frac{P}{d}\end{matrix}\right\}[p_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2(-2p_1 - s + r_1 + r_2) + \quad] + \quad ,$$

$$(\gamma_1) = \gamma_1 + \frac{n'^2}{n}\sum\frac{1}{\gamma_2}(1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \quad)\left\{\begin{matrix}\iota t S\\ \frac{P}{d}\end{matrix}\right\}[-r_2 - \gamma_1\gamma_2(s - p_1 + p_2)] +$$

$$(\gamma_2) = \gamma_2 + \frac{n^2}{n}\sum\frac{1}{\gamma_1}(1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \quad)\left\{\begin{matrix}\iota t S\\ \frac{P}{d}\end{matrix}\right\}[r_1 - \gamma_1\gamma_2(s - p_1 + p_2)] +$$

La solution, completement developpee, jouit des proprietes que nous avons reconnues plus haut

Si l'on envisage maintenant les coordonnées polaires de la Lune, soit la parallaxe $\frac{1}{r}$, la longitude v comptée dans le plan TXY, à partir de l'axe TX, et la latitude s au-dessus de ce plan, on aura pour les développements de ces quantités, d'après des formules connues, et en faisant

$$x_1 = (\varepsilon_1)\, e^{(il)}, \qquad x_2 = (\varepsilon_2)\, e^{-(il)}, \qquad y_1 = (\gamma_1)\, e^{(il)}, \qquad y_2 = (\gamma_2)\, e^{-(il)},$$

les expressions suivantes

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(a)}\Big[1 + x_1 + x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{9}{2}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2 x_2 - \frac{1}{2}x_1 x_2^2 + \frac{9}{2}x_2^3$$
$$+ \frac{32}{3}x_1^4 - \frac{8}{3}x_1^3 x_2 - \frac{8}{3}x_1 x_2^3 + \frac{32}{3}x_2^4 + \ldots\Big],$$

$$iv = (il) + 2x_1 - 2x_2 + \frac{5}{2}x_1^2 - \frac{5}{2}x_2^2 + \frac{13}{3}x_1^3 - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - \frac{13}{3}x_2^3$$
$$+ \frac{103}{12}x_1^4 - \frac{11}{3}x_1^3 x_2 + \frac{11}{3}x_1 x_2^3 - \frac{103}{12}x_2^4 + \ldots$$
$$- \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{4}y_1^4 - \frac{1}{2}y_1^3 y_2 + \frac{1}{2}y_1 y_2^3 - \frac{1}{4}y_2^4$$
$$- 2x_1 y_1^2 + 2x_2 y_1^2 - 2x_1 y_2^2 + 2x_2 y_2^2$$
$$- \frac{13}{2}x_1^2 y_1^2 + 8x_1 x_2 y_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 y_1^2 + \frac{3}{2}x_1^2 y_2^2 - 8x_1 x_2 y_2^2 + \frac{13}{2}x_2^2 y_2^2 + \ldots,$$

$$is = y_1 - y_2 - \frac{1}{6}y_1^3 + \frac{1}{6}y_2^3$$
$$+ 2x_1 y_1 - 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_2 y_2 - x_1 y_1^3 + x_2 y_1^3 - x_1 y_2^3 + x_2 y_2^3$$
$$+ \frac{9}{2}x_1^2 y_1 - 4x_1 x_2 y_1 - \frac{1}{2}x_2^2 y_1 + \frac{1}{2}x_1^2 y_2 + 4x_1 x_2 y_2 - \frac{9}{2}x_2^2 y_2$$
$$+ \frac{32}{3}x_1^3 y_1 - 10x_1^2 x_2 y_1 - \frac{2}{3}x_2^3 y_1 + \frac{2}{3}x_1^3 y_2 + 10x_1 x_2^2 y_2 - \frac{32}{3}x_2^3 y_2 + \ldots$$

Rappelons enfin que

$$(n)^2(a)^3 = f(M_0 + M),$$

en laissant les unités quelconques.

Les variables (ε_1) et (ε_2), (γ_1) et (γ_2), comme les constantes ε_1 et ε_2, γ_1 et γ_2, sont respectivement conjuguées : nous pourrons donc, dans tout ce qui suit, ne parler explicitement que de (ε_1), (γ_1), ε_1, γ_1, par exemple.

Considérons les parties constantes et purement séculaires de (ε_1)

et (γ_1) elles sont de la forme

$$\varepsilon_1 + int(-b\varepsilon_1 + \Sigma BQ) + \dots, \qquad \gamma_1 + int(-c\gamma_1 + \Sigma CR) + \dots,$$

en n'écrivant pas les termes qui dépendent des puissances supérieures de t.

On désigne ici par Q et R les différents monômes, autres que ε_1 et γ_1, tels que

$$\varepsilon_1^{p_1}\varepsilon_2^{p_2}\gamma_1^{r_1}\gamma_2^{r_2}\varepsilon_1'^{p_1'}\varepsilon_2'^{p_2'},$$

pour lesquels on a

$$p_1 - p_2 + r_1 - r_2 + p_1' - p_2' = 1,$$

la différence $r_1 - r_2$ étant en outre paire ou impaire suivant qu'il s'agit de Q ou R. Les coefficients b, c, B, C sont développables, d'après le n° 141, suivant les puissances entières et positives des rapports $\frac{n'}{n}$, $\frac{a}{a'}$ que nous appellerons m et α, et contiennent au moins m^2 en facteur ; ils dépendent en outre des paramètres β', β''.

Leurs parties principales, c'est-à-dire celles en m^2, résultent uniquement de la seconde approximation que nous avons faite explicitement, et l'on a en particulier par suite

$$b = \left(\frac{3}{4} + \frac{45}{32}\alpha^2\beta'' + \dots\right)m^2 + \dots,$$

$$c = -\left(\frac{3}{4} + \frac{45}{32}\alpha^2\beta'' + \dots\right)m^2 + \dots;$$

les parties principales de b et c sont ainsi égales et de signes contraires, mais il n'en est plus de même pour leurs termes en m^3, m^4, ..., ainsi qu'on pourrait effectivement le vérifier sans grande peine.

Nous allons maintenant remplacer les constantes ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 par quatre autres η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 analogues, c'est-à-dire conjuguées deux à deux, à l'aide de formules telles que

$$\varepsilon_1 = \eta_1 + \Sigma\beta Q_1, \qquad \gamma_1 = \zeta_1 + \Sigma\gamma R_1,$$

Q_1 et R_1 étant les mêmes monômes que Q, R, mais construits avec η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 au lieu de ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, et les coefficients β, γ étant réels.

Soit en même temps deux constantes réelles g et h, de la forme

$$g = g_0 + \Sigma g_1 S_1, \qquad h = h_0 + \Sigma h_1 S_1,$$

S_1 représentant les différents monomes (autres que 1), analogues à Q_1 et R_1, mais pour lesquels on a

$$p_1 - p_2 = r_1 - r_2 = p'_1 - p'_2 = 0$$

La détermination des coefficients β, γ, g_0, h_0, g_1, h_1 peut être faite, comme nous allons le voir, de façon à remplir la condition suivante Les nouvelles expressions de (ε_1), (γ_1) sont

$$\eta_1 + \Sigma\beta Q_1 + int(-b\,\eta_1 - b\,\Sigma\beta Q_1 + \Sigma B_1 Q_1) + \ldots,$$
$$\zeta_1 + \Sigma\gamma R_1 + int(-c\,\zeta_1 - c\,\Sigma\gamma R_1 + \Sigma C_1 R_1) + \ldots,$$

en désignant par $\Sigma B_1 Q_1$, $\Sigma C_1 R_1$ ce que deviennent ΣBQ, ΣCR

Supposons alors que dans les parties constantes $\eta_1 + \Sigma\beta Q_1$, $\zeta_1 + \Sigma\gamma R_1$, on remplace η_1, η_2, ζ_1, ζ_2, respectivement, par les quantités variables $\eta_1 e^{-ignt}$, $\eta_2 e^{ignt}$, $\zeta_1 e^{-ihnt}$, $\zeta_2 e^{ihnt}$, puis que l'on développe les exponentielles $e^{\pm ignt}$, $e^{\pm ihnt}$ suivant les puissances de t les parties en t des résultats devront reproduire exactement les parties en t des expressions précédentes

Cette condition se traduit immédiatement par les équations suivantes

$$(g_0 - b + \Sigma g_1 S_1)\,\eta_1 + \Sigma\beta Q_1 [-b + (p_1 - p_2)(g_0 + \Sigma g_1 S_1)$$
$$+ (r_1 - r_2)(h_0 + \Sigma h_1 S_1)] + \Sigma B_1 Q_1 = 0$$

$$(h_0 - c + \Sigma h_1 S_1)\,\zeta_1 + \Sigma\gamma R_1 [-c + (p_1 - p_2)(g_0 + \Sigma g_1 S_1)$$
$$+ (r_1 - r_2)(h_0 + \Sigma h_1 S_1)] + \Sigma C_1 R_1 = 0,$$

les coefficients des divers monomes Q_1, R_1 devant être séparément nuls dans les premiers membres

Il vient donc en premier lieu

$$g_0 = b, \qquad h_0 = c$$

En second lieu, le seul monome Q_1 ou R_1 qui soit du premier degré par rapport à l'ensemble des quantités η_1, η_2, ζ_1, ζ_2, ε'_1, ε'_2 est $Q_1 = \varepsilon'_1$

Pour ce monome, on a

$$B_1 = B = \frac{15}{16}\alpha\beta' m^2 + \ldots,$$

et, par suite,

$$\beta = \frac{5}{4}\alpha\beta'(1 + \ldots),$$

en n'écrivant que le premier terme d'une série qui procède évidemment suivant les puissances de m et de σ^2

Les équations ci-dessus s'écrivent encore sous la forme

$$\Sigma g_1(S_1\eta_1) + \Sigma\beta Q_1[(p_1-p_2-1)b + (r_1-r_2)c] + \Sigma B_2 Q_1 = 0,$$
$$\Sigma h_1(S_1\zeta_1) + \Sigma\gamma R_1[(p_1-p_2)b + (r_1-r_2-1)c] + \Sigma C_2 R_1 = 0,$$

en faisant

$$\Sigma B_2 Q_1 = \Sigma B_1 Q_1 + \Sigma\beta Q_1[(p_1-p_2)\Sigma g_1 S_1 + (r_1-r_2)\Sigma h_1 S_1],$$
$$\Sigma C_2 R_1 = \Sigma C_1 R_1 + \Sigma\gamma R_1[(p_1-p_2)\Sigma g_1 S_1 + (r_1-r_2)\Sigma h_1 S_1]$$

Or, il est clair que si le monome Q_1 ou R_1, ou encore le monome de même espèce $S_1\eta_1$ ou $S_1\zeta_1$, est d'un certain degré, et que l'on ait déjà déterminé les coefficients β, γ, g_1, h_1 qui se rapportent à tous les monomes analogues de degré inférieur, le coefficient B_2 est connu

Observons alors que la quantité $(p_1-p_2-1)b+(r_1-r_2)c$ ne peut être nulle que si l'on a $p_1-p_2=1$, $r_1-r_2=0$, et par suite $p'_1-p'_2=0$, et que de même la quantité $(p_1-p_2)b+(r_1-r_2-1)c$ n'est nulle que si l'on a $p_1-p_2=0$, $r_1-r_2=1$, et par suite $p'_1-p'_2=0$, nous en concluons immédiatement que 1° si le monome Q_1 ou R_1 n'est pas de la forme spéciale $S_1\eta_1$ ou $S_1\zeta_1$, le coefficient β ou γ correspondant est donné par la formule

$$\beta = \frac{-B_2}{(p_1-p_2-1)b+(r_1-r_2)c},$$

ou

$$\gamma = \frac{-C_2}{(p_1-p_2)b+(r_1-r_2-1)c},$$

2° si le monome Q_1 ou R_1 est de la forme spéciale $S_1\eta_1$ ou $S_1\zeta_1$, le coefficient β ou γ correspondant reste indéterminé, mais le coefficient g_1 ou h_1 relatif à S_1 est donné par

$$g_1 = -B_2 \qquad \text{ou} \qquad h_1 = -C_2$$

Appliquant ces règles aux différents monomes du troisième degré, et ne retenant que les termes principaux, on trouve sans peine, en

faisant nuls tous les coefficients β ou γ indéterminés,

$$g = b - \frac{3}{2} m^2 \eta_1 \eta_2 - 6 m^2 \zeta_1 \zeta_2 + \frac{9}{2} m^2 e'_1 e'_2 + \dots,$$

$$h = c - 6 m^2 \eta_1 \eta_2 + \frac{3}{2} m^2 \zeta_1 \zeta_2 - \frac{9}{2} m^2 e'_1 e'_2 + \dots,$$

$$\varepsilon_1 = \eta_1 - \frac{5}{2} \eta_2 \zeta_1^2 + \alpha\beta' \Big(\frac{5}{4} e'_1 + 10 \eta_1 \eta_2 e'_1 - \frac{15}{4} \zeta_1 \zeta_2 e'_1 + 2 e'^2_1 e'_2 - \frac{25}{4} \eta_1^2 e'_2 - \frac{5}{3} \zeta_1^2 e'_2 \Big) + \dots,$$

$$\gamma_1 = \zeta_1 + \frac{5}{2} \eta_1^2 \zeta_2 + \alpha\beta' \Big(\frac{10}{3} \eta_1 \zeta_2 e'_1 - \frac{5}{2} \eta_2 \zeta_1 \varepsilon'_1 + 5 \eta_1 \zeta_1 e'_2 \Big) + \dots$$

Les monomes $\eta_2 e'^2_1$, $\zeta_2 e'^2_1$ ne figurent pas dans ces formules ; en effet les coefficients B ou C correspondants ne peuvent provenir, d'après les remarques faites sur V_0, que de la troisième approximation et contiennent par suite au moins m^3 en facteur ; il en résulte que, pour ces monomes, β ou γ sont au moins de l'ordre de m.

Généralement, les coefficients β et γ seront des séries ordonnées suivant les puissances de m et les puissances de même parité de α, et le degré de leurs parties principales par rapport à m sera inférieur de deux unités à celui des parties principales des coefficients correspondants B_2 et C_2, et par suite B et C, lequel est au moins égal à deux. Il n'y aura d'exception à cette règle que si l'on avait pour un monome Q_1 ou R_1 la relation $p_1 - p_2 = r_1 - r_2 \pm 1$, le signe supérieur ou inférieur correspondant à Q_1 ou R_1 ; ceci résulte de l'observation faite ci-dessus sur les parties principales de b et c, et dans ce cas, il faudra dire que la partie principale de β ou γ est d'un degré par rapport à m inférieur de trois unités à celui de la partie principale de B_2 ou C_2.

Les monomes Q_1 et R_1 de moindre degré pour lesquels cette circonstance peut se présenter sont $\eta_2 \zeta_2^2 e'_1$ et $\eta_2^2 \zeta_2 \varepsilon'_1$, mais l'on doit ajouter que, d'après la forme spéciale de V_0, les parties principales des coefficients correspondants B et C, ou bien seront d'ordre supérieur à m^2, ou bien contiendront α^4 en facteur. On voit par là que si on ne laisse de côté que des termes absolument négligeables, la quantité m ne s'introduira jamais en diviseur dans les expressions de ε_1 et γ_1. Et de la même façon, les expressions de g et h contiendront m^2 en facteur.

Envisageons actuellement les parties constante et purement séculaire de (il), soit, après introduction des nouvelles valeurs de ε_1, ε_2, γ_1, γ_2,

$$il + int(\Sigma A_1 S_1 + \Sigma A'_1 S'_1) + \dots,$$

les monomes S_1 étant toujours ceux définis précédemment (auxquels on a adjoint 1), et S'_1 représentant les monomes analogues, autres que les S_1, pour lesquels on a simplement

$$p_1 - p_2 + r_1 - r_2 + p'_1 - p'_2 = 0.$$

Nous allons encore changer l'élément l en un autre λ (aucune confusion n'étant à craindre en raison du nouvel emploi de la lettre λ), en posant

$$il = i\lambda + \Sigma\alpha' S'_1,$$

et en même temps déterminer une constante ν de la forme $\Sigma\alpha S_1$, le tout de façon à vérifier la condition suivante. La nouvelle expression de il est

$$i\lambda + \Sigma\alpha' S'_1 + int(\Sigma A_1 S_1 + \Sigma A'_1 S'_1) + \dots,$$

si alors dans la première partie de cette expression, soit $i\lambda + \Sigma\alpha'_1 S'_1$, on remplace λ par $\lambda + \nu nt$, et, comme précédemment, η_1, ζ_1, … par $\eta_1 e^{-ignt}$, $\zeta_1 e^{-ihnt}$, …, en développant les exponentielles suivant les puissances de t, la partie en t du résultat devra reproduire exactement la partie en t de l'expression totale précédente.

Cette condition donne immédiatement

$$\alpha = A_1,$$

et

$$\alpha' = \frac{-A'_2}{(p_1 - p_2)b + (r_1 - r_2)c},$$

en faisant

$$\Sigma A'_2 S'_1 = \Sigma A'_1 S'_1 + \Sigma\alpha S'_1[(p_1 - p_2)\Sigma g_1 S_1 + (r_1 - r_2)\Sigma h_1 S_1],$$

et l'on peut répéter sans peine les diverses observations faites au sujet de la détermination des coefficients β, γ. En particulier, la partie principale du dénominateur de l'expression de α' sera généralement du second degré par rapport à m, et ne deviendra du troisième degré que si l'on a $p_1 - p_2 = r_1 - r_2$; les monomes de moindre degré pour lesquels cette circonstance peut se présenter, sont $\eta_2^2 \zeta_2^2 \varepsilon'_1$ et son conjugué. On en tire les mêmes conséquences que précédemment.

En fait on trouvera facilement, dans les mêmes conditions que ci-dessus,

$$\begin{aligned}\nu = m^2\Big[&-1-\frac{9}{8}\alpha^2\beta''-\frac{9}{2}\eta_1\eta_2+\frac{9}{2}\zeta_1\zeta_2-6\varepsilon'_1\varepsilon'_2-\frac{3}{2}\eta_1^2\eta_2^2+15\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2\\ &-27\eta_1\eta_2\varepsilon'_1\varepsilon'_2+27\zeta_1\zeta_2\varepsilon'_1\varepsilon'_2-30\varepsilon'^2_1\varepsilon'^2_2+\ldots\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}il = i\lambda &- \frac{3}{2}(\eta_1^2\zeta_2^2-\eta_2^2\zeta_1^2)\\ &+\alpha\beta'\Big[(\eta_1\varepsilon'_2-\eta_2\varepsilon'_1)\Big(-\frac{25}{4}-20\eta_1\eta_2+\frac{45}{4}\zeta_1\zeta_2-25\varepsilon'_1\varepsilon'_2\Big)\\ &\qquad -\frac{81}{8}(\eta_1\zeta_2^2\varepsilon'_1-\eta_2\zeta_1^2\varepsilon'_2)\Big]+\ldots\end{aligned}$$

144. Revenons maintenant aux expressions générales des éléments variables (n), (il), (ε_1), (ε_2), (γ_1), (γ_2), et mettons-y partout pour ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, l, leurs expressions en fonction de η_1, η_2, ζ_1, ζ_2, λ. Il résulte de ce qui précède que, si l'on se borne à la considération des termes purement séculaires en t, on peut les effacer partout, à la simple condition de remplacer η_1, η_2, ζ_1, ζ_2, λ par $\eta_1 e^{-ignt}$, $\eta_2 e^{ignt}$, $\zeta_1 e^{-ihnt}$, $\zeta_2 e^{ihnt}$, $\lambda+\nu nt$, et de développer les exponentielles suivant les puissances de t; de plus, ce résultat ne peut être obtenu que de cette façon.

D'autre part, nous savons par les Chapitres précédents que la solution du problème peut être mise sous forme purement périodique dépendant uniquement des arguments D, G, H, G', linéaires par rapport au temps.

Il faut en conclure évidemment que, plus généralement, on peut effacer dans les expressions des éléments (n), (il), ..., *tous* les termes séculaires ou mixtes qui renferment t en dehors des signes périodiques, à la condition de remplacer en même temps η_1, η_2, ... par $\eta_1 e^{-ignt}$, $\eta_2 e^{ignt}$, ...; et en effet, une telle opération étant possible, elle doit en particulier s'appliquer aux termes purement séculaires en t. Or celle que nous venons d'indiquer remplit seule cette condition.

En résumé, si dans les valeurs des éléments (n), (il), ..., débarrassées de tous leurs termes séculaires et mixtes, comme aussi dans les valeurs des coordonnées, traitées de même, nous introduisons partout η_1, η_2, ζ_1, ζ_2, λ, puis que nous remplacions ces quantités par $\eta_1 e^{-ignt}$, $\eta_2 e^{igнt}$, $\zeta_1 e^{-ihnt}$, $\zeta_2 e^{ihnt}$, $\lambda+\nu nt$, nous retombons

nécessairement, à des changements de notation près, qu'il est inutile de préciser, sur la solution de forme périodique développée dans les Chapitres précédents

Si nous combinons maintenant ce résultat avec ceux des n^{os} 141 et 142, nous pouvons bien facilement nous rendre compte *a priori*, comme il a été annoncé au commencement de ce Chapitre, des circonstances particulières auxquelles nous avons fait alors allusion.

Citons-en quelques-unes entre autres

Les valeurs des constantes qui correspondent à g et h contiennent m^2 en facteur, et leurs termes en m^2 sont connus par ce qui précède

Les expressions des coordonnées ne contiennent pas m en dénominateur (sauf l'exception indiquée plus loin), et ceux de leurs termes qui sont indépendants de m résultent immédiatement des valeurs établies ci-dessus pour $\frac{1}{l}$, w, s, et ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, l en fonction de η_1, η_2, ζ_1, ζ_2, λ c'est une vérification facile à faire

Les termes de ces coordonnées qui sont indépendants de α, et qui dépendent des arguments 2D, 4D, 6D, . renferment au moins m, m^2, m^3, . en facteur ceci résulte des propriétés spéciales du développement de V et de l'étude faite au n° 141 Il est facile de voir ensuite avec quelles modifications cette proposition s'étend aux termes qui dépendent de α

D'après le n° 142, les coefficients des termes à longue période ou à très longue période de la parallaxe renferment au moins m^2 en facteur, et s'il s'agit de termes à très longue période indépendants de α, on y trouvera même m^3 en facteur

Dans bien des cas, l'approximation que nous avons développée explicitement dans le numéro précédent permettra de retrouver les parties principales des coefficients des inégalités du mouvement de la Lune, en partant du développement effectif de la fonction V, tel qu'on l'obtient d'après le Chapitre XIII

Tout ce que nous venons de dire reste vrai tant que l'on ne considère pas les termes qui dépendent de certains monomes spéciaux, dont les plus simples sont $\varepsilon_{-1}^2 \gamma_{-1} \varepsilon_1'^4$, $\varepsilon_{-1} \gamma_{-1}^2 \varepsilon_1'^4$, $\varepsilon_{-1}^2 \gamma_{-1}^2 \varepsilon_1'^4$, et leurs conjugués, avec les notations des Chapitres précédents Avec ces monomes en effet, on doit prévoir l'introduction de m en diviseur dans les coefficients, et ceci correspond à ce que nous avons déjà reconnu au n° 130

Toutefois, on doit ajouter, d'après une remarque faite plus haut, que cette introduction de m en diviseur ne pourra se présenter que pour des termes contenant α^4 en facteur, en raison de la forme spéciale de la fonction V_0. C'est pour la même raison aussi qu'on peut dire que les inégalités de Laplace considérées au n° 130, et qui correspondent à l'argument séculaire $3\varpi' - \varpi - 2\theta$ dans V_0, contiendront certainement soit $m\alpha$, soit α^3 en facteur, outre e'^3, et $\varepsilon\gamma$ ou γ^2, suivant qu'il s'agit de la latitude ou de la longitude.

Cette énumération suffit à justifier l'importance que devait présenter le retour à la méthode de la variation des éléments.

CHAPITRE XXIV.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DONT DÉPENDENT LES PERTURBATIONS DE LA THÉORIE SOLAIRE DU MOUVEMENT DE LA LUNE. THÉORÈMES D'ADAMS. ACCÉLÉRATIONS SÉCULAIRES.

145. Nous allons maintenant appliquer au problème qui nous occupe les théories générales développées au Chapitre II, et spécialement au n° **11**; nous obtiendrons ainsi de nouvelles propositions intéressantes, et nous établirons en même temps les équations qui nous permettront de compléter la théorie solaire du mouvement de la Lune. Nous aurions pu, d'ailleurs, nous appuyer déjà sur ces mêmes principes pour obtenir la disparition des termes à caractère séculaire réalisée directement au Chapitre précédent.

Reprenant les notations des Chapitres XIX à XXII, soient X, Y, Z, les coordonnées rectilignes de la Lune par rapport aux axes de directions fixes TX, TY, TZ, et marquons les dérivées par rapport au temps par un accent. En faisant ici

$$F = \frac{1}{2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) - U,$$

(sans confusion avec la fonction F définie au n° **121**), nous avons déterminé précédemment la solution des équations canoniques

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X'}, \qquad \frac{dX'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial X},$$

La fonction F dépend d'abord des variables X, Y, Z, X', Y', Z', puis du temps, par le seul intermédiaire de l'argument N' dont la vitesse est n', enfin des paramètres $n', a', \varepsilon', \varphi'$, et aussi, si l'on veut, β, β', β'', ..., en faisant $\beta = f(M_0 + M)$. Pour représenter les dérivées partielles de la fonction F prise sous cette forme, nous ferons usage de la caractéristique δ.

L'intégration donne pour X, X', , des expressions périodiques par rapport à trois nouveaux arguments, comportant chacun une constante arbitraire, soit N, N_1, N_2 en appelant N_1 et N_2 les différences N — G, N — H, ce sont la longitude moyenne, et les longitudes du périgée et du nœud, de plus, elle introduit trois constantes arbitraires n, ε, γ Les vitesses de N, N_1, N_2 sont n, n_1, n_2, et l'on a $n_1 = ng'$, $n_2 = nh'$, g' et h' ayant les valeurs connues calculées précédemment, qui dépendent de n, ε, γ et des paramètres enumérés ci-dessus

La fonction F où l'on a remplacé X, X', par leurs valeurs, est de la même nature périodique, et la caractéristique ordinaire ∂ servira pour représenter ses dérivées partielles quand elle est ainsi exprimée à l'aide de N, N_1, N_2, N', n, ε, γ, n', a', ε',

La fonction appelée G au n° 11 (4°) est ici la partie constante P de la fonction périodique $X'^2+Y'^2+Z'^2-F$ ou $\frac{1}{2}(X'^2+Y'^2+Z'^2)+U$, la formule

$$X'^2+Y'^2+Z'^2+XX''+YY''+ZZ''=\frac{d}{dt}(XX'+YY'+ZZ')$$

montre que les parties constantes de

$$X'^2+Y'^2+Z'^2$$

et de

$$XX''+YY''+ZZ''$$

sont égales et de signes contraires, d'autre part, d'après les équations du mouvement, on a

$$XX''+YY''+YY''=X\frac{\partial U}{\partial X}+Y\frac{\partial U}{\partial Y}+Z\frac{\partial U}{\partial Z}=U_1,$$

si donc on marque par f_0 la partie constante d'une fonction f quelconque de nature périodique, nous avons

$$P-\left[U-\frac{1}{2}U_1\right]_0,$$

et comme on peut mettre U sous la forme

$$\frac{\beta}{r}+U_2+\beta'U_3+\beta''U_4+\ldots,$$

les U_k étant homogènes et de degré k par rapport à X, Y, Z, il vient

encore

$$(1)\qquad P = \frac{3}{2}\beta\left(\frac{1}{r}\right)_0 - \frac{1}{2}\beta'(U_3)_0 - \beta''(U_4)_0 - \frac{3}{5}\beta'''(U_5)_0 - $$

Soit u l'une quelconque des quantités N, N_1, N_2, N', n, ε, γ, et considérons les différentes fonctions

$$\left[X'\frac{\partial X}{\partial u} + Y'\frac{\partial Y}{\partial u} + Z'\frac{\partial Z}{\partial u}\right]_0,$$

que nous nommerons successivement J, J_1, J_2, J', J_n, J_ε, J_γ

D'après le n° 129, les coordonnées X, Y, Z peuvent être mises sous la forme

$$(2)\quad X = a\Sigma x_n\cos(N+V_n),\qquad Y = a\Sigma x_n\sin(N+V_n),\qquad Z = a\Sigma z_n\sin V_n,$$

dans ces formules, les V_n sont ici les différents arguments *distincts*

$$kD + pG + qH + rG',$$

k, p, q, r étant des entiers quelconques, dont l'avant-dernier est pair pour X et Y, impair pour Z, de plus, le développement de Z est symétrique, on a d'ailleurs $D = N - N'$, $G = N - N_1$, $H = N - N_2$, $G' = N' - \varphi'$

Quant aux coefficients x_n, z_n, ce sont des fonctions de n, ε, γ, n', a', ε', β, β', qu'il sera facile de préciser davantage le moment venu, le facteur a dépend lui-même de n, n', β

Il est clair que l'on a d'abord

$$J_n = J_\varepsilon = J_\gamma = 0,$$

puisque les quantités telles que $X'\frac{\partial X}{\partial n} +$ se présentent comme des séries composées uniquement de sinus d'angles qui ne sauraient être constants sans s'annuler

On trouve ensuite immédiatement

$$(3)\left\{\begin{aligned}
J &= (n-n')a^2[\Sigma(1+k+p+q)(1+m+k+pg+qh+rm)x_n^2\\
&\qquad\qquad + \Sigma(k+p+q)(k+pg+qh+rm)z_n^2],\\
J_1 &= -(n-n')a^2[\Sigma p(1+m+k+pg+qh+rm)x_n^2\\
&\qquad\qquad + \Sigma p(k+pg+qh+rm)z_n^2],\\
J_2 &= -(n-n')a^2[\Sigma q(1+m+k+pg+qh+rm)x_n^2\\
&\qquad\qquad + \Sigma q(k+pg+qh+rm)z_n^2],\\
J' &= -(n-n')a^2[\Sigma(k-r)(1+m+k+pg+qh+rm)x_n^2\\
&\qquad\qquad + \Sigma(k-r)(k+pg+qh+rm)z_n^2]
\end{aligned}\right.$$

D'après les équations (12) du n° 11, on a alors

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial n} &&= J + \frac{\partial n_1}{\partial n} J_1 + \frac{\partial n_2}{\partial n} J_2,\\
&\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} &&= \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} J_1 + \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon} J_2,\\
&\frac{\partial P}{\partial \gamma} &&= \frac{\partial n_1}{\partial \gamma} J_1 + \frac{\partial n_2}{\partial \gamma} J_2,\\
&\frac{\partial P}{\partial n'} - \left(\frac{\delta U}{\delta n'}\right)_0 &&= J + \frac{\partial n_1}{\partial n'} J_1 + \frac{\partial n_2}{\partial n'} J_2,\\
&\frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} - \left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}\right)_0 &&= \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'} J_1 + \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'} J_2,
\end{aligned}
\right.
$$

et dans la dernière de ces relations, on peut encore remplacer ε' par α', β, β', β'', (le remplacement par φ' ne donnerait rien).

Imaginons maintenant que la fonction de forces U soit augmentée d'une fonction perturbatrice R : la solution du problème restera la même, à la condition de déterminer les éléments n, ε, γ, N, N_1, N_2 de la théorie solaire par de nouvelles équations bien faciles à former. Mais il est plus avantageux d'employer d'autres éléments.

Supposons en premier lieu que l'on remplace n, ε, γ par J, J_1, J_2, qui forment un système équivalent, la fonction appelée J au n° 11 (4°), et que nous désignerons ici par K, a pour dérivées partielles par rapport à J, J_1, J_2 précisément n, n_1, n_2, et les équations (15) qui déterminent ce numéro prennent la forme canonique

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial R}{\partial N}, &&\frac{dJ_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial N_1}, &&\frac{dJ_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial N_2},\\
&\frac{dN}{dt} = n - \frac{\partial R}{\partial J}, &&\frac{dN_1}{dt} = n_1 - \frac{\partial R}{\partial J_1}, &&\frac{dN_2}{dt} = n_2 - \frac{\partial R}{\partial J_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

En nous rappelant maintenant que nous avons fait précédemment

$$
\theta = e^{iD}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iG}, \qquad \varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iG}, \qquad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH}, \qquad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH},
$$

regardons R comme une fonction de n, θ, ε_1, ε_{-1}, γ_1, γ_{-1}, et d'autre part, continuons à regarder n, ε, γ et aussi n_1, n_2 comme fonctions de J, J_1, J_2. On a, pour les seconds membres des équa-

tions (5),

$$\frac{\partial R}{\partial N} = i\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + i\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right) + i\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial N_1} = -i\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right), \qquad \frac{\partial R}{\partial N_2} = -i\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial J} = \frac{\partial n}{\partial J}\frac{\partial R}{\partial n} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial J}\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial J}\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} + \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),$$

avec deux autres formules semblables pour $\frac{\partial R}{\partial J_1}$ et $\frac{\partial R}{\partial J_2}$

Posons alors

$$a^2\frac{\partial n}{\partial J} = M,$$

$$a^2\left(\frac{\partial n}{\partial J} - \frac{\partial n}{\partial J_1}\right) = M',$$

$$a^2\left(\frac{\partial n}{\partial J} - \frac{\partial n}{\partial J_2}\right) = M'',$$

$$a^2\frac{\partial(n-n_1)}{\partial J} = M_1$$

$$a^2\left[\frac{\partial(n-n_1)}{\partial J} - \frac{\partial(n-n_1)}{\partial J_1}\right] = M'_1,$$

$$a^2\left[\frac{\partial(n-n_1)}{\partial J} - \frac{\partial(n-n_1)}{\partial J_2}\right] = M''_1,$$

$$a^2\frac{\partial(n-n_2)}{\partial J} = M_2,$$

$$a^2\left[\frac{\partial(n-n_2)}{\partial J} - \frac{\partial(n-n_2)}{\partial J_1}\right] = M'_2,$$

$$a^2\left[\frac{\partial(n-n_2)}{\partial J} - \frac{\partial(n-n_2)}{\partial J_2}\right] = M''_2,$$

$$na^2\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial J} = P, \qquad na^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial J} = Q,$$

$$na^2\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial J} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial J_1}\right) = P', \qquad na^2\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial J} - \frac{\partial \gamma}{\partial J_1}\right) = Q',$$

$$na^2\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial J} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial J_2}\right) = P'', \qquad na^2\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial J} - \frac{\partial \gamma}{\partial J_2}\right) = Q'',$$

on peut remplacer les équations (5) par les équations définitives sui-

vantes, mieux appropriées au calcul effectif

$$
(6)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{dn}{i\,dt} &= \frac{M}{a^2}\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{M'}{a^2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right) + \frac{M''}{a^2}\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),\\
\frac{d(n-n_1)}{i\,dt} &= \frac{M_1}{a^2}\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{M'_1}{a^2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right) + \frac{M''_1}{a^2}\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),\\
\frac{d(n-n_2)}{i\,dt} &= \frac{M_2}{a^2}\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{M'_2}{a^2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right) + \frac{M''_2}{a^2}\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),\\
\frac{d(iN)}{i\,dt} &= n - \frac{M}{na^2}n\frac{\partial R}{\partial n} - \frac{P}{na^2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right) - \frac{Q}{na^2}\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} + \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),\\
\frac{d\varepsilon_1}{i\,dt} &= (n-n_1)\varepsilon_1 - \frac{P'}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}} + \frac{P}{na^2}\varepsilon_1\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{P''}{na^2}\varepsilon_1\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right)\\
&\quad - \frac{M'}{na^2}\varepsilon_1 n\frac{\partial R}{\partial n} - \frac{Q'}{na^2}\varepsilon_1\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} + \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),\\
\frac{d\varepsilon_{-1}}{i\,dt} &= -(n-n_1)\varepsilon_{-1} + \frac{P'}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} + \frac{P}{na^2}\varepsilon_{-1}\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{P''}{na^2}\varepsilon_{-1}\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right)\\
&\quad + \frac{M'}{na^2}\varepsilon_{-1} n\frac{\partial R}{\partial n} + \frac{Q'}{na^2}\varepsilon_{-1}\left(\gamma_1\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} + \gamma_{-1}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}}\right),\\
\frac{d\gamma_1}{i\,dt} &= (n-n_2)\gamma_1 - \frac{Q''}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \gamma_{-1}} + \frac{Q}{na^2}\gamma_1\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{Q'}{na^2}\gamma_1\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right)\\
&\quad - \frac{M''}{na^2}\gamma_1 n\frac{\partial R}{\partial n} - \frac{P''}{na^2}\gamma_1\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right),\\
\frac{d\gamma_{-1}}{i\,dt} &= -(n-n_2)\gamma_{-1} + \frac{Q''}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} + \frac{Q}{na^2}\gamma_{-1}\theta\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{Q'}{na^2}\gamma_{-1}\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right)\\
&\quad + \frac{M''}{na^2}\gamma_{-1} n\frac{\partial R}{\partial n} + \frac{P''}{na^2}\gamma_{-1}\left(\varepsilon_1\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_{-1}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{-1}}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations sont à la vérité en nombre surabondant, puisque n_1 et n_2 sont des fonctions connues de n, ε, γ; il convient cependant de les conserver toutes. Pour en faire usage, il faut connaître les coefficients M, M', M'', ..., c'est-à-dire les dérivées partielles de n, ε, γ, n_1, n_2 par rapport à J, J_1, J_2; nous savons d'ailleurs que l'on a

$$
\frac{\partial n}{\partial J_1} = \frac{\partial n_1}{\partial J}, \qquad \frac{\partial n}{\partial J_2} = \frac{\partial n_2}{\partial J}, \qquad \frac{\partial n_1}{\partial J_2} = \frac{\partial n_2}{\partial J_1},
$$

puisque n, n_1, n_2 sont les dérivées partielles de la fonction K de J, J_1, J_2; il en résulte

$$
M_1 = M', \qquad M_2 = M'', \qquad M'_2 = M''_1.
$$

146. Il est facile de calculer d'abord les fonctions fondamentales J, J_1, J_2 d'après les formules (3).

Soient M_n les différents monomes définis au n° **129**, et caractérisés par les exposants $p_1, p_{-1}, q_1, q_{-1}, r_1, r_{-1}, s$ pour lesquels on a

$$p_1 - p_{-1} = p, \qquad q_1 - q_{-1} = q, \qquad r_1 - r_{-1} = r$$

En faisant

$$C_{n'} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_{-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{q_1+q_{-1}} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{r_1+r_{-1}} \alpha^s,$$

les coefficients x_n, z_n des formules (2) sont

$$x_n = \Sigma p_{n',k} C_n, \qquad z_n = \Sigma z_{n,k} C_{n'},$$

on a d'ailleurs

$$p_{n,k} = \xi_{n,k} + \eta_{n,k},$$

en ayant soin d'augmenter de 1 la valeur de $\xi_{0,0}$, donnée à la fin du n° **133**

Le calcul peut se faire analytiquement et numériquement c'est à la première méthode que nous nous attacherons surtout On trouve d'abord directement, en partant des résultats précédemment acquis,

$$J_1 = na^2\varepsilon^2\left[-\frac{1}{2} + \frac{369}{2^7}m^2 + \frac{2469}{2^8}m^3 + \frac{72687}{2^{12}}m^4 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{693}{2^7}m^2\right)\varepsilon^2 \right.$$
$$\left. - \frac{85}{2^5}m^2\gamma^2 - \frac{309}{2^7}m^2\varepsilon'^2 - \frac{1}{2^4}\varepsilon^4 - \frac{5}{2^6}\varepsilon^2\gamma^2 + \frac{5}{2^7}\gamma^4 + \quad\right],$$

$$J_2 = na^2\gamma^2\left[-\frac{1}{2} - \frac{39}{2^7}m^2 + \frac{231}{2^8}m^3 - \frac{5697}{2^{12}}m^4 + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{679}{2^5}m^2\right)\varepsilon^2 \right.$$
$$\left. + \frac{143}{2^9}m^2\gamma^2 - \frac{45}{2^7}m^2\varepsilon'^2 + \frac{43}{2^7}\varepsilon^4 - \frac{35}{2^6}\varepsilon^2\gamma^2 + \quad\right],$$

et ces valeurs sont exactes jusqu'aux termes du sixième ordre inclusivement

Ordonnant par rapport à ε^2, γ^2, on peut écrire

$$J_1 = na^2\varepsilon^2(J_1^{0,0} + J_1^{1,0}\varepsilon^2 + J_1^{0,1}\gamma^2 + \quad),$$
$$J_2 = na^2\gamma^2(J_2^{0,0} + J_2^{1,0}\varepsilon^2 + J_2^{0,1}\gamma^2 + \quad),$$

de même les mouvements n_1 et n_2, qui ne sont autre chose que ng' et nh', s'écrivent

$$n_1 = n(g'^{0,0} + g'^{1,0}\varepsilon^2 + g'^{0,1}\gamma^2 + \quad)$$
$$n_2 = n(h'^{0,0} + h'^{1,0}\varepsilon^2 + h'^{0,1}\gamma^2 + \quad),$$

et enfin, on a aussi dans les mêmes conditions

$$P = n^2a^2(P^{0,0} + P^{1,0}\varepsilon^2 + P^{0,1}\gamma^2 + P^{2,0}\varepsilon^4 + P^{1,1}\varepsilon^2\gamma^2 + P^{0,2}\gamma^4 + \quad)$$

Si l'on porte ces expressions dans la seconde et la troisième des équations (4), et que l'on identifie les deux membres de chacune, on tombe ainsi sur les relations

$$P^{1,0} = P^{0,1} = 0,$$
$$2P^{2,0} = g'^{1,0} J_1^{0,0}, \qquad 2P^{0,2} = h'^{0,1} J_2^{0,0},$$
$$P^{1,1} = h'^{1,0} J_2^{0,0} = g'^{0,1} J_1^{0,0},$$

Comme la fonction P est proportionnelle à la partie constante de la parallaxe $\frac{1}{r}$, si du moins on néglige les termes qui dépendent de α, on voit qu'il en résulte des relations intéressantes entre les coefficients du développement de cette partie constante ainsi limitée et ceux des développements analogues de g' et h'. En particulier, la partie constante de la parallaxe ne saurait contenir aucun terme du premier degré par rapport à e^2 et γ^2, ainsi que nous l'avons vérifié précédemment dans quelques cas simples; on a aussi

$$\frac{2P^{2,0}}{P^{1,1}} = \frac{g'^{1,0}}{g'^{0,1}}, \qquad \frac{2P^{0,2}}{P^{1,1}} = \frac{h'^{0,1}}{h'^{1,0}}.$$

Ces propositions sont connues sous le nom de *théorèmes d'Adams*; on voit comment on peut les généraliser.

Nous savons que l'on a

$$g' = \frac{3}{2^2}m^2 + \frac{177}{2^5}m^3 + \frac{1659}{2^7}m^4 + \frac{85205}{2^{11}}m^5$$
$$+ \left(-\frac{3}{2^3}m^2 - \frac{627}{2^6}m^3\right)e^2 + \left(-\frac{3}{2}m^2 - \frac{93}{2^5}m^3\right)\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{9}{2^3}m^2 + \frac{753}{2^5}m^3\right)e'^2 + \ldots,$$

$$h' = -\frac{3}{2^2}m^2 + \frac{57}{2^3}m^3 - \frac{123}{2^7}m^4 + \frac{1925}{2^{11}}m^5$$
$$+ \left(-\frac{3}{2}m^2 - \frac{93}{2^5}m^3\right)e^2 + \left(\frac{3}{2^3}m^2 - \frac{75}{2^6}m^3\right)\gamma^2$$
$$+ \left(-\frac{9}{2^3}m^2 + \frac{105}{2^5}m^3\right)e'^2 + \ldots,$$

la partie de P qui dépend de e^2 et γ^2 sera donc

$$n^2a^2\left[\left(\frac{3}{2^5}m^2 + \frac{627}{2^8}m^3\right)e^4 + \left(\frac{3}{2^2}m^2 + \frac{93}{2^6}m^3\right)e^2\gamma^2 + \left(-\frac{3}{2^5}m^2 + \frac{75}{2^8}m^3\right)\gamma^4 + \ldots\right]$$

Remarquons maintenant que la première équation (4) donne

$$J = \frac{\partial P}{\partial n} - \frac{\partial n_1}{\partial n} J_1 - \frac{\partial n_2}{\partial n} J_2,$$

observons aussi que la dérivée par rapport à n d'une fonction de la forme générale $n^p a^q f(m, \alpha)$ est

$$n^{p-1} a^q \left[pf - (1+m)m \frac{\partial f}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{(1+m)^2}{1 + 2m + \frac{3}{2} m^2} \left(qf + \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \right],$$

ainsi qu'il résulte des relations

$$m = \frac{n'}{n - n'}, \qquad \alpha = \frac{a}{a'}, \qquad \beta = a^3 (n - n')^2 \left(1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 \right)$$
$$= a^3 \left(n^2 + \frac{n'^2}{2} \right);$$

on en déduit sans peine, pour la partie de J qui dépend de ε^2 et γ^2, l'expression

$$\begin{aligned} J = na^2 \Big[& + \left(-\frac{3}{2} m^2 - \frac{201}{2^5} m^3 - \frac{13095}{2^9} m^4 - \frac{134515}{2^{11}} m^5 \right) \varepsilon^2 \\ & + \left(\frac{3}{2^3} m^2 - \frac{33}{2^2} m^3 - \frac{513}{2^9} m^4 - \frac{2587}{2^{11}} m^5 \right) \gamma^2 \\ & + \left(-\frac{1}{2^6} m^2 + \frac{691}{2^6} m^3 \right) \varepsilon^4 + \left(\frac{5}{2^4} m^2 + \frac{71}{2^4} m^3 \right) \varepsilon^2 \gamma^2 \\ & + \left(-\frac{1}{2^4} m^2 + \frac{77}{2^8} m^3 \right) \gamma^4 \\ & + \left(-\frac{9}{2^4} m^2 - \frac{789}{2^6} m^3 \right) \varepsilon^2 \varepsilon'^2 + \left(\frac{9}{2^4} m^2 - \frac{69}{2^5} m^3 \right) \gamma^2 \varepsilon'^2 + \quad \Big], \end{aligned}$$

exacte jusqu'aux termes du septième ordre inclusivement. Le calcul direct, d'après la définition de J, n'aurait évidemment pas permis de dépasser le cinquième ordre, en partant des mêmes données, et aurait conduit à des calculs superflus.

Il reste à déterminer la partie de J qui est indépendante de ε^2 et γ^2, et pour laquelle on a, d'après les équations (4),

$$J = \frac{\partial P}{\partial n}, \qquad \frac{\partial P}{\partial n'} = J' + \left(\frac{\delta U}{\delta n'} \right)_0, \qquad \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'} \right)_0,$$

Laissons d'abord de côté les paramètres ε', β', β''. On a, d'après

les équations (3),

$$J' = -(n-n')a^2 \sum k(1+k+m)p^2_{0,k}$$
$$= \frac{n'a^2}{m}\left[-2(3+m)p^2_{0,2} - 2(1-m)p^2_{0,-2} + \dots\right]$$
$$= n'a^2\left(-\frac{97}{2^5}m^3 - \frac{151}{2^3\,3}m^4 - \frac{13}{2}m^5 + \dots\right)$$

On a aussi, d'après la définition de U,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n'}\right)_0 = n'a^2\left[\frac{1}{2}pq + \frac{3}{4}p^2\theta^2 + \frac{3}{4}q^2\theta^2\right]_0$$
$$= n'a^2\left[\frac{1}{2}p^2_{0,0} + \frac{1}{2}p^2_{0,2} + \frac{1}{2}p^2_{0,-2} + 3p_{0,0}p_{0,-2} + \dots\right]$$
$$= n'a^2\left[\frac{1}{2} - \frac{57}{2^4}m^2 - 5m^3 - \frac{211}{2^5\,3}m^4 - \frac{23}{2^4\,3^2}m^5 - \dots\right]$$

de sorte que

$$\frac{\partial P}{\partial n'} = n'a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{27}{2^4}m^2 - \frac{227}{2^2}m^3 - \frac{273}{2^5}m^4 - \frac{959}{2^4\,3^3}m^5 - \dots\right)$$

Si l'on fait

$$\frac{\partial P}{\partial n'} = n'a^2 f'(m), \qquad \frac{\partial P}{\partial n} = na^2 f(m),$$

et que l'on égale les deux valeurs de $\frac{\partial^2 P}{\partial n\,\partial n'}$, tirées de ces formules, on a la relation

$$(1+m)m\frac{\partial f}{\partial m} - \frac{2}{3}\,\frac{m^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}\,f = -\frac{m^2}{1+m}\,m\frac{\partial f'}{\partial m} - \frac{4}{3}\,\frac{m^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}\,f',$$

qui donne sans peine, en observant que le terme indépendant de m dans la série $f(m)$ est égal à l'unité,

$$J = na^2\left(1 + \frac{9}{2^2}m^4 + \frac{121}{2^4\,3}m^5 + \frac{22}{3^2}m^6 + \frac{217}{2^5\,3^3}m^7 + \dots\right)$$

Cherchons maintenant la partie de J qui dépend uniquement de ε', on a, dans ces conditions,

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon'} = n'^2a^2\left[\frac{1}{4}pq\frac{\partial(\rho'^3)}{\partial\varepsilon'} + \frac{3}{8}p^2\theta^2\frac{\partial(\rho'^3e^{-2\lambda'})}{\partial\varepsilon'} + \frac{3}{8}q^2\theta^2\frac{\partial(\rho'^3e^{2\lambda'})}{\partial\varepsilon'}\right],$$

et, par suite,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon'}\right)_0 = n'^2 a^2 \varepsilon' \Big[\frac{3}{4}(pq)_{0,0} + \frac{3}{8}(pq)_{60,0} - \frac{15}{4}(p^2)_{0,-2} + \frac{21}{16}(p^2)_{66,-2} - \frac{3}{16}(q^2)_{66,2} \Big]$$

$$+ n'^2 a^2 \varepsilon'^3 \Big[\frac{15}{8}(pq)_{0,0} + \frac{81}{64}(pq)_{66,0} + \frac{9}{16}(pq)_{101,0} + \frac{3}{16}(pq)_{116,0} + \frac{3}{32}(pq)_{130,0}$$

$$+ \frac{39}{16}(p^2)_{0,-2} - \frac{1107}{128}(p^2)_{66,-2} + \frac{9}{128}(q^2)_{16,2} + \frac{51}{16}(p^2)_{101,-2} - \frac{15}{16}(p^2)_{116,-2} + \frac{21}{64}(p^2)_{130,-2} - \frac{3}{64}(q^2)_{130,2} \Big] +$$

$$= n'^2 a^2 \varepsilon' \left(\frac{3}{2^2} - \frac{783}{2^6} m^2 - \frac{459}{2^3} m^3 - \frac{130681}{2^8\, 3} m^4 - \quad \right)$$

$$+ n'^2 a^2 \varepsilon'^3 \left(\frac{15}{2^3} - \frac{5361}{2^6} m^2 + \quad \right) +$$

On en tire immédiatement la partie correspondante de P, et en dérivant par rapport à n, il vient

$$J = n a^2 \Big[\quad + \left(-\frac{1}{2} m^2 + 1\, m^3 + \frac{1225}{2^6} m^4 + \frac{6193}{2^6} m^5 + \frac{93223}{2^5\, 3^2} m^6 \right) \varepsilon'^2 + \left(-\frac{5}{2^3} m^2 + \frac{5}{2^2} m^3 + \frac{8735}{2^7} m^4 \right) \varepsilon'^4 + \quad \Big],$$

valeur exacte jusqu'aux termes du huitième ordre inclusivement, si l'on néglige le terme en $\varepsilon'^6 m^2$

Enfin, cherchons la partie de J qui dépend de β', β'', et aussi ε' On a

$$\frac{\partial U}{\partial \beta'} = n'^2 a^2 \alpha \left(\frac{5}{16} p^3 \theta^3 \rho'^4 e^{-3\lambda'} + \quad + \frac{3}{16} p^2 q \theta \rho'^4 e^{-\lambda'} + \quad \right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta'} = n'^2 a^2 \alpha^2 \left(\frac{35}{128} p^4 \theta^4 \rho'^5 e^{-4\lambda'} + \quad + \frac{5}{32} p^3 q \theta^2 \rho'^5 e^{-2\lambda'} + \quad + \frac{9}{64} p^2 q^2 \rho'^5 \right),$$

et, par suite, en négligeant ε'^4 et m^2 dans les parenthèses,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \beta'}\right)_0 = n'^2 a^2 \alpha \beta' \left\{ \frac{3}{8}(p^2q)_{200,-1} + \ldots + \varepsilon'^2 \left[\frac{3}{4}(p^2q)_{200,-1} + \frac{9}{16}(p^2q)_{200,-1} + \frac{3}{16}(pq^2)_{200,1} + \frac{3}{32}(p^2q)_{310,-1} + \ldots \right] \right\}$$

$$= n'^2 a^2 \alpha \beta' \left[\frac{225}{2^8} m + \ldots + \left(-\frac{75}{2^6} + \frac{225}{2^2} m + \ldots \right) \varepsilon'^2 + \ldots \right],$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \beta''}\right)_0 = n'^2 a^2 \alpha^2 \left\{ \frac{9}{64}(p^2q^2)_{0,0} + \ldots + \varepsilon'^2 \left[\frac{45}{64}(p^2q^2)_{0,0} + \ldots \right] + \ldots \right\}$$

$$= n'^2 a^2 \alpha^2 \left[\frac{9}{2^6} + 0\, m + \ldots + \left(\frac{45}{2^6} + 0\, m + \ldots \right) \varepsilon'^2 + \ldots \right],$$

il en résulte comme plus haut, avec une approximation qui pourrait encore être portée plus loin,

$$J = na^2 \left\{ \ldots + \alpha^2 \beta'^2 \left[\frac{825}{2^9} m^3 + \left(\frac{25}{2^4} m^2 - \frac{1025}{2^6} m^3 \right) \varepsilon'^2 \right] + \alpha^2 \beta'' \left[-\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2^2} m^3 + \left(-\frac{15}{2^3} m^2 + \frac{15}{2^2} m^3 \right) \varepsilon'^2 \right] + \ldots \right\}$$

Il serait facile de réunir maintenant les diverses parties déterminées successivement de la fonction J.

147. Les dérivées partielles de J, J_1, J_2 par rapport à n, ε, γ, s'obtiennent immédiatement. On trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}\frac{\partial J}{\partial n} = & -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} m^2 - \frac{4}{3} m^3 - \frac{1072}{2^2 \cdot 3} m^4 - \frac{1435}{2^3 \cdot 3^2} m^5 - \frac{16967}{2^6 \cdot 3^2} m^6 - \frac{5819}{2^2 \cdot 3^4} m^7 \\
& + \varepsilon^2 \left(\frac{7}{2^3} m^2 + \frac{347}{2^4} m^3 + \frac{66265}{2^9} m^4 + \frac{5387}{2^2 \cdot 3} m^5 \right) \\
& + \gamma^2 \left(-\frac{7}{2^2} m^2 + \frac{43}{2^4} m^3 + \frac{3935}{2^9} m^4 + \frac{1835}{2^6 \cdot 3} m^5 \right) \\
& + \varepsilon'^2 \left(\frac{7}{2 \cdot 3} m^2 - \frac{7}{3} m^3 - \frac{16562}{2^6 \cdot 3} m^4 - \frac{9461}{2^4} m^5 \right) \\
& + \varepsilon^4 \left(\frac{7}{2^6 \cdot 3} m^2 - \frac{3431}{2^4 \cdot 3} m^3 \right) + \varepsilon^2 \gamma^2 \left(-\frac{35}{2^4 \cdot 3} m^2 - \frac{185}{2^2 \cdot 3} m^3 \right) \\
& + \gamma^4 \left(\frac{7}{2^4 \cdot 3} m^2 - \frac{337}{2^4 \cdot 3} m^3 \right) + \varepsilon^2 \varepsilon'^2 \left(\frac{21}{2^4} m^2 + \frac{1333}{2^4} m^3 \right) \\
& + \gamma^2 \varepsilon'^2 \left(-\frac{21}{2^4} m^2 + \frac{97}{2^4} m^3 \right) + \varepsilon'^4 \left(\frac{35}{2^3 \cdot 3} m^2 - \frac{35}{2^2 \cdot 3} m^3 \right) \\
& + \alpha^2 \beta'^2 \left(\frac{1025}{2^8} m \ldots \right) + \alpha^2 \beta'' \left(\frac{11}{2^3} m^2 - \frac{11}{2^2} m^3 \right) + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{na^2\varepsilon}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = -\frac{3}{2^2}m^2 - \frac{201}{2^4}m^3 - \frac{13095}{2^8}m^4 - \frac{134515}{2^{10}}m^5$$

$$+\varepsilon^2\left(-\frac{1}{2^3}m^2 + \frac{691}{2^6}m^3\right) + \gamma^2\left(\frac{5}{2^3}m^2 + \frac{71}{2^3}m^3\right)$$

$$+\varepsilon'^2\left(-\frac{9}{2^3}m^2 - \frac{789}{2^4}m^3\right) + \dots,$$

$$\frac{1}{na^2\gamma}\frac{\partial J}{\partial \gamma} = \frac{3}{2^2}m^2 - \frac{33}{2^4}m^3 - \frac{513}{2^8}m^4 - \frac{2587}{2^{10}}m^5$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{5}{2^3}m^2 + \frac{71}{2^3}m^3\right) + \gamma^2\left(-\frac{1}{2^2}m^2 + \frac{77}{2^6}m^3\right)$$

$$+\varepsilon'^2\left(\frac{9}{2^3}m^2 - \frac{69}{2^4}m^3\right) + \dots,$$

$$\frac{1}{a^2\varepsilon^2}\frac{\partial J_1}{\partial n} = \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{2711}{2^7\cdot 3}m^2 - \frac{14303}{2^7\cdot 3}m^3 - \frac{1287091}{2^{12}\cdot 3}m^4$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1611}{2^7}m^2\right) + \gamma^2\left(\frac{595}{2^5\cdot 3}m^2\right) + \varepsilon'^2\left(\frac{721}{2^7}m^2\right)$$

$$+\frac{1}{2^4\cdot 3}\varepsilon^4 + \frac{5}{2^6\cdot 3}\varepsilon^2\gamma^2 - \frac{5}{2^7\cdot 3}\gamma^4 + \dots,$$

$$\frac{1}{na^2\varepsilon}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon} = -1 + \frac{369}{2^6}m^2 + \frac{2469}{2^7}m^3 + \frac{72687}{2^{11}}m^4$$

$$+\varepsilon^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{693}{2^5}m^2\right) + \gamma^2\left(-\frac{85}{2^4}m^2\right) + \varepsilon'^2\left(-\frac{309}{2^6}m^2\right)$$

$$-\frac{3}{2^3}\varepsilon^4 \quad \frac{5}{2^4}\varepsilon^2\gamma^2 + \frac{5}{2^6}\gamma^4 + \dots,$$

$$\frac{1}{na^2\varepsilon^2\gamma}\frac{\partial J_1}{\partial \gamma} = -\frac{85}{2^4}m^2 - \frac{5}{2^4}\varepsilon^2 + \frac{5}{2^5}\gamma^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{a^2\gamma^2}\frac{\partial J_2}{\partial n} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{145}{2^7\cdot 3}m^2 - \frac{665}{2^7\cdot 3}m^3 + \frac{28061}{2^{12}\cdot 3}m^4$$

$$+\varepsilon^2\left(-\frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1627}{2^8}m^2\right) + \gamma^2\left(-\frac{1001}{2^9\cdot 3}m^2\right)$$

$$+\varepsilon'^2\left(\frac{105}{2^7}m^2\right) - \frac{13}{2^7\cdot 3}\varepsilon^4 + \frac{35}{2^6\cdot 3}\varepsilon^2\gamma^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{na^2\varepsilon\gamma^2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \quad \frac{679}{2^7}m^2 + \frac{43}{2^6}\varepsilon^2 - \frac{35}{2^5}\gamma^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{na^2\gamma}\frac{\partial J_2}{\partial \gamma} = -1 - \frac{39}{2^6}m^2 + \frac{231}{2^7}m^3 - \frac{5097}{2^{11}}m^4$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2} - \frac{679}{2^7}m^2\right) + \gamma^2\left(\frac{143}{2^7}m^2\right) + \varepsilon'^2\left(-\frac{15}{2^6}m^2\right)$$

$$+\frac{43}{2^6}\varepsilon^4 - \frac{35}{2^4}\varepsilon^2\gamma^2 + \dots$$

Soit alors D le determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial J}{\partial n} & \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial J}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial J_1}{\partial n} & \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial J_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial J_2}{\partial n} & \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial J_2}{\partial \gamma} \end{vmatrix},$$

on a inversement

$$D\frac{\partial n}{\partial J} = \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon}\frac{\partial J_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon}\frac{\partial J_1}{\partial \gamma}, \qquad D\frac{\partial n}{\partial J_1} = \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon}\frac{\partial J}{\partial \gamma} - \frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\frac{\partial J_2}{\partial \gamma}, \qquad ,$$

et l'on obtient avec une exactitude qui pourrait etre facilement augmentee

$$a^2\frac{\partial n}{\partial J} = -3 - 6m^2 + 12m^3 + \frac{2841}{2^5}m^4 - \frac{27}{2^2}m^2\varepsilon^2 + \frac{27}{2^2}m^2\gamma^2 - \frac{21}{2}m^2\varepsilon'^2 + \quad ,$$

$$a^2\frac{\partial n}{\partial J_1} = \frac{9}{2^2}m^2 + \frac{603}{2^4}m^3 + \frac{21879}{2^7}m^4 - \frac{3}{2^2}m^2\varepsilon^2 - 3m^2\gamma^2 + \frac{27}{2^3}m^2\varepsilon'^2 + \quad ,$$

$$a^2\frac{\partial n}{\partial J_2} = -\frac{9}{2^2}m^2 + \frac{99}{2^4}m^3 + \frac{1369}{2^7}m^4 - 3m^2\varepsilon^2 + \frac{3}{2^2}m^2\gamma^2 - \frac{27}{2^3}m^2\varepsilon'^2 + \quad ,$$

$$na^2\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial J} = -\frac{1}{2} + \frac{1107}{2^6}m^2 + \frac{1}{2^3}\varepsilon^2 + \quad ,$$

$$na^2\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial J_1} = -1 - \frac{369}{2^6}m^2 - \frac{2469}{2^7}m^3 - \frac{281535}{2^{12}}m^4 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1783}{2^8}m^2\right) + \frac{85}{2^4}m^2\gamma^2 + \frac{309}{2^6}m^2\varepsilon'^2 + \frac{1}{2^3}\varepsilon^4 + \frac{5}{2^4}\varepsilon^2\gamma^2 \quad \frac{5}{2^6}\gamma^4 + \quad ,$$

$$na^2\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial J_2} = \frac{79}{2^4}m^2 + \frac{5}{2^6}\varepsilon^2 - \frac{5}{2^5}\gamma^2 +$$

$$na^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial J} = -\frac{1}{2} - \frac{117}{2^6}m^2 - \frac{1}{2^2}\varepsilon^2 + \quad ,$$

$$na^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial J_1} = -\frac{1}{2} + \frac{397}{2^7}m^2 - \frac{13}{2^5}\varepsilon^2 + \frac{35}{2^6}\gamma^2 + . \quad ,$$

$$na^2\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial J_2} = -1 + \frac{39}{2^6}m^2 - \frac{231}{2^7}m^3 + \frac{9873}{2^{12}}m^4$$
$$+ \varepsilon^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{757}{2^7}m^2\right) - \frac{191}{2^7}m^2\gamma^2 + \frac{45}{2^6}m^2\varepsilon'^2$$
$$- \frac{59}{2^6}\varepsilon^4 + \frac{35}{2^4}\varepsilon^2\gamma^2 + \dots$$

En se servant maintenant des relations telles que

$$\frac{\partial n_1}{\partial J} = \frac{\partial n_1}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial J} + \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial J} + \frac{\partial n_1}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial J},$$

on vérifie d'abord facilement que l'on a

$$\frac{\partial n_1}{\partial J} = \frac{\partial n}{\partial J_1}, \qquad \frac{\partial n_2}{\partial J} = \frac{\partial n}{\partial J_2},$$

et l'on trouve encore, sans que nos données nous permettent une plus grande approximation,

$$a^2\frac{\partial n_1}{\partial J_1} = \frac{3}{2^2}m^2 + \frac{627}{2^5}m^3 + \dots,$$
$$a^2\frac{\partial n_1}{\partial J_2} = a^2\frac{\partial n_2}{\partial J_1} = 3m^2 + \frac{93}{2^4}m^3 + \dots,$$
$$a^2\frac{\partial n_2}{\partial J_2} = -\frac{3}{2^2}m^2 + \frac{75}{2^5}m^3 + \dots$$

Finalement, les coefficients des équations (6) sont

$$M = -3 - 6m^2 + 12m^3 + \frac{2841}{2^5}m^4 - \frac{27}{2^2}m^2\varepsilon^2 + \text{[illegible]}$$
$$- \frac{21}{2}m^2\varepsilon'^2 + \dots$$

$$M_1 = M' = -3 - \frac{33}{2^2}m^2 - \frac{411}{2^4}m^3 - \frac{10515}{2^7}m^4 - 6m^2\varepsilon^2 + \frac{39}{2^2}m^2\gamma^2$$
$$+ \frac{111}{2^3}m^2\varepsilon'^2 + \dots,$$

$$M_2 = M'' = -3 - \frac{15}{2^2}m^2 + \frac{93}{2^4}m^3 + \frac{10995}{2^7}m^4 - \frac{15}{2^2}m^2\varepsilon^2 + 6m^2\gamma^2$$
$$- \frac{57}{2^3}m^2\varepsilon'^2 + \dots,$$

$$M'_1 = -3 - \frac{39}{2^2}m^2 - \frac{1401}{2^6}m^3 + \dots,$$

$$M'_2 = M''_1 = -3 - 3m^2 - \frac{417}{2^4}m^3 + \dots,$$

$$M''_2 = -3 - \frac{9}{2^2}m^2 + \frac{63}{2^5}m^3 + \dots,$$

$$P = -\frac{1}{2} + \frac{1107}{2^6} m^2 + \frac{1}{2^3} \varepsilon^2 + \ldots,$$

$$P' = \frac{1}{2} + \frac{369}{2^7} m^2 + \frac{2469}{2^8} m^3 - \frac{281235}{2^{11}} m^4$$
$$+ \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{169}{2^5} m^2 \right) - \frac{85}{2^5} m^2 \gamma^2 - \frac{307}{2^7} m^2 \varepsilon'^2$$
$$- \frac{5}{2^5} \varepsilon^2 \gamma^2 + \frac{5}{2^7} \gamma^4 + \ldots,$$

$$P'' = -\frac{1}{2} + \frac{791}{2^6} m^2 - \frac{1}{2^5} \varepsilon^2 + \frac{5}{2^5} \gamma^2 + \ldots,$$

$$Q = -\frac{1}{2} - \frac{117}{2^6} m^2 - \frac{1}{2^2} \varepsilon^2 + \ldots,$$

$$Q' = -\frac{631}{2^7} m^2 + \frac{33}{2^5} \varepsilon^2 - \frac{35}{2^5} \gamma^2 + \ldots,$$

$$Q'' = \frac{1}{2} - \frac{39}{2^7} m^2 + \frac{231}{2^8} m^3 - \frac{9873}{2^{13}} m^4$$
$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{757}{2^8} m^2 \right) + \gamma^2 \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{43}{2^8} m^2 \right) - \frac{45}{2^7} m^2 \varepsilon'^2$$
$$+ \frac{59}{2^7} \varepsilon^4 - \frac{39}{2^5} \varepsilon^2 \gamma^2 + \ldots$$

Les valeurs numériques de ces coefficients s'obtiennent sans peine quand on connaît celles des dérivées partielles par rapport à n, ε, γ, des fonctions J, J_1, J_2, n_1, n_2. Les développements numériques de ces fonctions par rapport à ε^2 et γ^2 sont faciles à trouver comme nous l'avons déjà dit, si l'on a résolu numériquement le problème de la théorie solaire, mais il restera la difficulté qui provient des dérivations par rapport à n. Pour les effectuer, il faudra passer par l'intermédiaire de séries ordonnées suivant les puissances de m, qu'il sera nécessaire de pousser quelquefois assez loin, en raison de leur peu de convergence, ou bien encore, il faudra faire usage, comme M. Brown, de procédés spéciaux assez peu simples, sur lesquels nous n'insisterons pas, car ils ne paraissent aucunement indispensables, si du moins on ne rejette pas complètement la solution analytique. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point à la fin du Chapitre suivant.

Quoi qu'il en soit, voici ces valeurs, avec une approximation qui

era presque toujours suffisante

$$
\begin{array}{lll}
M = -3{,}028, & M' = -3{,}073, & M'' = -3{,}017, \\
M_1 = -3{,}073, & M'_1 = -3{,}098, & M''_1 = -3{,}037, \\
M_2 = -3{,}017 & M'_2 = -3{,}037, & M''_2 = -3{,}009, \\
P = -0{,}31 & P' = +0{,}224, & P'' = -0{,}36, \\
Q = -0{,}51, & Q' = -0{,}07, & Q' = +0{,}497
\end{array}
$$

148 Pour en terminer avec l'application directe des théories du Chapitre II, nous pouvons dès maintenant traiter le problème des accélérations séculaires, ou, plus généralement, rechercher l'influence sur le mouvement de la Lune de la variation séculaire de l'excentricité ε' de l'orbite solaire Appelons $\varepsilon'_0 t$ la partie séculaire proprement dite de rang un de cette excentricité il est clair que pour en tenir compte, sans toutefois dépasser le premier ordre par rapport au coefficient très petit ε'_0, il faudra augmenter la fonction de forces U d'une fonction perturbatrice R égale à $\varepsilon'_0 t \frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}$ Cette fonction se compose d'une partie séculaire et de termes mixtes de rang un, c'est-à-dire de termes purement périodiques multipliés par t, les équations (5) ou (6) montrent que ces derniers termes ne produiront dans les éléments de la théorie solaire de la Lune que des inégalités analogues ou purement périodiques, contenant toutes le très petit facteur ε'_0, et que nous laisserons de côté pour l'instant Mais nous allons rechercher spécialement l'effet de la partie séculaire de la fonction R, soit $\varepsilon'_0 t \left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}\right)_0$

Adressons-nous aux équations canoniques (5) elles nous montrent d'abord que ce terme est sans effet sur J, J_1, J_2, et par suite sur les quantités n, ε, γ qui en dépendent En second lieu, nous voyons que les longitudes N, N_1, N_2 prennent des accroissements δN, δN_1, δN_2, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\,\delta n\,\varepsilon'_0\,t^2, \quad \frac{1}{2}\,\delta n_1\,\varepsilon'_0\,t^2, \quad \frac{1}{2}\,\delta n_2\,\varepsilon'_0\,t^2,$$

en faisant

$$\delta n = -\frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}\right)_0, \qquad \delta n_1 = -\frac{\partial}{\partial J_1}\left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}\right)_0, \qquad \delta n_2 = -\frac{\partial}{\partial J_2}\left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}\right)_0$$

Or, d'après la formule (14) du n° 11 (4°), on a non seulement

$$\frac{\partial K}{\partial J} = n, \qquad \frac{\partial K}{\partial J_1} = n_1, \qquad \frac{\partial K}{\partial J_2} = n_2,$$

mais aussi

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon'} = -\left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}\right)_0$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire

$$\delta n = \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon'}\right), \qquad \delta n_1 = \left(\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'}\right), \qquad \delta n_2 = \left(\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'}\right),$$

l'emploi des parenthèses indiquant que n, n_1, n_2 sont regardés comme fonctions de $J, J_1, J_2, \varepsilon'$.

Si alors on revient aux expressions primitives de n_1, n_2 à l'aide de n, e, γ, ε', et que l'on marque sans parenthèses leurs dérivées partielles par rapport à ε', on a évidemment

$$0 = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon'} = \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon'}\right) + \frac{\partial n}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial n}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial n}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'},$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'} = \left(\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'}\right) + \frac{\partial n_1}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial n_1}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial n_1}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'},$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'} = \left(\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'}\right) + \frac{\partial n_2}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial n_2}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial n_2}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'}.$$

Il vient donc finalement

$$\delta n = \qquad -\frac{\partial n}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'},$$

$$\delta n_1 = \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n_1}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n_1}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n_1}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'},$$

$$\delta n_2 = \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n_2}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n_2}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} - \frac{\partial n_2}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'},$$

et ces formules résolvent complètement le problème : les coefficients $\frac{\partial n}{\partial J}$, ... sont connus par ce qui précède, et le calcul analytique ou numérique des diverses dérivées par rapport à ε' ne présente aucune difficulté.

On trouve en particulier, avec les données des deux paragraphes

précédents

$$\begin{aligned}\frac{\delta n}{n e'} = & -3m^2 + 6m^3 + \frac{3483}{2^5} m^4 + \frac{19347}{2^6} m^5 + \frac{214715}{2^9 \cdot 3} m^6 \\ & + \varepsilon^2 \left(-\frac{27}{2^3} m^2 - \frac{2367}{2^4} m^3 \right) + \gamma^2 \left(\frac{27}{2^3} m^2 - \frac{207}{2^4} m^3 \right) \\ & + e'^2 \left(-\frac{15}{2} m^2 + 15 m^3 + \frac{25389}{2^5} m^4 \right) \\ & + \alpha^2 \beta'^2 \left(\frac{75}{2^4} m^2 - \frac{3075}{2^5} m^3 \right) + \alpha^2 \beta^2 \left(-\frac{45}{2^2} m^2 + \frac{15}{2} m \right) + \dots ,\end{aligned}$$

$$\frac{\delta n_1}{n e'} = \frac{9}{2^2} m^2 + \frac{753}{2^4} m + \dots , \qquad \frac{\delta n_2}{n e'} = -\frac{9}{2^2} m^2 + \frac{105}{2^4} m + \dots$$

En prenant le siècle julien pour unité de temps et faisant

$$\varepsilon'_0 = -0,00248\, e',$$

M. Brown donne

$$\frac{1}{2} \delta n \varepsilon'_0 = 5'',82, \qquad \frac{1}{2} \delta n_1 e'_0 = -38'',3, \qquad \frac{1}{2} \delta n_2 e'_0 = 6'',46.$$

Nous pouvons encore envisager d'un point de vue absolument différent le problème général proposé au commencement de ce paragraphe. D'après les considérations développées au n° 11 (5°), il est permis, pour tenir compte de la variation $e'_0 t$ de l'excentricité e', de remplacer simplement ε' par $\varepsilon' + \varepsilon'_0 t$ dans les expressions des coordonnées de la Lune telles que les donne la théorie solaire, à la condition de modifier en même temps les éléments de cette théorie de la façon suivante.

Le paramètre désigné par a' à la fin du n° 11 (5°) est ici e', le coefficient n' de t dans l'argument N' en est indépendant, la quantité $J_{\varepsilon'}$ est déterminée, à sa partie constante près, par la relation

$$\frac{dJ_{\varepsilon'}}{dt} = -\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'} + \left(\frac{\delta U}{\delta \varepsilon'} \right)_0,$$

d'ailleurs cette partie constante, égale à

$$\left(X' \frac{\partial X}{\partial \varepsilon'} + Y' \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon'} + Z' \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon'} \right)_0,$$

est nulle pour la même raison que J_n, J_ε, J_γ; on voit donc que $J_{\varepsilon'}$ est une fonction purement périodique.

Prenons pour éléments du mouvement de la Lune les quantités J, J_1, J_2, N, N_1, N_2, les J_{-k} du passage ici rappelé sont ou nuls ou indépendants de ε', et par suite on voit que pour déterminer les variations des éléments J, J_1, …, N_2, il suffit de remplacer dans les équations (5), R par $\varepsilon'_0 J_{\varepsilon'}$. Mais il est essentiel d'observer qu'en même temps, il faudra regarder n, n_1, n_2, ε, γ, comme des fonctions de J, J_1, J_2 et de ε', cette dernière quantité étant remplacée par sa nouvelle valeur $\varepsilon' + \varepsilon'_0 t$.

La fonction R actuelle est alors entièrement périodique ou mixte, et ne donne pour les éléments du mouvement que des inégalités de même nature, absolument négligeables. Par suite, nous voyons d'abord que les éléments J, J_1, J_2 ne subissent aucune variation : c'est le théorème de Newcomb.

Si maintenant nous revenons aux éléments n, ε, γ et à n_1, n_2, et que nous appelions $\varepsilon'_0 t\, \delta n$, …, $\varepsilon'_0 t\, \delta n_2$ leurs accroissements, on aura, en reprenant les notations employées ci-dessus,

$$\delta n = \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon'}\right), \quad \delta n_1 = \left(\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'}\right), \quad \delta n_2 = \left(\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'}\right), \quad \delta \varepsilon = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon'}\right), \quad \delta \gamma = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon'}\right),$$

et finalement, les longitudes N, N_1, N_2 prendront les accroissements

$$\delta N = \frac{1}{2}\delta n\, \varepsilon'_0 t^2, \qquad \delta N_1 = \frac{1}{2}\delta n_1\, \varepsilon'_0 t^2, \qquad \delta N_2 = \frac{1}{2}\delta n_2\, \varepsilon'_0 t^2$$

Ces derniers résultats sont identiques à ceux que nous avons obtenus par la première méthode, puisque ce sont les seules inégalités en t^2 qui figureront dans les coordonnées.

Les autres résultats relatifs aux variations périodiques ou mixtes de rang un des éléments sont différents, puisque les coordonnées sont exprimées de façons différentes dans les deux cas. On a d'ailleurs aussi

$$\delta \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'} = -\frac{341}{26} m^2 \varepsilon \varepsilon' + \ldots,$$

$$\delta \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial \gamma}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial \gamma}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon'} = -\frac{77}{26} m^2 \gamma \varepsilon' + \ldots$$

et il n'en résulte aucun effet appréciable.

Finalement, pour tenir compte de $\varepsilon'_0 t$, il suffira de prendre en considération les accroissements δN, δN_1, δN_2, et de remplacer dans les coordonnées ε' par $\varepsilon' + \varepsilon'_0 t$, quand il en pourra résulter un effet sensible.

Les coefficients $\varepsilon'_0 \delta n$, $\varepsilon'_0 \delta n_1$, $\varepsilon'_0 \delta n_2$, rapportés au siècle comme unité, sont les *accélérations séculaires* des longitudes N, N_1, N_2.

CHAPITRE XXV.

LES INÉGALITÉS SECONDAIRES DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

149. Nous avons dit au n° 120 de quelles actions secondaires il était nécessaire de tenir compte pour compléter la théorie solaire du mouvement de la Lune, et nous venons de voir comment, connaissant les fonctions perturbatrices R qui correspondent à ces diverses actions, on obtiendra les variations qu'il faut donner aux éléments n, N, ε_1, ε_{-1}, γ_1, γ_{-1}, qui définissent la théorie solaire, pour qu'elle représente la théorie complète sous la même forme. Ces variations sont toutes assez petites pour qu'on puisse négliger entièrement leurs carrés et leurs produits : c'est ce que nous avons déjà supposé implicitement quand nous avons remplacé les expressions analytiques des coefficients des équations (6) du Chapitre précédent par leurs valeurs numériques, calculées avec les valeurs fixes données à n, ε, γ.

Les fonctions R se composent de termes de la forme

$$n'^2 a^2 \mathrm{A},$$

avec

$$\mathrm{A} = \theta^k \varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_{-1}^{p_{-1}} \gamma_1^{q_1} \gamma_{-1}^{q_{-1}} \mathrm{A}',$$

la quantité A' ne dépendant plus d'autre élément lunaire que n (ou, ce qui est équivalent, a).

En omettant partout les signes superflus de sommation, et faisant

$$p = p_1 - p_{-1}, \qquad q = q_1 - q_{-1},$$
$$p' = p_1 + p_{-1}, \qquad q' = q_1 + q_{-1},$$

on a

$$\theta \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta} = n'^2 a^2 k \mathrm{A}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_{-1} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varepsilon_{-1}} = n'^2 a^2 p \mathrm{A}, \quad \gamma_1 \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \gamma_1} - \gamma_{-1} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \gamma_{-1}} = n'^2 a^2 q \mathrm{A},$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_{-1} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varepsilon_{-1}} = n'^2 a^2 p' \mathrm{A}, \quad \gamma_1 \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \gamma_1} + \gamma_{-1} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \gamma_{-1}} = n'^2 a^2 q' \mathrm{A},$$

on a aussi

$$n\frac{\partial R}{\partial n} = n'^2 a^2 j A,$$

en déterminant j d'après la règle générale de dérivation par rapport à n, c'est-à-dire que si l'on regarde A comme fonction de m et de α, on a

$$jA = -(1+m)m\frac{\partial A}{\partial m} - \frac{2}{3}\,\frac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}\left(2A+\alpha\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right),$$

le facteur $\dfrac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}$ étant d'ailleurs égal à

$$1-\frac{1}{2}m^2+m^3-\frac{5}{4}m^4+\dots$$

Reprenons l'emploi de la caractéristique D pour désigner la dérivation par rapport à $i(n-n')t$, inversement, D^{-1}, D^{-2}, ... seront les signes d'intégration correspondants.

La première et la quatrième des équations rappelées ci-dessus donnent alors immédiatement

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta n}{n} = (kM+pM'+qM'')\dfrac{m^2}{1+m}D^{-1}A, \\[2ex] \delta(iN) = (kM+pM'+qM'')m^2D^{-2}A-(jM+pP+q'Q)\dfrac{m^2}{1+m}D^{-1}A, \end{cases}$$

et l'on a de même

$$\frac{\delta(n-n_1)}{n} = (kM_1+pM'_1+qM''_1)\frac{m^2}{1+m}D^{-1}A$$

$$\frac{\delta(n-n_2)}{n} = (kM_2+pM'_2+qM''_2)\frac{m^2}{1+m}D^{-1}A$$

Remarquons maintenant que l'équation en $\dfrac{d\varepsilon_1}{i\,dt}$, par exemple, soit

$$\frac{d\varepsilon_1}{i\,dt} = (n-n_1)\varepsilon_1+F_1,$$

devient

$$\frac{d(\delta\varepsilon_1)}{i\,dt} = (n-n_1)\delta\varepsilon_1+\varepsilon_1\delta(n-n_1)+F_1,$$

ou encore

$$\frac{d(\varepsilon_{-1}\delta\varepsilon_1)}{i\,dt} = \varepsilon_1\varepsilon_{-1}\delta(n-n_1)+\varepsilon_{-1}F_1,$$

il vient par suite, d'une façon évidente,

$$(2)\quad\begin{cases}
\delta\varepsilon_1 = (k M_1 + p M_1' + q M_1'') m^2 \varepsilon_1 D^{-2} A \\
\qquad + \left(-\dfrac{p_{-1} P'}{\varepsilon_1 \varepsilon_{-1}} + k P + q P'' - j M' - q' Q'\right) \dfrac{m^2}{1+m} \varepsilon_1 D^{-1} A, \\
\delta\varepsilon_{-1} = -(k M_1 + p M_1' + q M_1'') m^2 \varepsilon_{-1} D^{-2} A \\
\qquad + \left(\dfrac{p_1 P'}{\varepsilon_1 \varepsilon_{-1}} + k P + q P'' + j M' + q' Q'\right) \dfrac{m^2}{1+m} \varepsilon_{-1} D^{-1} A, \\
\delta\gamma_1 = (k M_2 + p M_2' + q M_2'') m^2 \gamma_1 D^{-2} A \\
\qquad + \left(-\dfrac{q_{-1} Q''}{\gamma_1 \gamma_{-1}} + k Q + p Q' - j M'' - p' P''\right) \dfrac{m^2}{1+m} \gamma_1 D^{-1} A, \\
\delta\gamma_{-1} = -(k M_2 + p M_2' + q M_2'') m^2 \gamma_{-1} D^{-2} A \\
\qquad + \left(\dfrac{q_1 Q''}{\gamma_1 \gamma_{-1}} + k Q + p Q' + j M'' + p' P''\right) \dfrac{m^2}{1+m} \gamma_{-1} D^{-1} A,
\end{cases}$$

ou bien, si l'on préfère,

$$(2\ bis)\quad\begin{cases}
\delta\varepsilon = \left(\dfrac{1}{2} \dfrac{p P'}{\varepsilon_1 \varepsilon_{-1}} + k P + q P''\right) \dfrac{m^2}{1+m} \varepsilon D^{-1} A, \\
\delta t (N - N_1) = (k M_1 + p M_1' + q M_1'') m^2 D^{-2} A \\
\qquad - \left(\dfrac{1}{2} \dfrac{p' P'}{\varepsilon_1 \varepsilon_{-1}} + j M' + q' Q'\right) \dfrac{m^2}{1+m} D^{-1} A, \\
\delta\gamma = \left(\dfrac{1}{2} \dfrac{q Q''}{\gamma_1 \gamma_{-1}} + k Q + p Q'\right) \dfrac{m^2}{1+m} \gamma D^{-1} A, \\
\delta t (N - N_2) = (k M_2 + p M_2' + q M_2'') m^2 D^{-2} A \\
\qquad - \left(\dfrac{1}{2} \dfrac{q' Q''}{\gamma_1 \gamma_{-1}} + j M'' + p' P''\right) \dfrac{m^2}{1+m} D^{-1} A.
\end{cases}$$

On doit remarquer encore les deux relations

$$\delta n_1 = \frac{\partial n_1}{\partial n} \delta n + \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial n_1}{\partial \gamma} \delta\gamma,$$

$$\delta n_2 = \frac{\partial n_2}{\partial n} \delta n + \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial n_2}{\partial \gamma} \delta\gamma,$$

qui relient entre eux les accroissements correspondants δn_1, δn_2, δn,

ε, $\delta\gamma$, quels qu'ils soient. On a d'ailleurs

$$\frac{\partial n_1}{\partial n} = -\frac{3}{2^2}m^2 - \frac{201}{2^4}m^3 - \ldots = -0{,}015,$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial e} = n e\left(-\frac{3}{2^3}m^2 - \frac{627}{2^5}m^3 - \ldots\right) = -0{,}020\,n e,$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \gamma} = n\gamma\left(-3m^2 - \frac{93}{2^4}m^3 - \ldots\right) = -0{,}025\,n\gamma,$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial n} = \frac{5}{2^2}m^2 - \frac{33}{2^4}m - \ldots = +0{,}004,$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon} = n\varepsilon\left(-3m^2 - \frac{93}{2^4}m^3 - \ldots\right) = -0{,}024\,n\varepsilon,$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \gamma} = n\gamma\left(\frac{3}{2^2}m^2 - \frac{75}{2^3}m^3 - \ldots\right) = +0{,}004\,n\gamma.$$

De la même façon, on a toujours

$$\delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1\left[\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} + \delta t(N - N_1)\right], \qquad \delta\varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-1}\left[\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} - \delta t(N - N_1)\right]$$

$$\delta\gamma_1 = \gamma_1\left[\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \delta t(N - N_2)\right], \qquad \delta\gamma_{-1} = \gamma_{-1}\left[\frac{\delta\gamma}{\gamma} - \delta t(N - N_2)\right]$$

Suivant nos conventions ordinaires, toutes les quadratures indiquées seront effectuées sans addition de constantes superflues.

La quantité A' doit être regardée en général comme le produit d'une constante par $e^{i\omega}$, en désignant par ω un argument connu, indépendant des arguments lunaires, linéaire par rapport au temps, et dans lequel le coefficient de t sera $s(n - n')$, s pouvant d'ailleurs être nul. Dans ces conditions, le terme A sera généralement périodique, et l'on aura

$$D^{-1}A = \frac{A}{k + pg + qh + s}, \qquad D^{-2}A = \frac{A}{(k + pg + qh + s)^2}.$$

Le terme A deviendra exceptionnellement constant si l'on a

$$k = p = q = s = 0,$$

et alors

$$D^{-1}A = \frac{A n t}{1 + m}, \qquad D^{-2}A = -\frac{1}{2}\,\frac{A n^2 t^2}{(1 + m)^2},$$

mais les formules se réduisent à

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\delta n = \delta n_1 = \delta n_2 = \delta\varepsilon = \delta\gamma = 0,\\
&\delta(i\mathrm{N}) = -(j\mathrm{M} + p'\mathrm{P} + q'\mathrm{Q})\frac{m^2}{1+m}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A},\\
&\delta i(\mathrm{N}-\mathrm{N}_1) = -\left(\frac{1}{2}\frac{p'\mathrm{P}'}{\varepsilon_1\varepsilon_{-1}} + j\mathrm{M}' + q'\mathrm{Q}'\right)\frac{m^2}{1+m}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A},\\
&\delta i(\mathrm{N}-\mathrm{N}_2) = -\left(\frac{1}{2}\frac{q'\mathrm{Q}''}{\gamma_1\gamma_{-1}} + j\mathrm{M}'' + p'\mathrm{P}''\right)\frac{m^2}{1+m}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A},\\
&\delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1\,\delta i(\mathrm{N}-\mathrm{N}_1), \qquad \delta\varepsilon_{-1} = -\varepsilon_{-1}\,\delta i(\mathrm{N}-\mathrm{N}_2),\\
&\delta\gamma_1 = \gamma_1\,\delta i(\mathrm{N}-\mathrm{N}_2), \qquad \delta\gamma_{-1} = -\gamma_{-1}\,\delta i(\mathrm{N}-\mathrm{N}_2)
\end{aligned}
\right.
$$

On peut rencontrer des termes constants $n'^2a^2\mathrm{A}$ d'une autre nature, en supposant que les nombres k, pg, qh, s ont une somme nulle, sans être séparément tous nuls : ceci se présentera si l'argument connu ω se trouve en fait lié à $\mathrm{N}-\mathrm{N}'$, G, H par une relation convenable. Nous supposerons alors expressément que l'argument

$$k(\mathrm{N}-\mathrm{N}') + p\mathrm{G} + q\mathrm{H} + \omega$$

est non seulement constant, mais nul. Or, il existe nécessairement, à côté du terme considéré, un autre terme qui en est le conjugué de forme, et qui, par suite, en vertu de l'hypothèse particulière faite, lui est égal ; pour ces deux termes, les nombres k, p, q sont respectivement égaux et de signes contraires, de sorte que, grâce à la concomitance de ces deux termes, tout se passe de la même façon que pour les termes constants ordinaires.

Supposons maintenant que R contienne un terme tel que

$$n'^2a^2\mathrm{A}\times n't,$$

A étant de la même forme que précédemment, périodique ou exceptionnellement constant. Il faut alors, dans les formules générales, remplacer A par $\mathrm{A}n't$, et, par suite, en faisant sortir le temps hors des signes d'intégration,

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A} \quad\text{par}\quad n't\,\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A} + im\,\mathrm{D}^{-2}\mathrm{A},\\
&\mathrm{D}^{-2}\mathrm{A} \quad\text{par}\quad n't\,\mathrm{D}^{-2}\mathrm{A} + 2im\,\mathrm{D}^{-3}\mathrm{A}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si A est constant, cette transformation paraît sans valeur, mais nous sera cependant utile.

Une fois obtenues les variations des éléments n, N, ... qui corres-

pondent à la fonction R, on peut, ou bien en rester là, en se bornant à remplacer formellement n, N, par $n+\delta n$, $N+\delta N$, dans les expressions des coordonnées de la Lune fournies par la théorie solaire, ou bien on peut développer le calcul, et chercher les inégalités mêmes de ces coordonnées. En appelant v, s, ϖ la longitude, la latitude et la parallaxe, nous avons fait précédemment

$$iv = iN + \lambda, \qquad is = \sigma, \qquad \sin\varpi = \frac{b}{a}\rho,$$

en désignant par b le rayon équatorial terrestre, pour avoir les expressions explicites des coordonnées en fonction des anciens éléments, il faudra donc en premier lieu augmenter λ de $\delta(iN)$, et ρ de

$$-\frac{\delta a}{a}\rho \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\frac{\delta n}{n}\frac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}\rho$$

en second lieu, si B est un terme quelconque de λ, σ, ρ de la forme

$$B'\theta^k \varepsilon_1^{p_1}\varepsilon_{-1}^{p_{-1}}\gamma_1^{q_1}\gamma_{-1}^{q_{-1}},$$

B′ étant fonction de m et de α (ainsi que de ε'_1, ε'_{-1}), on devra l'augmenter de

$$\left[k\,\delta(iN) + j\frac{\delta n}{n} + p_1\frac{\delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + p_{-1}\frac{\delta\varepsilon_{-1}}{\varepsilon_{-1}} + q_1\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_1} + q_{-1}\frac{\delta\gamma_{-1}}{\gamma_{-1}}\right]B,$$

en faisant ici

$$jB = -(1+m)m\frac{\partial B}{\partial m} - \frac{2}{3}\frac{(1+m)^2}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}\alpha\frac{\partial B}{\partial\alpha}$$

Mais il sera préférable encore d'opérer de la façon suivante : partageons les inégalités δn, δN, en deux parties, de telle façon que $\delta n = \delta_0 n + \delta_1 n$, $\delta N = \delta_0 N + \delta_1 N$, , on appliquera la première méthode à $\delta_0 n$, $\delta_0 N$, et la seconde à $\delta_1 n$, $\delta_1 N$, On remplacera donc formellement n, N, par $n+\delta_0 n$, $N+\delta_0 N$, , dans les expressions des coordonnées de la Lune fournies par la théorie solaire, et on leur ajoutera les inégalités explicites dues à $\delta_1 n$, $\delta_1 N$, . Il conviendra, en procédant ainsi, de prendre pour $\delta_0 n$, $\delta_0 N$, $\delta_0\varepsilon$, $\delta_0 N_1$, $\delta_0\gamma$, $\delta_0 N_2$ les parties constantes et purement séculaires, augmentées des termes à très longue période, de δn, δN,

Enfin, un changement de variables très simple et suffisamment évident devra encore être appliqué aux éléments n, N, pour ramener à la valeur n le coefficient de t dans N, et pour faire disparaître, s'il y a lieu, les termes constants ou proportionnels à t dans $\delta\varepsilon$, de même que les termes proportionnels à ε_1 ou à $\varepsilon_1 t$ dans δv encore, et les termes proportionnels à γ_1 ou à $\gamma_1 t$ dans δs de cette façon, la partie non périodique de v, les termes qui dépendent du simple argument G dans v, et ceux qui dépendent du simple argument H dans s, auront, ainsi qu'il convient, la même forme que dans un mouvement keplérien d'éléments n, N, ε, G, γ, H, de signification bien connue

En particulier, revenons sur le cas de A constant, et les formules (3) En changeant n en $n + \delta n$, avec

$$\delta n = n \frac{m^2}{(1+m)^2}(j\text{M} + p'\text{P} + q'\text{Q})\text{A}, \tag{5}$$

on voit que l'on fera disparaître l'inégalité δN, proportionnelle au temps, mais en même temps, tenant compte de cette modification, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\text{N}_1 = nt\frac{m^2}{(1+m)^2}\Big[&p'\Big(\frac{1}{2}\frac{\text{P}'}{e_1 e_{-1}} - \text{P} + \frac{\partial n_1}{\partial n}\text{P}\Big) + q'\Big(\text{Q}' - \text{Q} + \frac{\partial n_1}{\partial n}\text{Q}\Big) \\ &+ j\Big(\text{M}' - \text{M} + \frac{\partial n_1}{\partial n}\text{M}\Big)\Big]\text{A}, \\ \delta\text{N}_2 = nt\frac{m^2}{(1+m)^2}\Big[&q'\Big(\frac{1}{2}\frac{\text{Q}''}{\gamma_1\gamma_{-1}} - \text{Q} + \frac{\partial n_2}{\partial n}\text{Q}\Big) + p'\Big(\text{P}'' - \text{P} + \frac{\partial n_2}{\partial n}\text{P}\Big) \\ &+ j\Big(\text{M}'' - \text{M} + \frac{\partial n_2}{\partial n}\text{M}\Big)\Big]\text{A}, \end{aligned}\right.$$

et l'on observera que les facteurs $\text{M}' - \text{M} + \frac{\partial n_1}{\partial n}\text{M}$, $\text{M}'' - \text{M} + \frac{\partial n_2}{\partial n}\text{M}$, sont respectivement égaux à

$$-a^2\left(\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \text{J}} + \frac{\partial n_1}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \text{J}}\right), \qquad -a^2\left(\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \text{I}} + \frac{\partial n_2}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \text{I}}\right)$$

Ce que nous venons de dire suffit pour faire voir que le calcul de l'ensemble des inégalités secondaires du mouvement de la Lune dues aux diverses fonctions perturbatrices R, est un travail considérable et particulièrement minutieux, si l'on veut obtenir une grande précision, comme l'a fait M Brown, d'une façon définitive Le nombre des inégalités qui sont sensibles au centième de seconde d'arc près

est considérable, mais très peu d'entre elles atteignent ou dépassent une seconde.

Nous nous bornerons nécessairement, dans ce qui suit, à un exposé des méthodes générales à suivre pour déterminer les différentes fonctions R et leur effet, et à quelques indications sur le calcul approché des inégalités les plus importantes.

150. Nous allons examiner successivement les effets des diverses actions secondaires énumérées au n° 120, et étudier tout d'abord l'action des planètes. Celle-ci s'exerce de deux façons : en premier lieu, la fonction de forces qui définit le mouvement de la Lune, et que nous avons déterminée au n° 3, contient une partie proportionnelle à la masse de chaque planète (ou système planétaire), et de cette partie résulte ce qu'on appelle l'*action directe* de cette planète ; en second lieu, nous devons tenir compte des perturbations qu'il faut ajouter au mouvement purement keplérien attribué au Soleil S pour représenter son mouvement réel, et puisque ces perturbations sont dues aux planètes, on obtient ainsi ce qu'on appelle l'*action indirecte*, et comme réfléchie par la Terre, des planètes.

A ces actions nous joindrons encore celle produite par le rétablissement de la véritable valeur de la constante fM'. Cette dernière action est facile à définir. Comme on a très sensiblement

$$n'^2 a'^3 = f(M' + M_0 + M),$$

il faut, dans la fonction U du n° 120, remplacer fM' non plus par $n'^2 a'^3$, mais par $n'^2 a'^3 (1 + \mu)$, en faisant

$$\mu = -\frac{M_0 + M}{M'} = -\frac{1}{330000},$$

en chiffres ronds.

Ceci revient donc à introduire la fonction perturbatrice

$$R = \mu n'^2 a^2 \left[\frac{1}{4}(xy + 2z^2)\rho'^3 + \frac{3}{8}x^2\rho'^3 e^{-2l'} + \frac{3}{8}y^2\rho'^3 e^{2l'}\right] + \ldots$$

Sans en chercher l'effet pour l'instant, envisageons l'action indirecte des planètes. Elle résulte, si l'on veut, de la variation séculaire $\varepsilon'_0 t$ de l'excentricité de l'orbite solaire, de la variation séculaire $\varphi'_0 t$ du périgée solaire, des perturbations périodiques $\delta v'$ et $\delta r'$ de la longitude v' et du rayon vecteur r', enfin de la latitude s' du Soleil au-

dessus du plan GX'Y', qui est celui de l'écliptique moyenne à une certaine date origine, par exemple 1850, 0, l'axe GX' étant dirigé vers l'équinoxe moyen correspondant

Nous avons déjà vu quelle était l'influence de la variation séculaire de l'excentricité, mais nous allons la reprendre dans l'étude générale actuelle La fonction perturbatrice correspondante est $\varepsilon'_0 t \frac{\delta U}{\delta \varepsilon'}$, et de même celle qui correspond à l'action du mouvement du périgée solaire est $\varphi'_0 t \frac{\delta U}{\delta \varphi'}$ Réunissons-les ensemble en faisant

$$\nu = \frac{\varepsilon'_0}{n'\varepsilon'}, \qquad \nu' = \frac{\varphi'_0}{n},$$

et soit, pour abréger l'écriture, ∇ l'opération

$$\nu\left(\varepsilon'_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon'_{-1}}\right) - \nu' i \left(\varepsilon'_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon'_1} - \varepsilon'_{-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon'_{-1}}\right),$$

on aura

$$R = n'^2 a^2 n't \left[\frac{1}{4}(xy + 2z^2)\nabla \rho'^3 + \frac{3}{8} x^2 \nabla(\rho'^3 e^{-2l}) + \frac{3}{8} y^2 \nabla(\rho'^3 e^{2l'})\right] + \dots$$

On a d'ailleurs, d'après la théorie du mouvement de la Terre,

$$\nu = -[6,597], \qquad \nu' = [6,954]$$

Pour déterminer de même l'action des perturbations périodiques $\delta r'$ et $\delta v'$ du rayon vecteur et de la longitude du Soleil, il faut évidemment prendre une fonction perturbatrice égale à

$$\frac{\delta U}{\delta r'} \delta r' + \frac{\delta U}{\delta v'} \delta v',$$

soit, en introduisant plutôt la perturbation $\delta u'$ du logarithme du rayon vecteur, égale à $\frac{\delta r'}{r'}$,

$$\begin{aligned} R = {} & n'^2 a^2 \left[-\frac{3}{4}(xy + 2z^2)\rho'^3 - \frac{9}{8} x^2 \rho'^3 e^{-2l} - \frac{9}{8} y^2 \rho'^3 e^{2l'}\right] \delta u' \\ & + n'^2 a^2 \left[\frac{3}{4} x^2 \rho'^3 e^{-2l} + \frac{3}{4} y^2 \rho'^3 e^{2l'}\right] i \, \delta v' + \dots \end{aligned}$$

Envisageons maintenant l'effet de la latitude s' du Soleil A cet effet, imaginons tout d'abord que l'orbite du Soleil ne soit plus tout

entière dans le plan $GX'Y'$ comme nous l'avons supposé jusqu'ici En nommant X', Y', Z' les trois coordonnées rectangulaires du Soleil, il faut, dans la fonction U du n° 120, faire actuellement

$$\cos H = \frac{1}{rr'}(XX' + YY' + ZZ'),$$

ou bien, en introduisant la latitude s', et en négligeant son carré,

$$\cos H = \frac{1}{rr'}(XX' + YY') + \frac{Z}{r} s'$$

Si alors on supposait que l'orbite du Soleil fût encore keplerienne, mais avec une inclinaison j' et une longitude du nœud ϑ', telles que (le carré de j' étant toujours négligé)

$$\gamma'_1 = \frac{1}{2} j' e^{i(N'-\vartheta')}, \qquad \gamma'_{-1} = \frac{1}{2} j' e^{-i(N'-\vartheta')},$$

un simple changement de coordonnées nous ferait connaître ce que deviennent les coordonnées de la Lune fournies par la théorie solaire ordinaire Il est évident en particulier que la parallaxe ne change pas, tandis que la longitude v et la latitude s prennent les accroissements

$$\delta v = -j' \operatorname{tang} s \cos(v - \vartheta'), \qquad \delta s = j' \sin(v - \vartheta'),$$

de sorte que l'on a aussi

$$\delta\lambda = -\operatorname{th}\sigma(\gamma'_1 \theta e^{\lambda} + \gamma'_{-1} \theta^{-1} e^{-\lambda}),$$
$$\delta\sigma = \gamma'_1 \theta e^{\lambda} - \gamma'_{-1} \theta^{-1} e^{-\lambda}$$

Mais la latitude s' ne correspond pas en réalité à l'hypothèse précédente elle provient du déplacement séculaire de l'écliptique moyenne, et en outre de très petites perturbations périodiques, $\delta s'$, fournies comme $\delta u'$ et $\delta v'$ par la théorie du mouvement de la Terre Si χ est la longitude du nœud de l'écliptique moyenne mobile par rapport au plan fixe $GX'Y'$ défini plus haut, et si k désigne l'inclinaison correspondante, on a donc

$$s' = k \sin(v' - \chi) + \delta s',$$

et la fonction perturbatrice qui définit l'action de cette latitude sera, d'après ce qui précède,

$$R = \frac{Z}{r} s' \frac{\partial U}{\partial(\cos H)} = -3 n'^2 a^2 \rho'^3 \frac{r \cos H}{a} z i s' + \quad ,$$

soit

$$R = n'^2 a^2 \left(-\frac{3}{2} x z \rho'^3 e^{-\lambda'} - \frac{3}{2} y z \rho'^3 e^{\lambda'}\right) i s + \ldots$$

On peut d'ailleurs prendre λ sous la forme $\kappa n't$, avec

$$\kappa = [7,3604]$$

et l'on a

$$l = 173'',5 - 8'',7t,$$

l'unité étant toujours l'année julienne.

Si l'on fait encore

$$\kappa_1 = \frac{l}{2} e^{i(N'-l)}, \qquad \kappa_{-1} = \frac{l}{2} e^{-i(N'-l)},$$

on a

$$i s' = n't(\kappa_1 e^{\lambda'} - \kappa_{-1} e^{-\lambda'}) + i \delta s'.$$

Examinons enfin l'action directe des planètes. Soit une planète P'' de masse M'', en nous reportant aux nos 120 et 121, appelons Δ, X'', Y'', Z'', la longueur du vecteur GP'', et ses projections sur les axes TX, TY, TZ, nommons de plus H'' l'angle des vecteurs TL et GP''. D'après le no 5, la fonction perturbatrice qui définit l'action de la planète P'' sur la Lune sera

$$R = R_2 + R_3 + \ldots,$$

en faisant

$$R_2 = f M'' \frac{r^2}{\Delta^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H'' - \frac{1}{2}\right),$$

$$R_3 = f M'' \beta' \frac{r^3}{\Delta^4}\left(\frac{5}{2}\cos^3 H'' - \frac{3}{2}\cos H''\right),$$

et l'on a

$$r \Delta \cos H'' = X X'' + Y Y'' + Z Z''.$$

En employant une écriture symbolique de signification évidente, on vérifie facilement que l'on a

$$R_2 = \frac{1}{2} f M'' \left(X \frac{\partial}{\partial X''} + Y \frac{\partial}{\partial Y''} + Z \frac{\partial}{\partial Z''}\right)^2 \left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

$$R_3 = -\frac{1}{6} f M'' \beta' \left(X \frac{\partial}{\partial X''} + Y \frac{\partial}{\partial Y''} + Z \frac{\partial}{\partial Z''}\right)^3 \left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

les dérivations s'appliquent à $\frac{1}{\Delta}$, et il en sera de même dans ce qui suit. Ceci s'obtient d'ailleurs immédiatement, en partant de la définition directe de la fonction R, que l'on peut prendre égale à

$$f\mathrm{M}''\left(\frac{\mathrm{M}_0+\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0}\,\frac{1}{\mathrm{LP}''}+\frac{\mathrm{M}_0+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\,\frac{1}{\mathrm{TP}''}\right).$$

Faisons

$$\begin{aligned} \mathrm{X}+i\mathrm{Y}&=\mathrm{P}, & \mathrm{X}''+i\mathrm{Y}''&=\mathrm{P}'',\\ \mathrm{X}-i\mathrm{Y}&=\mathrm{Q}, & \mathrm{X}''-i\mathrm{Y}''&=\mathrm{Q}'',\\ i\mathrm{Z}&=\mathrm{S}, & i\mathrm{Z}''&=\mathrm{S}'', \end{aligned}$$

l'opération

$$\mathrm{X}\frac{\partial}{\partial\mathrm{X}''}+\mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial\mathrm{Y}''}+\mathrm{Z}\frac{\partial}{\partial\mathrm{Z}''}$$

est remplacée par

$$\mathrm{P}\frac{\partial}{\partial\mathrm{P}''}+\mathrm{Q}\frac{\partial}{\partial\mathrm{Q}''}+\mathrm{S}\frac{\partial}{\partial\mathrm{S}''},$$

d'autre part, on constate que

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{\partial\mathrm{S}''^2}=4\,\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{\partial\mathrm{P}''\,\partial\mathrm{Q}''},$$

ce qui n'est au surplus que la transformation de l'équation de Laplace bien connue

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{X}''^2}+\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{Y}''^2}+\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{Z}''^2}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right)=0.$$

Il vient par suite, en éliminant les dérivées d'ordre supérieur au second par rapport à S''

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_2=f\mathrm{M}''\Bigg[&\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}^2\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{P}''^2}+\mathrm{Q}^2\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{Q}''^2}\right)+(\mathrm{PQ}+2\mathrm{S}^2)\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{P}''\,\partial\mathrm{Q}''}\\ &+\mathrm{S}\left(\mathrm{P}\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{P}''\,\partial\mathrm{S}''}+\mathrm{Q}\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{Q}''\,\partial\mathrm{S}''}\right)\Bigg]\left(\frac{1}{\Delta}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_3=f\mathrm{M}''\beta'\Bigg[&-\frac{1}{6}\left(\mathrm{P}^3\frac{\partial^3}{\partial\mathrm{P}''^3}+\mathrm{Q}^3\frac{\partial^3}{\partial\mathrm{Q}''^3}\right)\\ &-\frac{1}{2}(\mathrm{PQ}+4\mathrm{S}^2)\left(\mathrm{P}\frac{\partial^3}{\partial\mathrm{P}''^2\,\partial\mathrm{Q}''}+\mathrm{Q}\frac{\partial^3}{\partial\mathrm{P}''\,\partial\mathrm{Q}''^2}\right)\\ &-\frac{1}{2}\mathrm{S}\left(\mathrm{P}^2\frac{\partial^3}{\partial\mathrm{P}''^2\,\partial\mathrm{S}''}+\mathrm{Q}^2\frac{\partial^3}{\partial\mathrm{Q}''^2\,\partial\mathrm{S}''}\right)\\ &-\mathrm{S}\left(\mathrm{PQ}+\frac{2}{3}\mathrm{S}^2\right)\frac{\partial^3}{\partial\mathrm{P}''\,\partial\mathrm{Q}''\,\partial\mathrm{S}''}\Bigg]\left(\frac{1}{\Delta}\right), \end{aligned}$$

Appelons actuellement r_1 et r'' les longueurs des vecteurs SG et SP'', puis x_1, y_1, z_1, et x'', y'', z'' leurs projections sur les directions fixes des axes, et faisons

$$p_1 = x_1 + iy_1, \qquad p'' = x'' + iy'',$$
$$q_1 = x_1 - iy_1, \qquad q'' = x'' - iy'',$$
$$s'' = iz'',$$

d'après le choix des axes, on a $z_1 = 0$, si du moins, comme il convient ici, on regarde les mouvements de G et de P'' autour de S comme purement képlériens.

On a

$$P'' = p'' - p_1,$$
$$Q'' = q'' - q_1$$
$$S'' = s'',$$

et si l'on regarde Δ comme une fonction de p_1, q_1, p'', q'', s'', il vient

$$\frac{\partial}{\partial P''}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial Q''}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$$

Soit v_1 la longitude du vecteur SG, supposons l'orbite de la planète P'' autour du Soleil S définie par son inclinaison J'' et la longitude θ'' de son nœud ascendant, et faisons

$$\gamma''_1 = \sin\frac{J''}{2}e^{-i\theta''}, \qquad \gamma''_{-1} = \sin\frac{J''}{2}e^{i\theta''},$$

en appelant encore v'' la longitude dans l'orbite pour la planète P'', on a

$$\Delta^2 = r_1^2 + r''^2 - r_1 r''(1 - \gamma''_1\gamma''_{-1})[e^{i(v_1 - v'')} + e^{-i(v_1 - v'')}]$$
$$- r_1 r''[\gamma''^2_1 e^{i(v_1 + v'')} + \gamma''^2_{-1} e^{-i(v_1 + v'')}],$$

et

$$s'' = r''\cos\frac{J''}{2}(\gamma''_1 e^{iv''} - \gamma''_{-1} e^{-iv''})$$

On constate alors sans peine l'identité

$$\left[\frac{\partial}{\partial(iv_1)} - \frac{1}{2}\left(\gamma''_1\frac{\partial}{\partial\gamma''_1} + \gamma''_{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma''_{-1}}\right) + \frac{1}{\gamma''_1}\frac{\partial}{\partial\gamma''_{-1}}\right]\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -\frac{s'' r_1 e^{-i\theta_1}\cos\frac{J''}{2}}{\gamma''_1\Delta^3},$$

et par suite, puisque l'on a

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{\partial S''} = \frac{S''}{\Delta^3},$$

on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial S''}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -\frac{\gamma''_1 e^{iv_1}}{r_1 \cos\frac{J''}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial(iv_1)} - \frac{1}{2}\left(\gamma''_1 \frac{\partial}{\partial\gamma''_1} + \gamma''_{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma''_{-1}}\right) + \frac{1}{\gamma''_1}\frac{\partial}{\partial\gamma''_{-1}}\right]\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

et aussi bien, en changeant i en $-i$ et observant que S'' est une quantité purement imaginaire,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{S}''}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -\frac{\gamma''_{-1} e^{-iv_1}}{r_1 \cos\frac{J''}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial(iv_1)} + \frac{1}{2}\left(\gamma''_1 \frac{\partial}{\partial\gamma''_1} + \gamma''_{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma''_{-1}}\right) - \frac{1}{\gamma''_{-1}}\frac{\partial}{\partial\gamma''_1}\right]\left(\frac{1}{\Delta}\right).$$

On voit ainsi que, pour former la fonction R, il suffira d'exprimer $\frac{1}{\Delta}$ à l'aide de p_1, q_1 (ou r_1, v_1), r'', v'', γ''_1, γ''_{-1}, et d'effectuer des différentiations de cette fonction par rapport à p_1, q_1 (ou r_1, v_1), γ''_1, γ''_{-1}.

En désignant par f une fonction de la variable quelconque x, faisons comme d'habitude $D_x f = x\frac{\partial f}{\partial x}$, puis posons

$$\lambda_1 = e^{iv_1},$$

de sorte que

$$p_1 = r_1\lambda_1, \qquad q_1 = r_1\lambda_1^{-1},$$

il en résulte

$$D_{p_1} = \frac{1}{2}(D_{r_1} + D_{\lambda_1}), \qquad D_{q_1} = \frac{1}{2}(D_{r_1} - D_{\lambda_1}).$$

D'autre part, on a

$$p_1^2\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} = D_{p_1}(D_{p_1} - 1), \qquad p_1^3\frac{\partial^3}{\partial p_1^3} = D_{p_1}(D_{p_1} - 1)(D_{p_1} - 2), \qquad \ldots;$$

enfin, on voit que

$$D_{p_1}\left(\frac{e^{iv_1}}{r_1}\right) = D_{q_1}\left(\frac{e^{-iv_1}}{r_1}\right) = 0, \quad D_{q_1}\left(\frac{e^{iv_1}}{r_1}\right) = -\frac{e^{iv_1}}{r_1}, \quad D_{p_1}\left(\frac{e^{-iv_1}}{r_1}\right) = -\frac{e^{-iv_1}}{r_1};$$

si donc on représente $\sec\frac{J''}{2}$ par k'', et que l'on fasse

$$D_{\lambda_1} - \frac{1}{2}(D_{\gamma''_1} + D_{\gamma''_{-1}}) = D_1, \qquad D_{\lambda_1} + \frac{1}{2}(D_{\gamma''_1} + D_{\gamma''_{-1}}) = D_{-1},$$

il vient

$$\begin{aligned}R_2 = fM'\Big[&\frac{P^2}{2p_1^2}D_{p_1}(D_{p_1}-1)+\frac{Q^2}{2q_1^2}D_{q_1}(D_{q_1}-1)+\frac{PQ+2S^2}{p_1q_1}D_{p_1}D_{q_1}\\ &+\lambda'\frac{PS}{r_1^2}D_{p_1}\Big(\gamma''_1 D_1-\frac{1}{\gamma''_{-1}}D_{-1}\Big)\\ &+\lambda''\frac{QS}{r_1^2}D_{q_1}\Big(\gamma''_{-1}D_{-1}-\frac{1}{\gamma''_1}D_{1}\Big)\Big]\Big(\frac{1}{\Delta}\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_3 = fM''\beta'\Big[&\frac{P^3}{6p_1^3}D_{p_1}(D_{p_1}-1)(D_{p_1}-2)+\frac{Q^3}{6q_1^3}D_{q_1}(D_{q_1}-1)(D_{q_1}-2)\\ &+\frac{PQ+4S^2}{2p_1q_1}\Big\{\frac{P}{p_1}D_{p_1}D_{q_1}(D_{p_1}-1)+\frac{Q}{q_1}D_{p_1}D_{q_1}(D_{q_1}-1)\Big\}\\ &+\frac{\lambda''S}{2r_1^2}\Big\{\frac{P^2}{p_1}D_{p_1}(D_{p_1}-1)+\frac{PQ-\frac{2}{3}S^2}{q_1}D_{p_1}(D_{q_1}-1)\Big\}\\ &\times\Big(\gamma''_1 D_1+\frac{1}{\gamma''_1}D_{-1}\Big)\\ &+\frac{\lambda'S}{2r_1^2}\Big\{\frac{Q^2}{q_1}D_{q_1}(D_{q_1}-1)+\frac{PQ+\frac{2}{3}S^2}{p_1}D_{q_1}(D_{p_1}-1)\Big\}\\ &\times\Big(\gamma'_{-1}D_{-1}-\frac{1}{\gamma''_1}D_{1}\Big)\Big]\Big(\frac{1}{\Delta}\Big),\end{aligned}$$

Revenons maintenant aux notations du n° 121 ; on a

$$r_1 = r' = \frac{a'}{\rho'},\qquad v_1 = v'+\pi = N'+\frac{\lambda'}{i}+\pi,\qquad fM' = n'^2a'^3,$$

$$P = a\,x\,e^{iN'},\qquad Q = a\,y\,e^{-iN'},\qquad S = a\,z,$$

$$p_1 = -r'e^{iN'+\lambda'},\qquad q_1 = -r'e^{-iN'-\lambda'},$$

et, par suite, on peut écrire

$$R_2 = n'^2a^2\frac{M''}{M'}\big[(xy+2z^2)U_1+x^2U_2+y^2U_3+xzU_4+yzU_5\big],$$

$$\begin{aligned}R_3 = n'^2a^2\frac{M''}{M'}\alpha\beta'\Big[&x^3U_6+y^3U_7+x(xy+4z^2)U_8+y(xy+4z^2)U_9\\ &+x^2zU_{10}+y^2zU_{11}+z\Big(xy+\frac{2}{3}z^2\Big)U_{12}\Big],\end{aligned}$$

en faisant

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \quad a'\rho'^2 D_{p_1} D_{q_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_2 &= \quad \frac{1}{2} a'\rho'^2 e^{-2l'} D_{p_1}(D_{p_1}-1)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_3 &= \quad \frac{1}{2} a'\rho'^2 e^{2l'} D_{q_1}(D_{q_1}-1)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_4 &= \quad \lambda'' a'\rho'^2 e^{iN'} D_{p_1}\left(\gamma''_1 D_1 + \frac{1}{\gamma''_{-1}} D_{\gamma_{-1}}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_5 &= \quad \lambda'' a'\rho'^2 e^{-iN'} D_{q_1}\left(\gamma''_{-1} D_{-1} - \frac{1}{\gamma''_1} D_{\gamma_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_6 &= -\frac{1}{6} a'\rho'^3 e^{-3l'} D_{p_1}(D_{p_1}-1)(D_{p_1}-2)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_7 &= -\frac{1}{6} a'\rho'^3 e^{3l'} D_{q_1}(D_{q_1}-1)(D_{q_1}-2)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_8 &= -\frac{1}{2} a'\rho'^3 e^{-l'} D_{p_1} D_{q_1}(D_{p_1}-1)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_9 &= -\frac{1}{2} a'\rho'^3 e^{l'} D_{p_1} D_{q_1}(D_{q_1}-1)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_{10} &= -\frac{\lambda''}{2} a'\rho'^3 e^{iN'-l'} D_{p_1}(D_{p_1}-1)\left(\gamma''_1 D_1 + \frac{1}{\gamma''_{-1}} D_{\gamma_{-1}}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_{11} &= -\frac{\lambda''}{2} a'\rho'^3 e^{-iN'+l'} D_{q_1}(D_{q_1}-1)\left(\gamma''_{-1} D_{-1} - \frac{1}{\gamma''_1} D_{\gamma_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right),\\
U_{12} &= -\frac{\lambda''}{2} a'\rho'^3 e^{iN'+l'} D_{p_1}(D_{q_1}-1)\left(\gamma''_1 D_1 + \frac{1}{\gamma''_{-1}} D_{\gamma_{-1}}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right)\\
&\qquad -\frac{\lambda''}{2} a'\rho'^3 e^{-iN'-l'} D_{q_1}(D_{p_1}-1)\left(\gamma''_{-1} D_{-1} - \frac{1}{\gamma''_1} D_{\gamma_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right),
\end{aligned}
$$

Ces quantités se déduisent par de simples différentiations du développement de la fonction $\frac{1}{\Delta}$, inverse de la distance du centre de gravité G du système Terre-Lune à la planète P'', c'est-à-dire encore partie principale de la fonction perturbatrice qui définit l'action de P'' sur la Terre. Cette fonction est donc seule nécessaire pour obtenir les perturbations de la Lune comme celles de la Terre, ainsi que l'a montré M. Brown, dont nous avons suivi l'analyse dans ce qui précède.

Considérons donc la fonction $\frac{1}{\Delta}$: nous en avons obtenu le développement au Chapitre XIII, mais il est nécessaire de modifier un peu les notations. Désignons par n'', a'', ε'', l'', G'' le moyen mouvement, le demi-grand axe, l'excentricité, la longitude moyenne et l'anomalie

p_1, λ_1 définies plus haut, on a

$$D_a\left(\frac{1}{\Delta}\right) = D_{\lambda_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right), \qquad D_{\lambda'_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = D_{\lambda_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

et, par suite,

$$D_{p_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a'a''}}\sum\left(D_{a'} - \frac{1}{2} + q'\right)C,$$

$$D_{q_1}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a'a''}}\sum\left(D_a - \frac{1}{2} - q'\right)C,$$

nous aurons finalement les formules suivantes, où la caractéristique D s'applique uniquement aux coefficients de Laplace

$$U_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^2\sum\left(D^2 - D - q'^2 + \frac{1}{4}\right)C,$$

$$U_2 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^2 e^{-2\lambda'}\sum\left[D^2 - 3D + q'^2 + \frac{5}{4} + q'(2D-3)\right]C,$$

$$U_3 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^2 e^{2\lambda'}\sum\left[D^2 - 3D + q'^2 + \frac{5}{4} - q'(2D-3)\right]C,$$

$$U_4 = \frac{k''}{4}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^2 e^{iN'}\sum\left[\gamma''_1(2q' - q''_1 - q''_{-1}) + \frac{2q''_{-1}}{\gamma''_{-1}}\right]\left(D - \frac{1}{2} + q'\right)C,$$

$$U_5 = \frac{k''}{4}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^2 e^{-iN'}\sum\left[\gamma''_{-1}(2q' + q''_1 + q''_{-1}) - \frac{2q''_1}{\gamma''_1}\right]\left(D - \frac{1}{2} - q'\right)C,$$

$$U_6 = -\frac{1}{48}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^3 e^{-3\lambda'}\sum\left[D^3 - \frac{15}{2}D^2 + \left(3q'^2 + \frac{59}{4}\right)D - \left(\frac{15}{2}q'^2 + \frac{45}{8}\right)\right.$$
$$\left. + q'\left(3D^2 - 15D + q'^2 + \frac{59}{4}\right)\right]C,$$

$$U_9 = -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^3 e^{-\lambda'}\sum\left[D^3 - \frac{7}{2}D^2 - \left(q'^2 - \frac{11}{4}\right)D + \left(\frac{5}{2}q'^2 - \frac{5}{8}\right)\right.$$
$$\left. + q'\left(D^2 - D - q'^2 + \frac{1}{4}\right)\right]C,$$

$$U_{10} = -\frac{k''}{16}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^3 e^{iN'-\lambda'}\sum\left[\gamma''_1(2q' - q''_1 - q''_{-1}) + \frac{2q''_{-1}}{\gamma''_{-1}}\right]$$
$$\times\left[D^2 - 3D + q'^2 + \frac{5}{4} + q'(2D-3)\right]C,$$

$$U_{12} = -\frac{k''}{16}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\rho'^3 e^{iN+\lambda'}\sum\left[\gamma''_1(2q' - q''_1 - q''_{-1}) + \frac{2q''_{-1}}{\gamma''_{-1}}\right]$$
$$\times\left[D^2 - 3D - q'^2 + \frac{5}{4} - 2q'\right]C + \quad ,$$

les valeurs non écrites de U_7, U_9, U_{11}, et de la seconde partie de U_{12} se déduisent immédiatement de U_6, U_8, U_{10}, et de la partie écrite de U_{12} par des transformations évidentes.

Les opérations à effectuer sur les coefficients de Laplace et leurs dérivées peuvent quelquefois amener une certaine perte de précision mais celle-ci n'est pas assez importante pour nuire à l'exactitude des résultats ; on peut d'ailleurs la diminuer en faisant usage de la relation (C) du n° 88.

Rassemblant maintenant les différentes fonctions R rencontrées au cours de ce numéro, nous avons pour déterminer la totalité des actions planétaires l'unique fonction définitive suivante, où l'on a négligé σ, ainsi qu'on peut presque toujours le faire, et où les sommations doivent être étendues à toutes les planètes perturbatrices P″, ainsi qu'à tous les termes C qui en résultent

$$R = n'^2 a^2 [P(xy + 2z^2) + Qx^2 + Q'y^2 + Sxz + S'yz + \dots],$$

avec

$$P = \frac{1}{4}(\mu + n't\nabla - 3\delta u')\rho'^3 + \frac{1}{4}\rho'^2 \sum \frac{M'}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\left(D^2 - D - q'^2 + \frac{1}{4}\right) C,$$

$$Q = \frac{3}{8}(\mu + n't\nabla - 3\delta u' - 2i\delta v')\rho'^3 e^{-2i\lambda'}$$
$$+ \frac{1}{8}\rho'^2 e^{-2i\lambda'} \sum \frac{M''}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\left[D^2 - 3D + q'^2 + \frac{5}{4} + q'(2D - 3)\right] C,$$

$$Q' = \frac{3}{8}(\mu + n't\nabla - 3\delta u' + 2i\delta v')\rho'^3 e^{2i\lambda'}$$
$$+ \frac{1}{8}\rho'^2 e^{2i\lambda'} \sum \frac{M''}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\left[D^2 - 3D + q'^2 + \frac{5}{4} - q'(2D - 3)\right] C,$$

$$S = -\frac{3}{2}[n't(\gamma_1 e^{i\lambda'} - \gamma_{-1} e^{-i\lambda'}) + i\delta s']\rho'^3 e^{-i\lambda'}$$
$$+ \frac{1}{4}\rho'^2 e^{i\lambda'} \sum \frac{M''}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\, k''\left[\gamma''_1(2q' - q''_1 - q''_{-1}) + \frac{2q''_{-1}}{\gamma''_{-1}}\right]$$
$$\times \left(D - \frac{1}{2} + q'\right) C,$$

$$S' = -\frac{3}{2}[n't(\gamma_1 e^{i\lambda'} - \gamma_{-1} e^{-i\lambda'}) + i\delta s']\rho'^3 e^{i\lambda'}$$
$$+ \frac{1}{4}\rho'^2 e^{-i\lambda'} \sum \frac{M''}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\, k''\left[\gamma''_1(2q' + q''_1 + q''_{-1}) - \frac{2q''_1}{\gamma''_1}\right]$$
$$\times \left(D - \frac{1}{2} - q'\right) C,$$

Les fonctions P, Q, Q′, S, S′, … sont complètement indépen-

dantes des éléments du mouvement de la Lune, qui figurent seulement dans leurs coefficients $n'^2 a^2(xy + 2z^2), n'^2 a^2 x^2$, c'est là un point fondamental.

Avant d'aller plus loin, nous ferons encore l'observation suivante. Supposons la planète P″ extrêmement rapprochée du Soleil, et, à la limite, confondue avec lui, ce qui revient à donner à la masse M′ l'accroissement M″. Si l'on regarde le moyen mouvement n' comme invariable, nous savons par le n° 101 que les inégalités $\delta v'$, $\delta s'$ disparaissent, tandis que $\delta u'$ se réduit à une partie constante, égale à $\frac{1}{3}\frac{M''}{M'}$, puisque tel est l'accroissement de $\log a'$. L'action indirecte de la planète P″ résulte ainsi de la simple fonction perturbatrice $\frac{1}{3}\frac{M''}{M'} r' \frac{\delta U}{\delta r'}$.

D'autre part, Δ se réduit à r', et par suite, d'après la forme primitive de la fonction R qui détermine l'action directe de P″, cette fonction n'est autre que $\frac{M''}{M'}$ U (en supprimant le premier terme de la fonction U du n° 120).

L'action totale de la planète P″ est donc déterminée finalement par la fonction $\frac{M''}{M'}\left(U + \frac{1}{3} r' \frac{\delta U}{\delta r'}\right)$, et si, comme au n° 145, on écrit U sous la forme $U_2 + \beta' U_3 + \beta'' U_4 + \ldots$, ceci devient

$$-\frac{M''}{3M'}(\beta' U_3 + 2\beta'' U_4 + \ldots)$$

En particulier, on voit que les termes qui ne contiennent pas σ ont disparu, et c'est ce qu'on peut vérifier facilement sur les formules ci-dessus.

Au surplus, ce résultat était évident *a priori*, puisque, pour tenir compte directement de l'accroissement M″ de la masse du Soleil, il suffit d'augmenter U de $\frac{\delta U}{\delta \sigma}\delta\sigma$, en désignant par $\delta\sigma$ l'accroissement de σ correspondant à M″, c'est-à-dire $-\frac{1}{3}\sigma\frac{M''}{M'}$.

151. Pour calculer effectivement les perturbations planétaires du mouvement de la Lune, il est tout d'abord nécessaire d'avoir les expressions des fonctions $xy + 2z^2$, x^2, y^2, xz, yz. Elles se déduisent sans peine de celles des coordonnées lunaires, et l'on a en particulier, en désignant aussi ces fonctions par

A, B, B′, C, C′,

$$A = xy + 2z^2 = 1 + \frac{43}{2^4} m^4 - m^2(\theta^2 + \theta^{-2})$$

$$+ \left(-2 + \frac{3}{2} m^2 + \frac{369}{2^5} m^3\right)(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})$$

$$+ \left(-\frac{15}{2^2} m - \frac{79}{2^4} m^2\right)(\varepsilon_1 \theta^{-2} + \varepsilon_{-1} \theta^2) - \frac{9}{2} m^2(\varepsilon_1 \theta^2 + \varepsilon_{-1} \theta^{-2})$$

$$+ \left(-1 - \frac{1}{2} m^2\right)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2) + \left(\frac{45}{2^2} m + \frac{621}{2^4} m^2 + \frac{18521}{2^8} m^3\right)(\varepsilon_1^2 \theta^{-2} + \varepsilon_{-1}^2 \theta^2)$$

$$- \frac{13}{2^3} m^2(\varepsilon_1^2 \theta^2 + \varepsilon_{-1}^2 \theta^{-2}) - \frac{225}{2^6} m^2(\varepsilon_1^2 \theta^{-4} + \varepsilon_{-1}^2 \theta^4)$$

$$+ \left(6 + \frac{387}{2^5} m^2 + \frac{3447}{2^6} m^3\right) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} + \left(-\frac{15}{2^2} m - \frac{129}{2^4} m^2\right) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} (\theta^2 + \theta^{-2})$$

$$+ (3 - 2m^2)(\gamma_1^2 + \gamma_{-1}^2) + \left(-\frac{9}{2^2} m - \frac{39}{2^4} m^2 - \frac{1141}{2^8} m^3\right)(\gamma_1^2 \theta^{-2} + \gamma_{-1}^2 \theta^2)$$

$$+ \frac{9}{2^3} m^2(\gamma_1^2 \theta^2 + \gamma_{-1}^2 \theta^{-2}) + \frac{27}{2^6} m^2(\gamma_1^2 \theta^{-4} + \gamma_{-1}^2 \theta^4)$$

$$+ \left(-6 - \frac{27}{2^5} m^2 - \frac{405}{2^6} m^3\right) \gamma_1 \gamma_{-1} + \left(\frac{9}{2^2} m + \frac{101}{2^4} m^2\right) \gamma_1 \gamma_{-1} (\theta^2 + \theta^{-2})$$

$$+ \left(3m^2 - 6m^3 - \frac{309}{2^5} m^4\right)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}) - 7m^2(\varepsilon'_1 \theta^{-2} + \varepsilon'_{-1} \theta^2)$$

$$+ m^2(\varepsilon'_1 \theta^2 + \varepsilon'_{-1} \theta^{-2}) + \left(\frac{21}{2} m + \frac{525}{2^4} m^2\right)(\varepsilon_1 \varepsilon'_1 + \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1})$$

$$+ \left(-\frac{33}{2} m - \frac{653}{2^4} m^2\right)(\varepsilon_1 \varepsilon'_1 \theta^{-2} + \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^2) + \frac{9}{2^3} m^2(\varepsilon_1 \varepsilon'_1 \theta^2 + \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^{-2})$$

$$+ \left(-\frac{21}{2} m - \frac{1089}{2^4} m^2\right)(\varepsilon_1 \varepsilon'_{-1} + \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1)$$

$$+ \left(\frac{15}{2} m - \frac{71}{2^4} m^2\right)(\varepsilon_1 \varepsilon'_{-1} \theta^{-2} + \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^2) - \frac{63}{2^3} m^2(\varepsilon_1 \varepsilon'_{-1} \theta^2 + \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^{-2})$$

$$+ (9m^2 - 18m^3)(\varepsilon'^2_1 + \varepsilon'^2_{-1}) - 34 m^2(\varepsilon'^2_1 \theta^{-2} + \varepsilon'^2_{-1} \theta^2)$$

$$+ (-2m^2 + 4m^3) \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} + 10 m^2 \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} (\theta^2 + \theta^{-2})$$

$$+ \frac{105}{2} m(\varepsilon_1^2 \varepsilon'_1 \theta^{-4} + \varepsilon_{-1}^2 \varepsilon'_{-1} \theta^4) - \frac{45}{2} m(\varepsilon_1^2 \varepsilon'_{-1} \theta^{-2} + \varepsilon_{-1}^2 \varepsilon'_1 \theta^2)$$

$$+ 162 m^2(\varepsilon_1 \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1}) - \frac{21}{2} m(\gamma_1^2 \varepsilon'_1 \theta^{-2} + \gamma_{-1}^2 \varepsilon'_{-1} \theta^2)$$

$$+ \frac{9}{2} m(\gamma_1^2 \varepsilon'_{-1} \theta^{-2} + \gamma_{-1}^2 \varepsilon'_1 \theta^2) - 27 m^2(\gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon'_1 + \gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon'_{-1})$$

$$+ \left(-\frac{63}{2^2} m - \frac{4095}{2^6} m^2\right)(\varepsilon_1 \varepsilon'^2_{-1} + \varepsilon_{-1} \varepsilon'^2_1) + \frac{27}{2} m^2(\varepsilon'^2_1 \varepsilon'_{-1} + \varepsilon'_1 \varepsilon'^2_{-1})$$

$$+ 6 \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}^2 - 36 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1} + 6 \gamma_1^2 \gamma_{-1}^2,$$

$$B = x^2 = -\frac{19}{2^3}m^2 - \frac{10}{3}m^3 - \frac{43}{2\cdot 3^2}m^4 + (1 + 0\,m^3)\theta^2 + \frac{3}{2^3}m^2\theta^4$$

$$+\left(-\frac{45}{2^2}m - \frac{593}{2^4}m^2 - \frac{69883}{2^8\cdot 3}m^3\right)\varepsilon_1 + \left(2 + \frac{3}{2}m^2\right)\varepsilon_1\theta^2 + \frac{15}{2^3}m^2\varepsilon_1\theta^4$$

$$+\left(\frac{55}{2^3}m^2 + \frac{269}{2^3\cdot 3}m^3\right)\varepsilon_{-1} + \left(-6 + \frac{3}{2}m^2\right)\varepsilon_{-1}\theta^2 + \left(\frac{15}{2^2}m + \frac{259}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}\theta^4$$

$$+\left(-30m - \frac{1471}{2^4}m^2\right)\varepsilon_1^2 + \left(\frac{1125}{2^5}m^2 + \frac{15675}{2^6}m^3\right)\varepsilon_1^2\theta^{-2}$$

$$+\left(4 + \frac{15}{2^2}m^2\right)\varepsilon_1^2\theta^2 + \frac{27}{2^2}m^2\varepsilon_1^2\theta^4$$

$$-\frac{1}{2^2}m^2\varepsilon_{-1}^2 + \left(10 - \frac{19}{2^2}m^2 + \frac{529}{2^4}m^3\right)\varepsilon_{-1}^2\theta^2$$

$$+\left(-\frac{15}{2}m - \frac{659}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}^2\theta^4 + \frac{225}{2^4}m^2\varepsilon_{-1}^2\theta^6$$

$$+\left(\frac{75}{2}m + \frac{1045}{2^3}m^2 + \frac{118373}{2^7\cdot 3}m^3\right)\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+\left(-10 - \frac{1413}{2^5}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\theta^2 + \left(15m + \frac{217}{2^2}\right)\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\theta^4$$

$$+\left(-3m + \frac{159}{2^4}m^2\right)\gamma_1^2 + \left(\frac{9}{2^5}m^2 + \frac{201}{2^6}m^3\right)\gamma_1^2\theta^{-2} + \frac{3}{2^2}m^2\gamma_1^2\theta^2$$

$$-2m^2\gamma_{-1}^2 + \left(2 - \frac{19}{2^2}m^2 + \frac{385}{2^6}m\right)\gamma_{-1}^2\theta^2 + \left(\frac{3}{2}m - \frac{77}{2^4}m^2\right)\gamma_{-1}^2\theta^4$$

$$+\left(\frac{3}{2}m + \frac{67}{2^3}m^2 + \frac{3221}{2^7\cdot 3}m^3\right)\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(-2 - \frac{9}{2^5}m^2\right)\gamma_1\gamma_{-1}\theta^2 - \frac{3}{2}m^2\gamma_1\gamma_{-1}\theta^4$$

$$+\left(-\frac{133}{2^3}m^2 - \frac{413}{2^3}m^3 - \frac{4151}{2^5}m^4\right)\varepsilon'_1 + (-6m + 9m^2)\varepsilon'_1\theta^2 - \frac{3}{2^3}m^2\varepsilon'_1\theta^4$$

$$+\left(\frac{19}{2^3}m^2 - \frac{17}{2^3\cdot 3}m^3 - \frac{5543}{2^5\cdot 3^2}m^4\right)\varepsilon'_{-1} + (6m - 3m^2)\varepsilon'_{-1}\theta^2 + \frac{21}{2^3}m^2\varepsilon'_{-1}\theta^4$$

$$+\left(-\frac{105}{2}m - \frac{3371}{2^4}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon'_1$$

$$+\left(-\frac{45}{2}m - \frac{189}{2^4}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon'_1\theta^2 - \frac{15}{2^3}m^2\varepsilon_1\varepsilon'_1\theta^4$$

$$-\frac{55}{2^3}m^2\varepsilon_{-1}\varepsilon'_{-1} + \left(-\frac{9}{2}m + \frac{2007}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}\varepsilon'_{-1}\theta^2$$

$$+\left(\frac{35}{2}m + \frac{2273}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}\varepsilon'_{-1}\theta^4$$

$$+\left(\frac{45}{2}m-\frac{937}{2^4}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon'_{-1}+\left(\frac{15}{2}m+\frac{1041}{2^4}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon'_{-1}\theta^2+\frac{105}{2^3}m^2\varepsilon_1\varepsilon'_{-1}\theta^4$$

$$+\frac{385}{2^3}m^2\varepsilon_{-1}\varepsilon'_1+\left(\frac{9}{2}m-\frac{3987}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}\varepsilon'_1\theta^2+\left(-\frac{15}{2}m-\frac{469}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}\varepsilon'_1\theta^4$$

$$-\frac{323}{2^2}m^2\varepsilon'^2_1+(-9m+36m^2)\varepsilon'^2_1\theta^2+(9m+18m^2)\varepsilon'^2_{-1}\theta^2+\frac{51}{2^2}m^2\varepsilon'^2_{-1}\theta^4$$

$$+\frac{95}{2^2}m^2\varepsilon_1\varepsilon'_{-1}-38m^2\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\theta^2-\frac{15}{2^2}m^2\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\theta^4$$

$$+\left(175m+\frac{3795}{2^2}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\varepsilon'_1+\left(-75m-\frac{35}{2^2}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\varepsilon'_{-1}$$

$$+45m\varepsilon^2_{-1}\varepsilon'_1\theta^2-45m\varepsilon^2_1\varepsilon'_{-1}\theta^2$$

$$+\left(7m+\frac{257}{2^2}m^2\right)\gamma_1\gamma_{-1}\varepsilon'_1+\left(-3m-\frac{41}{2^2}m^2\right)\gamma_1\gamma_{-1}\varepsilon'_{-1}$$

$$-9m\gamma^2_{-1}\varepsilon'_1\theta^2+9m\gamma^2_1\varepsilon'_{-1}\theta^2+\left(\frac{135}{2^2}m+\frac{18657}{2^8}m^2\right)\varepsilon_1\varepsilon'^2_1$$

$$+\frac{935}{2^2}m^2\varepsilon_{-1}\varepsilon'^2_1+\frac{2337}{2^4}m^2\varepsilon'^2_1\varepsilon'_{-1}-\frac{19}{2^4}m^2\varepsilon'_1\varepsilon'^2_{-1},$$

$$C=rz=\left(-\frac{3}{2^3}m-\frac{67}{2^5}m^2-\frac{4589}{2^9\,3}m^3-\frac{42187}{2^{11}\,3^2}m^4\right)\gamma_1\theta^{-1}$$

$$+(1+0\,m^2)\gamma_1\theta+\frac{3}{2^3}m^2\gamma_1\theta^3$$

$$+m^2\gamma_{-1}\theta^{-1}+\left(-1-\frac{81}{2^7}m^3-\frac{1807}{2^9}m^4\right)\gamma_{-1}\theta+\left(\frac{3}{2^3}m+\frac{23}{2^5}m^2\right)\gamma_{-1}\theta^3$$

$$+\frac{45}{2^6}m^2\varepsilon_1\gamma_1\theta^{-3}+\left(-\frac{21}{2}m-\frac{265}{2^3}m^2\right)\varepsilon_1\gamma_1\theta^{-1}$$

$$+(2+m^2)\varepsilon_1\gamma_1\theta+\frac{15}{2^3}m^2\varepsilon_1\gamma_1\theta^3$$

$$+\frac{9}{2^3}m^2\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^{-1}+(2-m^2)\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta+\left(\frac{3}{2}m+\frac{17}{2^3}m^2\right)\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^3$$

$$+\frac{45}{2^5}m^2\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^5$$

$$+\left(\frac{15}{2^2}m+\frac{79}{2^4}m^2\right)\varepsilon_1\gamma_{-1}\theta^{-1}+\left(2-\frac{327}{2^6}m^2\right)\varepsilon_1\gamma_{-1}\theta$$

$$+\left(\frac{3}{2^2}m+\frac{17}{2^4}m^2\right)\varepsilon_1\gamma_{-1}\theta^3$$

$$+\left(\frac{3}{2^2}m+\frac{93}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta^{-1}+\left(-6+\frac{237}{2^6}m^2\right)\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta$$

$$+\left(\frac{15}{2^2}m+\frac{259}{2^4}m^2\right)\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta^3$$

$$+\left(-\frac{7}{2^2}m-\frac{541}{2^3}m^2-\frac{6847}{2^7}m^3\right)\varepsilon'_1\gamma_1\theta^{-1}$$

$$+\left(-\frac{15}{2^2}m+\frac{147}{2^3}m^2\right)\varepsilon'_1\gamma_1\theta-\frac{3}{2^3}m^2\varepsilon'_1\gamma_1\theta^3$$

$$-m^2\varepsilon'_{-1}\gamma_1\theta^{-1}+\left(-\frac{9}{2^2}m+\frac{45}{2^5}m^2+\frac{773}{2^7}m^3\right)\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta$$

$$+\left(\frac{7}{2^2}m+\frac{305}{2^5}m^2\right)\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta^3$$

$$+7m^2\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta^{-1}+\left(\frac{9}{2^2}m-\frac{177}{2^3}m^2-\frac{729}{2^7}m^3\right)\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta$$

$$+\left(-\frac{3}{2^2}m-\frac{137}{2^3}m^2\right)\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta^3$$

$$+\left(\frac{3}{2^2}m+\frac{109}{2^3}m^2+\frac{385}{2^7\,3}m^3\right)\varepsilon'_{-1}\gamma_1\theta^{-1}+\left(\frac{15}{2^2}m-\frac{15}{2^6}m^2\right)\varepsilon'_{-1}\gamma_1\theta$$

$$+\frac{21}{2^3}m^2\varepsilon'_{-1}\gamma_1\theta^3$$

L'expression de B' ou y^2 est conjuguée de celle de B ou x^2; celle de C' ou yz est la conjuguée changée de signe de celle de C ou xz.

D'une façon générale, on trouve dans les expressions précédentes tous les termes jusqu'au second degré inclus par rapport à ε, γ, ε' d'une part et par rapport à m d'autre part, cependant l'approximation a été portée plus loin quelquefois, afin d'obtenir une plus grande précision dans certains cas importants.

Les fonctions P, Q, Q', étant indépendantes des éléments lunaires, les formules générales (1) et (2) donnent maintenant, en écrivant au moins tous les termes jusqu'au premier degré inclus par rapport à ε, γ, ε' d'une part et jusqu'au quatrième degré par

rapport à m d'autre part

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta n}{n} = \mathrm{D}^{-1}\Big[& 6m^4(\mathrm{P}\theta^2 - \mathrm{P}\theta^{-2}) \\
& + (-6m^2 + 6m^3 - 18m^4)(\mathrm{Q}\theta^2 - \mathrm{Q}'\theta^{-2}) - \frac{9}{2}m^4(\mathrm{Q}\theta^4 - \mathrm{Q}'\theta^{-4}) \\
& + (6m^2 - 6m^3 + 18m^4)(\mathrm{P}\varepsilon_1 - \mathrm{P}\varepsilon_{-1}) \\
& + \left(-\frac{45}{2^2}m^3 - \frac{57}{2^4}m^4\right)(\mathrm{P}\varepsilon_1\theta^{-2} - \mathrm{P}\varepsilon_{-1}\theta^2) \\
& + \frac{81}{2^3}m^4(\mathrm{P}\varepsilon_1\theta^2 - \mathrm{P}\varepsilon_{-1}\theta^{-2}) \\
& + \left(\frac{135}{2^2}m^3 + \frac{1239}{2^4}m^4\right)(\mathrm{Q}\varepsilon_1 - \mathrm{Q}'\varepsilon_{-1}) + \frac{165}{2^3}m^4(\mathrm{Q}\varepsilon_{-1} - \mathrm{Q}'\varepsilon_1) \\
& + (-18m^2 + 18m^3 - 72m^4)(\mathrm{Q}\varepsilon_1\theta^2 - \mathrm{Q}'\varepsilon_{-1}\theta^{-2}) \\
& + (18m^2 - 18m^3 + 36m^4)(\mathrm{Q}\varepsilon_{-1}\theta^2 - \mathrm{Q}'\varepsilon_1\theta^{-2}) \\
& - \frac{225}{2^3}m^4(\mathrm{Q}\varepsilon_1\theta^4 - \mathrm{Q}'\varepsilon_{-1}\theta^{-4}) \\
& + \left(-\frac{135}{2^2}m^3 - \frac{1791}{2^4}m^4\right)(\mathrm{Q}\varepsilon_{-1}\theta^4 - \mathrm{Q}'\varepsilon_1\theta^{-4}) \\
& + \left(-6m^2 + 6m^3 - \frac{63}{2^2}m^4\right)(\mathrm{S}\gamma_1\theta + \mathrm{S}'\gamma_{-1}\theta^{-1}) \\
& + \left(\frac{9}{2^2}m^4 - \frac{135}{2^4}m^5\right)(\mathrm{S}\gamma_{-1}\theta + \mathrm{S}'\gamma_1\theta^{-1}) \\
& - \frac{27}{2^5}m^5(\mathrm{S}\gamma_1\theta^{-1} + \mathrm{S}'\gamma_{-1}\theta) + 6m^4(\mathrm{S}\gamma_{-1}\theta^{-1} + \mathrm{S}'\gamma_1\theta) \\
& - \frac{9}{2}m^4(\mathrm{S}\gamma_1\theta^3 + \mathrm{S}'\gamma_{-1}\theta^{-3}) + \left(-\frac{9}{2^2}m^3 - \frac{33}{2^4}m^4\right)(\mathrm{S}\gamma_{-1}\theta^3 + \mathrm{S}'\gamma_1\theta^{-3}) \\
& - 42m^4(\mathrm{P}\varepsilon'_1\theta^{-2} - \mathrm{P}\varepsilon'_{-1}\theta^2) - 6m^4(\mathrm{P}\varepsilon'_1\theta^2 - \mathrm{P}\varepsilon'_{-1}\theta^{-2}) \\
& + (36m^3 - 90m^4)(\mathrm{Q}\varepsilon'_1\theta^2 - \mathrm{Q}'\varepsilon'_{-1}\theta^{-2}) \\
& + (-36m^3 + 54m^4)(\mathrm{Q}\varepsilon'_{-1}\theta^2 - \mathrm{Q}'\varepsilon'_1\theta^{-2}) \\
& + \frac{9}{2}m^4(\mathrm{Q}\varepsilon'_1\theta^4 - \mathrm{Q}'\varepsilon'_{-1}\theta^{-4}) - \frac{63}{2}m^4(\mathrm{Q}\varepsilon'_{-1}\theta^4 - \mathrm{Q}'\varepsilon'_1\theta^{-4})\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\iota N) = \quad D^{-2}\Big[& 6m^4(P\theta^2 - P'\theta^{-2}) \\
& + (-6m^2 - 12m^4)(Q\theta^2 - Q'\theta^{-2}) - \frac{9}{2}m^4(Q\theta^4 - Q'\theta^{-4}) \\
& + \left(6m^2 + 12m^4 + \frac{537}{2^5}m^5\right)(P\varepsilon_1 - P\varepsilon_{-1}) \\
& + \left(-\frac{45}{2^2}m^3 - \frac{237}{2^4}m^4\right)(P\varepsilon_1\theta^{-2} - P\varepsilon_{-1}\theta^2) \\
& + \frac{81}{2^3}m^4(P\varepsilon_1\theta^2 - P\varepsilon_{-1}\theta^{-2}) \\
& + \left(\frac{135}{2^2}m^3 + \frac{1779}{2^4}m^4 + \frac{93643}{2^6}m^5\right)(Q\varepsilon_1 - Q'\varepsilon_{-1}) \\
& + \left(\frac{165}{2^3}m^4 + \frac{269}{2^3}m^5\right)(Q\varepsilon_{-1} - Q'\varepsilon_1) \\
& + (-18m^2 - 54m^4)(Q\varepsilon_1\theta^2 - Q\,\varepsilon_{-1}\theta^{-2}) \\
& + (18m^2 + 18m^4)(Q\varepsilon_{-1}\theta^2 - Q'\varepsilon_1\theta^{-2}) \\
& - \frac{225}{2^3}m^4(Q\varepsilon_1\theta^4 - Q'\varepsilon_{-1}\theta^{-4}) \\
& + \left(-\frac{135}{2^2}m^3 - \frac{2331}{2^4}m^4\right)(Q\varepsilon_{-1}\theta^4 - Q'\varepsilon_1\theta^{-4}) \\
& + \left(-6m^2 - \frac{39}{2^2}m^4\right)(S\gamma_1\theta + S'\gamma_{-1}\theta^{-1}) \\
& + \left(\frac{9}{2^2}m^4 - \frac{99}{2^4}m^5 - \frac{369}{2^7}m^6\right)(S\gamma_{-1}\theta + S'\gamma_1\theta^{-1}) \\
& + \left(-\frac{27}{2^5}m^5 - \frac{153}{2^6}m^6\right)(S\gamma_1\theta^{-1} + S'\gamma_{-1}\theta) \\
& + 6m^4(S\gamma_{-1}\theta^{-1} + S'\gamma_1\theta) - \frac{9}{2}m^4(S\gamma_1\theta^3 + S'\gamma_{-1}\theta^{-3}) \\
& + \left(-\frac{9}{2^2}m^3 - \frac{69}{2^4}m^4\right)(S\gamma_{-1}\theta^3 + S'\gamma_1\theta^{-3}) \\
& - 42m^4(P\varepsilon'_1\theta^{-2} - P\varepsilon'_{-1}\theta^2) - 6m^4(P\varepsilon'_1\theta^2 - P\varepsilon'_{-1}\theta^{-2}) \\
& + (36m^3 - 54m^4)(Q\varepsilon'_1\theta^2 - Q'\varepsilon'_{-1}\theta^{-2}) \\
& + (-36m^3 + 18m^4)(Q\varepsilon'_{-1}\theta^2 - Q'\varepsilon'_1\theta^{-2}) \\
& + \frac{9}{2}m^4(Q\varepsilon'_1\theta^4 - Q'\varepsilon'_{-1}\theta^{-4}) - \frac{63}{2}m^4(Q\varepsilon'_{-1}\theta^4 - Q'\varepsilon'_1\theta^{-4}) \\
& + \left(\frac{63}{2}m^3 + \frac{3267}{2^4}m^4\right)(P\varepsilon_1\varepsilon'_{-1} - P\varepsilon_{-1}\varepsilon'_1) \\
& + \left(-\frac{135}{2}m^3 + \frac{2811}{2^4}m^4\right)(Q\varepsilon_1\varepsilon'_{-1} - Q'\varepsilon_{-1}\varepsilon'_1) \\
& + \frac{1155}{2^3}m^4(Q\varepsilon_{-1}\varepsilon'_1 - Q'\varepsilon_1\varepsilon'_{-1}) \\
& + \left(\frac{189}{2^2}m^3 + \frac{14985}{2^5}m^4\right)(P\varepsilon_1\varepsilon'^2_{-1} - P\varepsilon_{-1}\varepsilon'^2_1) \\
& + \left(-\frac{405}{2^2}m^3 - \frac{55971}{2^5}m^4\right)(Q\varepsilon_1\varepsilon'^2_{-1} - Q'\varepsilon_{-1}\varepsilon'^2_1) \\
& \qquad\qquad + \frac{2805}{2^2}m^4(Q\varepsilon_{-1}\varepsilon'^2_1 - Q'\varepsilon_1\varepsilon'^2_{-1})\Big]
\end{aligned}
$$

$$+ D^{-1}\Big[\Big(-4m^2+4m^3-10m^4+22m^5+\frac{199}{2^3}m^6\Big)P$$

$$+10m^4(P\theta^2+P\theta^{-2})$$

$$+\Big(\frac{95}{2^2}m^4+\frac{203}{2\cdot 3}m^5+\frac{2777}{2^2 3^2}m^6\Big)(Q+Q')$$

$$+(-4m^2+4m^3-10m^4)(Q\theta^2+Q'\theta^{-2})$$

$$-\frac{15}{2^2}m^4(Q\theta^4+Q'\theta^{-4})$$

$$+\Big(7m^2-7m^3+\frac{1259}{2^6}m^4\Big)(P\varepsilon_1+P\varepsilon_{-1})$$

$$+\Big(\frac{195}{2^3}m^3+\frac{1081}{2^5}m^4\Big)(P\varepsilon_1\theta^{-2}+P\varepsilon_{-1}\theta^2)$$

$$+\frac{171}{2^4}m^4(P\varepsilon_1\theta^2+P\varepsilon_{-1}\theta^{-2})$$

$$+\Big(\frac{585}{2^3}m^3+\frac{10007}{2^5}m^4\Big)(Q\varepsilon_1+Q'\varepsilon_{-1})-\frac{1045}{2^4}m^4(Q\varepsilon_{-1}+Q'\varepsilon_1)$$

$$+\Big(-7m^2+7m^3-\frac{2171}{2^5}m^4\Big)(Q\varepsilon_1\theta^2+Q'\varepsilon_{-1}\theta^{-2})$$

$$+\Big(21m^2-21m^3+\frac{4689}{2^5}m^4\Big)(Q\varepsilon_{-1}\theta^2+Q'\varepsilon_1\theta^{-2})$$

$$-\frac{285}{2^4}m^4(Q\varepsilon_1\theta^4+Q'\varepsilon_{-1}\theta^{-4})$$

$$+\Big(-\frac{195}{2^3}m^3-\frac{4501}{2^6}m^4\Big)(Q\varepsilon_{-1}\theta^4+Q'\varepsilon_1\theta^{-4})$$

$$+\Big(-\frac{7}{2}m^2+\frac{7}{2}m^3-\frac{491}{2^6}m^4\Big)(S\gamma_1\theta-S'\gamma_{-1}\theta^{-1})$$

$$+\Big(\frac{7}{2}m^2-\frac{7}{2}m^3+\frac{491}{2^6}m^4\Big)(S\gamma_{-1}\theta-S'\gamma_1\theta^{-1})$$

$$+\Big(\frac{39}{2^4}m^3+\frac{1189}{2^6}m^4\Big)(S\gamma_1\theta^{-1}-S'\gamma_{-1}\theta)$$

$$-\frac{19}{2}m^4(S\gamma_{-1}\theta^{-1}-S'\gamma_1\theta)-\frac{57}{2^4}m^4(S\gamma_1\theta^3-S'\gamma_{-1}\theta^{-3})$$

$$+\Big(-\frac{39}{2^4}m^3-\frac{333}{2^6}m^4\Big)(S\gamma_{-1}\theta^3-S'\gamma_1\theta^{-3})$$

$$+(-30m^4+90m^5+528m^6)(P\varepsilon'_1+P\varepsilon'_{-1})$$

$$+70m^4(P\varepsilon'_1\theta^{-2}+P\varepsilon'_{-1}\theta^2)-10m^4(P\varepsilon'_1\theta^2+P\varepsilon'_{-1}\theta^{-2})$$

$$+\left(\frac{665}{2^2}m^4+\frac{4837}{2^3}m^5+\frac{8939}{2^2}m^6\right)(Q\varepsilon_1+Q'\varepsilon'_{-1})$$

$$+\left(-\frac{95}{2^5}m^4+\frac{449}{2^3\,3}m^5+\frac{9103}{2^2\,3^2}m^6\right)(Q\varepsilon_{-1}+Q'\varepsilon'_1)$$

$$+(42m^3-114m^4)(Q\varepsilon'_1\theta^2+Q'\varepsilon'_{-1}\theta^{-2})$$

$$+(-42m^3+54m^4)(Q\varepsilon'_{-1}\theta^2+Q'\varepsilon'_1\theta^{-2})$$

$$+\frac{15}{2^2}m^4(Q\varepsilon'_1\theta^4+Q'\varepsilon'_{-1}\theta^{-4})-\frac{105}{2^2}m^4(Q\varepsilon'_{-1}\theta^4+Q\varepsilon'_1\theta^{-4})$$

$$+\left(-18m^2+18m^3-\frac{13005}{2^4}m^4\right)P\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+\left(-225m^3-\frac{8505}{2^3}m^4\right)(Q+Q')\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+\left(18m^2-18m^3+\frac{2421}{2^5}m^4\right)P\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(-9m^3-\frac{567}{2^3}m^4\right)(Q+Q')\gamma_1\gamma_{-1}-90m^4(P\varepsilon'^2_1+P\varepsilon'^2_{-1})$$

$$+\frac{1615}{2}m^4(Q\varepsilon'^2_1+Q'\varepsilon'^2_{-1})-36m^4P\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$$

$$-\frac{475}{2}m^4(Q+Q')\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}-1458m^4(P\varepsilon'_1+P\varepsilon'_{-1})\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+\left(-1020m^3-\frac{32055}{2^2}m^4\right)(Q\varepsilon'_1+Q'\varepsilon'_{-1})\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+\left(450m^3-\frac{585}{2^2}m^4\right)(Q\varepsilon'_{-1}+Q'\varepsilon'_1)\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+243m^4(P\varepsilon'_1+P\varepsilon'_{-1})\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(-42m^3-\frac{2229}{2^2}m^4\right)(Q\varepsilon'_1+Q'\varepsilon'_{-1})\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(18m^3+\frac{333}{2^2}m^4\right)(Q\varepsilon'_{-1}+Q'\varepsilon'_1)\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$-135m^4(P\varepsilon'_1+P\varepsilon'_{-1})\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$$

$$-\frac{11685}{2^3}m^4(Q\varepsilon'_1+Q'\varepsilon'_{-1})\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$$

$$+\frac{95}{2^3}m^4(Q\varepsilon'_{-1}+Q'\varepsilon'_1)\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$$

$$-6m^2P\varepsilon_1^2\varepsilon_{-1}^2+60m^2P\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1}-12m^2P\gamma_1^2\gamma_{-1}^2\Big],$$

$$\delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1 D^{-2}\Big[6m^4(P\theta^2 - P\theta^{-2}) + \left(-6m^2 - \frac{33}{2}m^3\right)(Q\theta^2 - Q'\theta^{-2}) - \frac{9}{2}m^4(Q\theta^4 - Q'\theta^{-4})\Big]$$

$$+ \varepsilon_1 D^{-1}\Big[\left(-4m^2 + 4m^3 - 13m^4 - \frac{101}{2^2}m^5\right)P$$

$$+ 11m^4P\theta^2 + 9m^4P\theta^{-2} + \left(\frac{95}{2^2}m^4 + \frac{203}{2\cdot 3}m^5\right)(Q + Q')$$

$$+ \left(-5m^2 + 5m^3 + \frac{629}{2^5}m^4\right)Q\theta^2$$

$$+ \left(-3m^2 + 3m^3 - \frac{1491}{2^5}m^4\right)Q'\theta^{-2}$$

$$- \frac{9}{2}m^4Q\theta^4 - 3m^4Q'\theta^{-4} - 30m^4(P\varepsilon'_1 + P\varepsilon'_{-1})$$

$$+ \frac{665}{2^2}m^4(Q\varepsilon'_1 + Q'\varepsilon'_{-1}) - \frac{92}{2^2}m^4(Q\varepsilon'_{-1} + Q'\varepsilon'_1)$$

$$- 24m^2P\varepsilon_1\varepsilon_{-1} + 24m^2P\gamma_1\gamma_{-1}\Big]$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_{-1}}D^{-1}\Big[\left(m^2 - m^3 + \frac{385}{2^6}m^4\right)P\varepsilon_{-1} + \frac{9}{2^4}m^4P\varepsilon_{-1}\theta^{-2}$$

$$+ \left(\frac{15}{2^3}m^3 + \frac{19}{2^5}m^4\right)P\varepsilon_{-1}\theta^2$$

$$- \frac{25}{2^4}m^4Q\varepsilon_{-1} + \left(\frac{45}{2^3}m^3 + \frac{413}{2^6}m^4\right)Q'\varepsilon_{-1}$$

$$+ \left(3m^2 - 3m^3 + \frac{1251}{2^6}m^4\right)Q\varepsilon_{-1}\theta^2$$

$$+ \left(-m^2 + m^3 - \frac{481}{2^6}m^4\right)Q'\varepsilon_{-1}\theta^{-2}$$

$$+ \left(-\frac{15}{2^3}m^3 - \frac{199}{2^5}m^4\right)Q\varepsilon_{-1}\theta^4 - \frac{15}{2^4}m^4Q'\varepsilon_{-1}\theta^{-4}$$

$$+ \left(-3m^2 + 3m^3 - \frac{843}{2^5}m^4 - \frac{3741}{2^6}m^5\right)P\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+ \left(\frac{15}{2^3}m^3 + \frac{69}{2^6}m^4\right)P\varepsilon_1\varepsilon_{-1}(\theta^2 + \theta^{-2})$$

$$+ \left(-\frac{75}{2^2}m^3 - \frac{745}{2^4}m^4 - \frac{82819}{2^7\cdot 3}m^5\right)(Q + Q')\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+ \left(5m^2 - 5m^3 + \frac{1789}{2^6}m^4\right)(Q\theta^2 + Q'\theta^{-2})\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+\left(-\frac{15}{2}m^3-\frac{157}{2^7}m^4\right)(Q\theta^4+Q'\theta^{-4})\varepsilon_1\varepsilon_{-1}$$

$$+\left(m^2-m^3+\frac{465}{2^6}m^4\right)P\varepsilon_{-1}^2$$

$$+\left(-\frac{45}{2^2}m^3-\frac{411}{2^4}m^4-\frac{14035}{2^7}m^5\right)P\varepsilon_{-1}^2\theta^2$$

$$+\frac{13}{2^3}m^4P\varepsilon_{-1}^2\theta^{-2}+\frac{225}{2^6}m^4P\varepsilon_{-1}^2\theta^4+\frac{1}{2^2}m^4Q\varepsilon_{-1}^2$$

$$+\left(-10m^2+10m^3-\frac{2013}{2^5}m^4-\frac{9377}{2^6}m^5\right)Q\varepsilon_{-1}^2\theta^2$$

$$+\left(\frac{15}{2}m^3+\frac{539}{2^4}m^4\right)Q\varepsilon_{-1}^2\theta^4-\frac{225}{2^4}m^4Q\varepsilon_{-1}^2\theta^6$$

$$+\left(30m^3+\frac{991}{2^4}m^4\right)Q'\varepsilon_{-1}^2$$

$$+\left(-\frac{1125}{2^5}m^4-\frac{13425}{2^6}m^5\right)Q'\varepsilon_{-1}^2\theta^2$$

$$+\left(-4m^2+4m^3-\frac{493}{2^4}m^4\right)Q'\varepsilon_{-1}^2\theta^{-2}-\frac{27}{2^2}m^4Q'\varepsilon_{-1}^2\theta^{-4}$$

$$+\left(3m^2-3m^3+\frac{531}{2^5}m^4\right)S\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta$$

$$+\left(-\frac{3}{2^3}m^3-\frac{81}{2^5}m^4\right)S\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta^{-1}$$

$$+\left(-\frac{15}{2^3}m^3-\frac{199}{2^5}m^4\right)S\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta^3$$

$$+\left(-m^2+m^3-\frac{401}{2^6}m^4\right)S\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta-\frac{9}{2^4}m^4S\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^{-1}$$

$$+\left(-\frac{3}{2^2}m^3-\frac{5}{2^4}m^4\right)S\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^3-\frac{15}{2^6}m^4S\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^5$$

$$+\left(\frac{15}{2^3}m^3+\frac{19}{2^6}m^4\right)S'\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta$$

$$+\left(m^2-m^3+\frac{53}{2^5}m^4\right)S'\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta^{-1}$$

$$+\left(\frac{3}{2^3}m^3+\frac{5}{2^5}m^4\right)S'\varepsilon_{-1}\gamma_1\theta^{-3}$$

$$+\left(-\frac{21}{2^2}m^3-\frac{181}{2^4}m^4\right)S'\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta$$

$$+\left(m^2 - m^3 + \frac{465}{2^6} m^4\right) S\, \varepsilon_{-1} \gamma_{-1} \theta^{-1}$$

$$+\frac{45}{2^6} m^4 S' \varepsilon_{-1} \gamma_{-1} \theta^3 + \frac{15}{2^4} m^4 S' \varepsilon_{-1} \gamma_{-1} \theta^{-3}$$

$$+\left(\frac{21}{2^2} m^3 + \frac{921}{2^{10}} m^4\right) P \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 + \frac{63}{2^4} m^4 P \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^{-2}$$

$$+\left(-\frac{15}{2^2} m^3 + \frac{191}{2^5} m^4\right) P \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^2$$

$$-\frac{385}{2^4} m^4 Q \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 + \left(-\frac{9}{2^2} m^3 + \frac{4059}{2^5} m^4\right) Q \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^2$$

$$+\left(\frac{15}{2^2} m^3 + \frac{349}{2^6} m^4\right) Q \varepsilon_{-1} \varepsilon_1 \theta^4$$

$$+\left(-\frac{45}{2^2} m^3 + \frac{1297}{2^5} m^4\right) Q' \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1$$

$$+\left(-\frac{45}{2^2} m^3 - \frac{681}{2^6} m^4\right) Q' \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^{-2} - \frac{105}{2^4} m^4 Q' \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^{-4}$$

$$+\left(-\frac{21}{2^2} m^3 - \frac{327}{2^5} m^4\right) P \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} - \frac{9}{2^4} m^4 P \varepsilon_{-1} \varepsilon_{-1} \theta^{-2}$$

$$+\left(\frac{35}{2^2} m^3 + \frac{373}{2^5} m^4\right) P \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^2$$

$$+\frac{55}{2^4} m^4 Q \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} + \left(\frac{9}{2^2} m^3 - \frac{2079}{2^5} m^4\right) Q \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^2$$

$$+\left(-\frac{35}{2^2} m^3 - \frac{1993}{2^5} m^4\right) Q \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^4$$

$$+\left(\frac{105}{2^2} m^3 + \frac{2231}{2^6} m^4\right) Q' \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1}$$

$$+\left(\frac{45}{2^2} m^3 - \frac{171}{2^5} m^4\right) Q' \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^{-2} + \frac{15}{2^4} m^4 Q' \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^{-4}$$

$$-81 m^4 (P \varepsilon'_1 + P' \varepsilon'_{-1}) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$$

$$+\left(-\frac{175}{2} m^3 - \frac{3095}{2^3} m^4\right) (Q \varepsilon'_1 + Q' \varepsilon'_{-1}) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$$

$$+\left(\frac{75}{2} m^3 - \frac{265}{2^3} m^4\right) (Q \varepsilon'_{-1} + Q' \varepsilon'_1) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$$

$$+\frac{45}{2} m^3 P \varepsilon_{-1}^2 \varepsilon'_1 \theta^2 - \frac{105}{2} m^3 P \varepsilon_{-1}^2 \varepsilon'_{-1} \theta^2$$

$$-15 m^3 Q \varepsilon_{-1}^2 \varepsilon'_1 \theta^2 + 45 m^3 Q \varepsilon_{-1}^2 \varepsilon'_{-1} \theta^2$$

$$+ 12 m^2 P \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}^2 + 18 m^2 P \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1} \Big],$$

$$+\left(-3m^2+3m^3+\frac{81}{2^5}m^4\right)S'\varepsilon_1\gamma_{-1}\theta^{-1}$$

$$+\left(\frac{15}{2^3}m^3+\frac{199}{2^5}m^4\right)S'\varepsilon_1\gamma_{-1}\theta^{-3}$$

$$+\left(-\frac{21}{2^2}m^3-\frac{181}{2^4}m^4\right)S'\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta$$

$$+\left(m^2-m^3+\frac{57}{2^6}m^4\right)S'\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^{-1}$$

$$+\frac{45}{2^6}m^4S'\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^3+\frac{15}{2^4}m^4S'\varepsilon_{-1}\gamma_{-1}\theta^{-3}$$

$$+\left(3m^2-3m^3+\frac{51}{2^5}m^4+\frac{417}{2^6}m^5\right)P\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(-\frac{9}{2^3}m^3-\frac{65}{2^5}m^4\right)P\gamma_1\gamma_{-1}(\theta^2+\theta^{-2})$$

$$+\left(-\frac{3}{2^2}m^3-\frac{55}{2^4}m^4-\frac{115}{2^7\cdot 3}m^5\right)(Q+Q')\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(m^2-m^3+\frac{17}{2^5}m^4\right)(Q\theta^2+Q'\theta^{-2})\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\frac{3}{2^4}m^4(Q\theta^4+Q'\theta^{-4})\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(-3m^2+3m^3+\frac{53}{2^6}m^4\right)P\gamma^2_{-1}$$

$$+\left(\frac{9}{2^2}m^3+\frac{3}{2^4}m^4+\frac{1871}{2^7}m^5\right)P\gamma^2_{-1}\theta^2$$

$$-\frac{9}{2^3}m^4P\gamma^2_1\theta^{-2}-\frac{27}{2^6}m^4P\gamma^2_1\theta^4$$

$$+2m^4Q\gamma^2_1+\left(-2m^2+2m^3+\frac{127}{2^5}m^4-\frac{1255}{2^6}m^5\right)Q\gamma^2_{-1}\theta^2$$

$$+\left(-\frac{3}{2}m^3+\frac{101}{2^4}m^4\right)Q\gamma^2_1\theta^4+\left(3m^3-\frac{207}{2^4}m^4\right)Q'\gamma^2_{-1}$$

$$+\left(-\frac{9}{2^5}m^4-\frac{183}{2^6}m^5\right)Q'\gamma^2_{-1}\theta^2-\frac{3}{2^2}m^4Q'\gamma^2_{-1}\theta^{-2}$$

$$+\left(-\frac{9}{2^3}m^3+\frac{249}{2^6}m^4-\frac{183}{2^9}m^5\right)S\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta$$

$$-\frac{7}{2}m^4S\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta^{-1}+\left(\frac{3}{2^3}m^3+\frac{113}{2^6}m^4\right)S\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta^3$$

$$+\left(\frac{9}{2^3}m^3-\frac{117}{2^6}m^4-\frac{961}{2^9}m^5\right)S\,\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta+\frac{1}{2}m^4 S\,\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta^{-1}$$

$$+\left(-\frac{7}{2^4}m^3-\frac{249}{2^6}m^4\right)S\,\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta^3$$

$$+\left(\frac{3}{2^3}m^3-\frac{85}{2^6}m^4-\frac{1621}{2^9\,3}m^5\right)S'\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta$$

$$+\left(\frac{15}{2^3}m^3-\frac{135}{2^6}m^4\right)S'\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta^{-1}+\frac{21}{2^4}m^4 S'\varepsilon'_1\gamma_{-1}\theta^{-3}$$

$$+\left(-\frac{7}{2^4}m^3-\frac{485}{2^6}m^4-\frac{9541}{2^9}m^5\right)S'\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta$$

$$+\left(-\frac{15}{2^3}m^3+\frac{267}{2^6}m^4\right)S'\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta^{-1}-\frac{3}{2^4}m^4 S'\varepsilon'_{-1}\gamma_{-1}\theta^{-3}$$

$$+\frac{27}{2}m^4(P\varepsilon'_1+P\varepsilon'_{-1})\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(-\frac{7}{2}m^3-\frac{229}{2}m^4\right)(Q\varepsilon'_1+Q'\varepsilon_{-1})\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$+\left(\frac{3}{2}m^3+\frac{29}{2^4}m^4\right)(Q\varepsilon'_{-1}+Q\varepsilon'_1)\gamma_1\gamma_{-1}$$

$$-\frac{9}{2}m^3 P\gamma^2_{-1}\varepsilon'_1\theta^2+\frac{21}{2}m^3 P\gamma^2_{-1}\varepsilon'_{-1}\theta^2$$

$$+9m^3 Q\gamma^2_{-1}\varepsilon_1\theta^2-9m^3 Q\gamma^2_{-1}\varepsilon'_{-1}\theta^2$$

$$+24m^2 P\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1}-12m^2 P\gamma_1^2\gamma_{-1}^2\Big]$$

Les valeurs de $\delta\varepsilon_{-1}$ et $\delta\gamma_{-1}$, non écrites, sont conjuguées de $\delta\varepsilon_1$ et $\delta\gamma_1$

Nous avons vu precédemment comment s'effectuaient les intégrations indiquées quand on prend pour P ou Q, ou Q', un terme constant ou périodique M, et si l'on prend pour P, ou Q, ou Q', un terme séculaire ou mixte de la forme M $n't$, nous savons aussi qu'il suffit de remplacer encore P, ou Q, par M, a la condition de remplacer en même temps les signes d'intégration D^{-1}, D^{-2}, respectivement par $n't\,D^{-1}+im\,D^{-2}$, $n't\,D^{-2}+2im\,D^{-3}$

Pour avoir les inégalités des coordonnées lunaires elles-mêmes, il faut joindre aux formules precédentes les trois suivantes, faciles a completer suivant les besoins

$$\frac{a}{b}\,\delta(\sin\varpi) = \frac{\delta n}{n}\Big[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m^2(\theta^2+\theta^{-2}) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}m^2\right)(\varepsilon_1+\varepsilon_{-1})$$

$$+\left(-\frac{5}{2^3}m - \frac{43}{2^3}m^2\right)(\varepsilon_1\theta^{-2}+\varepsilon_{-1}\theta^2)$$

$$-\frac{11}{2^2}m^2(\varepsilon_1\theta^2+\varepsilon_{-1}\theta^{-2}) + 2m^2(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1})$$

$$-\frac{14}{3}m^2(\varepsilon'_1\theta^{-2}+\varepsilon'_{-1}\theta^2) + \frac{2}{3}m^2(\varepsilon'_1\theta^2+\varepsilon'_{-1}\theta^{-2})\Big]$$

$$+\,\delta(\iota N)\Big[m^2(\theta^2-\theta^{-2}) + \left(-\frac{15}{2^2}m - \frac{127}{2^4}m^2\right)(\varepsilon_1\theta^{-2}-\varepsilon_{-1}\theta^2)$$

$$+\frac{33}{2^3}m^2(\varepsilon_1\theta^2-\varepsilon_{-1}\theta^{-2})$$

$$-7m^2(\varepsilon'_1\theta^{-2}-\varepsilon'_{-1}\theta^2) - m^2(\varepsilon'_1\theta^2-\varepsilon'_{-1}\theta^{-2})\Big]$$

$$+\,\delta\varepsilon_1\Big[1 - \frac{3}{2^2}m^2 + \left(\frac{15}{2^3}m - \frac{127}{2^4}m^2\right)\theta^{-2} + \frac{33}{2^4}m^2\theta^2$$

$$+(4-4m^2)\varepsilon_1 - 15m^2\varepsilon_1\theta^{-2} + 14m^2\varepsilon_1\theta^2 + \frac{225}{2^4}m^2\varepsilon_1\theta^{-4}$$

$$+\left(\frac{15}{2}m + \frac{129}{2^3}m^2\right)\varepsilon_{-1}(\theta^2+\theta^{-2})$$

$$+\left(-\frac{21}{2^2}m - \frac{669}{2^8}m^2\right)\varepsilon'_1$$

$$+\left(\frac{35}{2^2}m + \frac{989}{2^5}m^2\right)\varepsilon'_1\theta^{-2} - \frac{33}{2^4}m^2\varepsilon'_1\theta^2$$

$$+\left(\frac{21}{2^2}m + \frac{945}{2^8}m^2\right)\varepsilon'_{-1} + \left(-\frac{15}{2^2}m + \frac{23}{2^5}m^2\right)\varepsilon'_{-1}\theta^{-2}$$

$$+\frac{231}{2^4}m^2\varepsilon'_{-1}\theta^2\Big]$$

$$+\,\delta\varepsilon_{-1}[1+\qquad]$$

$$+\,\delta\gamma_1[2m^2\gamma_1 - 3m^2\gamma_1\theta^{-2} - m^2\gamma_{-1}(\theta^2+\theta^{-2})]$$

$$+\,\delta\gamma_{-1}[2m^2\gamma_{-1}+\qquad],$$

$$\delta(w) = \frac{\delta n}{n}\Big[-\frac{11}{2^3}m^2(\theta^2-\theta^{-2}) + \left(\frac{15}{2^2}m + \frac{233}{2^3}m^2\right)(\varepsilon_1\theta^{-2}-\varepsilon_{-1}\theta^2)$$

$$-\frac{17}{2^2}m^2(\varepsilon_1\theta^2-\varepsilon_{-1}\theta^{-2}) + (3m-3m^2)(\varepsilon'_1-\varepsilon'_{-1})$$

$$+\frac{77}{2^3}m^2(\varepsilon'_1\theta^{-2}-\varepsilon'_{-1}\theta^2) + \frac{11}{2^3}m^2(\varepsilon'_1\theta^2+\varepsilon'_{-1}\theta^{-2})\Big]$$

$$+\delta(iN)\Big[1+\frac{11}{2^3}m^2(\theta^2+\theta^{-2}) + \left(\frac{15}{2}m+\frac{203}{2^3}m^2\right)(\varepsilon_1\theta^{-2}+\varepsilon_{-1}\theta^2)$$

$$+\frac{17}{2^2}m^2(\varepsilon_1\theta^2+\varepsilon_{-1}\theta^{-2}) + \frac{77}{2^3}m^2(\varepsilon'_1\theta^{-2}+\varepsilon'_{-1}\theta^2)$$

$$-\frac{11}{2^3}m^2(\varepsilon'_1\theta^2+\varepsilon'_{-1}\theta^{-2})\Big]$$

$$+\delta\varepsilon_1\Big[2+\left(-\frac{15}{2^2}m-\frac{203}{2^4}m^2\right)\theta^{-2}+\frac{17}{2^3}m^2\theta^2$$

$$+\left(5-\frac{7}{2^2}m^2\right)\varepsilon_1+\left(-\frac{15}{2^2}m-\frac{167}{2^2}m^2\right)\varepsilon_1\theta^{-2}$$

$$+\frac{95}{2^3}m^2\varepsilon_1\theta^2-\frac{1125}{2^6}m^2\varepsilon_1\theta^{-4}$$

$$+\left(\frac{75}{2^3}m+\frac{801}{2^5}m^2\right)\varepsilon_{-1}(\theta^2-\theta^{-2})$$

$$+\left(-\frac{21}{2}m-\frac{549}{2^4}m^2\right)\varepsilon'_1$$

$$+\left(-\frac{33}{2}m-\frac{1521}{2^4}m^2\right)\varepsilon'_1\theta^{-2}-\frac{17}{2^3}m^2\varepsilon'_1\theta^2$$

$$+\left(\frac{21}{2}m+\frac{1065}{2^4}m^2\right)\varepsilon'_{-1}$$

$$+\left(\frac{15}{2}m+\frac{53}{2^4}m^2\right)\varepsilon'_{-1}\theta^{-2}+\frac{119}{2^3}m^2\varepsilon'_{-1}\theta^2\Big]$$

$$+\delta\varepsilon_{-1}[-2+\qquad]$$

$$+\delta\gamma_1\Big[\left(-1+\frac{11}{2^2}m^2\right)\gamma_1+\left(-\frac{9}{2^2}m+\frac{31}{2^2}m^2\right)\gamma_1\theta^{-2}$$

$$-\frac{11}{2^3}m^2\gamma_1\theta^2+\frac{9}{2^6}m^2\gamma_1\theta^{-4}+\left(-\frac{3}{2^3}m-\frac{35}{2^5}m^2\right)\gamma_{-1}(\theta^2-\theta^{-2})\Big]$$

$$+\delta\gamma_{-1}[\gamma_{-1}+\qquad],$$

152. Passant à l'application des formules générales que nous venons de développer, cherchons d'abord l'effet des termes mixtes qui figurent dans la fonction générale R, c'est-à-dire encore l'effet des perturbations séculaires des éléments de l'orbite solaire.

En premier lieu, pour définir l'effet de la variation séculaire de l'excentricité ε', on a

$$P = \frac{1}{4}\nu n' t \left[\varepsilon'_1 \frac{\partial(\rho'^3)}{\partial\varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1} \frac{\partial(\rho'^3)}{\partial\varepsilon'_{-1}} \right],$$

$$Q = \frac{3}{8}\nu n' t \left[\varepsilon'_1 \frac{\partial(\rho'^3 e^{-2\lambda'})}{\partial\varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1} \frac{\partial(\rho'^3 e^{-2\lambda'})}{\partial\varepsilon'_{-1}} \right],$$

$$\cdots\cdots,$$

soit, explicitement, en n'écrivant que les termes utiles dans la suite au delà du second degré par rapport à ε'

$$P = \nu n' t \left[\frac{3}{4}\varepsilon'_1 + \frac{3}{4}\varepsilon'_{-1} + \frac{9}{2}\varepsilon'^2_1 + 3\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \frac{9}{2}\varepsilon'^2_{-1} + \frac{81}{8}\varepsilon'^2_1\varepsilon'_{-1} + \frac{81}{8}\varepsilon'_1\varepsilon'^2_{-1} \right.$$
$$\left. + 30\,\varepsilon'^2_1\varepsilon'^2_{-1} + 210\,\varepsilon'^3_1\varepsilon'^3_{-1} + \ldots \right],$$

$$Q = \nu n' t \left[-\frac{3}{8}\varepsilon'_1 + \frac{21}{8}\varepsilon'_{-1} - \frac{15}{2}\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \frac{51}{2}\varepsilon'^2_{-1} + \frac{9}{16}\varepsilon'^2_1\varepsilon'_{-1} - \frac{1107}{16}\varepsilon'_1\varepsilon'^2_{-1} \right.$$
$$\left. + \frac{39}{2}\varepsilon'^2_1\varepsilon'^2_{-1} + \ldots \right],$$

$$Q' = \nu n' t \left[\frac{21}{8}\varepsilon'_1 - \frac{3}{8}\varepsilon'_{-1} + \frac{51}{2}\varepsilon'^2_1 - \frac{15}{2}\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} - \frac{1107}{16}\varepsilon'^2_1\varepsilon'_{-1} + \frac{9}{16}\varepsilon'_1\varepsilon'^2_{-1} \right.$$
$$\left. + \frac{39}{2}\varepsilon'^2_1\varepsilon'^2_{-1} + \ldots \right]$$

Faisons d'abord abstraction du facteur $n't$, de sorte que la question revient à chercher l'effet d'un accroissement constant $\nu\varepsilon'$ donné à ε'. Les formules générales montrent alors que les variations δn, $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$ sont purement périodiques, tandis que δN, δN_1, δN_2 comprennent non seulement des parties périodiques $\delta_1 N$, $\delta_1 N_1$, $\delta_1 N_2$ mais aussi des parties séculaires $\delta_0 N$, $\delta_0 N_1$, $\delta_0 N_2$. Ces dernières se calculent sans peine d'après les développements du numéro précédent,

et l'on a

$$\begin{aligned}
\delta_0 N = \nu n t \varepsilon^2 \Big[& -3m^2 + 6m^3 + \frac{3483}{2^5} m^4 + \frac{19347}{2^5} m^5 + \frac{214715}{2^5 \, 3} m^6 \\
& + \varepsilon^2 \left(-\frac{27}{2^3} m^2 - \frac{2367}{2^4} m^3 - \frac{865755}{2^9} m^4 \right) \\
& + \gamma^2 \left(\frac{27}{2^3} m^2 - \frac{207}{2^4} m^3 - \frac{36045}{2^9} m^4 \right) \\
& + \varepsilon'^2 \left(-\frac{15}{2} m^2 + 15 m^3 + \frac{25389}{2^6} m^4 \right) \\
& \frac{9}{2^5} m^2 \varepsilon^4 + \frac{45}{2^4} m^2 \varepsilon^2 \gamma^2 - \frac{9}{2^4} m^2 \gamma^4 - \frac{135}{2^4} m^2 \varepsilon^2 \varepsilon'^2 \\
& + \frac{135}{2^4} m^2 \gamma^2 \varepsilon'^2 - \frac{105}{2^3} m^2 \varepsilon'^4 \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_0 N_1 = \nu n t \varepsilon'^2 \Big[& \frac{9}{2^2} m^2 + \frac{753}{2^4} m^3 + \frac{12531}{2^7} m^4 - \frac{9}{2^3} m^2 \varepsilon^2 \\
& - \frac{9}{2} m^2 \gamma^2 + \frac{45}{2^3} m^2 \varepsilon'^2 \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_0 N_2 = \nu n t \varepsilon'^2 \Big[& -\frac{9}{2^2} m^2 + \frac{105}{2^4} m^3 + \frac{1317}{2^7} m^4 - \frac{9}{2} m^2 \varepsilon^2 \\
& + \frac{9}{2^3} m^2 \gamma^2 - \frac{45}{2^3} m^2 \varepsilon'^2 \Big]
\end{aligned}$$

D'autre part, il est manifeste que, pour trouver l'effet de l'accroissement constant $\nu\varepsilon'$ donné à ε', il suffit de changer ε' en $\varepsilon' + \nu\varepsilon'$ dans les expressions des coordonnées de la Lune, telles que les donne la théorie solaire. Les accroissements de ces coordonnées, calculés soit d'une façon, soit de l'autre, doivent être les mêmes ; toutefois, comme nous avons laissé de côté les constantes arbitraires introduites par l'intégration dans les formules (1) et (2) par exemple, il est nécessaire, pour être exact, de s'exprimer de la façon suivante : les accroissements des coordonnées dus à δn, $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$, δN, δN_1, δN_2 sont égaux aux accroissements, que prennent ces mêmes coordonnées quand on y remplace ε' par $\varepsilon' + \nu\varepsilon'$, et aussi n, ε, γ N, N_1, N_2 par $n + \delta' n$, $\varepsilon + \delta'\varepsilon$, $\gamma + \delta'\gamma$, $N + \delta' N + t\delta' n$, $N_1 + \delta' N_1 + t\delta' n_1$, $N_2 + \delta' N_2 + t\delta' n_2$, en désignant par $\delta' n$, $\delta'\varepsilon$, $\delta'\gamma$, $\delta' N$, $\delta' N_1$, $\delta' N_2$ des constantes à déterminer, et par $\delta' n_1$, $\delta' n_2$ les accroissements de n_1 et n_2 correspondant à $\delta' n$, $\delta'\varepsilon$, $\delta'\gamma$.

Il est clair d'ailleurs que l'on a ici $\delta' N = \delta' N_1 = \delta' N_2 = 0$, et par

suite, en considérant toujours les coordonnées de la Lune comme fonctions de n, ε, γ, N, N_1, N_2 et aussi ε', on a les relations telles que

$$\frac{\partial v}{\partial n}\delta n + \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\delta \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\delta \gamma + \frac{\partial v}{\partial N}(\delta_0 N + \delta_1 N) + \frac{\partial v}{\partial N_1}(\delta_0 N_1 + \delta_1 N_1) + \frac{\partial v}{\partial N_2}(\delta_0 N_2 + \delta_1 N_2)$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon'} + t\frac{\partial v}{\partial N_1}\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'} + t\frac{\partial v}{\partial N_2}\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'}\right)\nu\varepsilon'$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial n} + t\frac{\partial v}{\partial N} + t\frac{\partial v}{\partial N_1}\frac{\partial n_1}{\partial n} + t\frac{\partial v}{\partial N_2}\frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\delta' n$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + t\frac{\partial v}{\partial N_1}\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} + t\frac{\partial v}{\partial N_2}\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon}\right)\delta' \varepsilon$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial \gamma} + t\frac{\partial v}{\partial N_1}\frac{\partial n_1}{\partial \gamma} + t\frac{\partial v}{\partial N_2}\frac{\partial n_2}{\partial \gamma}\right)\delta' \gamma$$

On en déduit nécessairement, par comparaison des termes séculaires,

$$(a)\qquad \begin{cases} \delta_0 N = t\,\delta' n, \\ \delta_0 N_1 = t\left(\dfrac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'}\nu\varepsilon' + \dfrac{\partial n_1}{\partial n}\delta' n + \dfrac{\partial n_1}{\partial \varepsilon}\delta'\varepsilon + \dfrac{\partial n_1}{\partial \gamma}\delta'\gamma\right), \\ \delta_0 N_2 = t\left(\dfrac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'}\nu\varepsilon' + \dfrac{\partial n_2}{\partial n}\delta' n + \dfrac{\partial n_2}{\partial \varepsilon}\delta'\varepsilon + \dfrac{\partial n_2}{\partial \gamma}\delta'\gamma\right), \end{cases}$$

et il reste les relations telles que

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial n}\delta n + \dfrac{\partial v}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon + \dfrac{\partial v}{\partial \gamma}\delta\gamma + \dfrac{\partial v}{\partial N}\delta_1 N + \dfrac{\partial v}{\partial N_1}\delta_1 N_1 + \dfrac{\partial v}{\partial N_2}\delta_1 N_2 \\ \quad = \dfrac{\partial v}{\partial \varepsilon'}\nu\varepsilon' + \dfrac{\partial v}{\partial n}\delta' n + \dfrac{\partial v}{\partial \varepsilon}\delta'\varepsilon + \dfrac{\partial v}{\partial \gamma}\delta'\gamma, \end{cases}$$

appliquées aux trois coordonnées lunaires.

La première équation (a) donne immédiatement $\delta' n$; on voit ensuite aisément que $\delta'\varepsilon$ et $\delta'\gamma$ sont respectivement de l'ordre de $\nu\varepsilon\varepsilon'^2 m^2$, $\nu\gamma\varepsilon'^2 m^2$, de sorte que les deux dernières équations (a) sont peu propres à déterminer ces quantités. Tirons-en plutôt

$$\frac{1}{n\varepsilon'}\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon'} = \frac{\delta_0 N_1 - \dfrac{\partial n_1}{\partial n}\delta_0 N}{\nu n t \varepsilon'^2} - \frac{\dfrac{\partial n_1}{\partial \varepsilon}\delta'\varepsilon + \dfrac{\partial n_1}{\partial \gamma}\delta'\gamma}{\nu n \varepsilon'^2}$$

$$= \frac{9}{2^2}m^2 + \frac{753}{2^4}m^3 + \frac{42243}{2^7}m^4 - \frac{9}{2^3}m^2\varepsilon^2 - \frac{9}{2}m^2\gamma^2 + \frac{45}{2^3}m^2\varepsilon'^2$$

et de même

$$\frac{1}{n\varepsilon'}\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon'} = -\frac{9}{2^2}m^2 + \frac{105}{2^4}m^3 + \frac{1605}{2^7}m^4 - \frac{9}{2}m^2\varepsilon^2 + \frac{9}{2^3}m^2\gamma^2 - \frac{45}{2^8}m^2\varepsilon'^2,$$

ce qui confirme et complète les parties de g' et h' qui dépendent de ε'^2, obtenues antérieurement.

Quant aux égalités (b), elles sont faciles à vérifier directement, en calculant effectivement δn, $\delta\varepsilon$, ..., et l'on s'assure ainsi de l'exactitude des formules générales du numéro précédent ; mais en même temps, on pourra déterminer les quantités $\delta'\varepsilon$, $\delta'\gamma$ par exemple en comparant les termes des deux membres qui dépendent, pour la longitude, de $\varepsilon_1\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$, et pour la latitude, de $\gamma_1\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$. On trouve ainsi

$$\delta\varepsilon' = -\frac{341}{2^6}\nu m^2\varepsilon\varepsilon'^2, \qquad \delta'\gamma = -\frac{77}{2^6}\nu m^2\gamma\varepsilon'^2.$$

Revenons maintenant au problème véritable, c'est-à-dire multiplions par $n't$ la fonction R que nous venons d'utiliser. Les formules d'intégration resteront les mêmes, avec cette même fonction R, à la condition de changer D^{-1}, D^{-2}, respectivement en

$$n't\,D^{-1} - \nu m\,D^{-2}, \quad n't\,D^{-2} + 2\nu m\,D^{-3},$$

Nous aurons donc deux sortes d'inégalités : les premières, correspondant aux premiers termes de ces expressions, ne seront évidemment autre chose que celles déterminées il y a un instant, soit

$$\delta n, \qquad \delta_0 N + \delta_1 N, \qquad \ldots,$$

multipliées par $n't$, et par suite, pour en obtenir l'effet, il suffira, dans les expressions des coordonnées lunaires, de remplacer partout ε', n, ε, γ par $\varepsilon' + \nu n'\varepsilon' t$ (ou $\varepsilon' + \varepsilon'_0 t$), $n + n't\,\delta' n$, $\varepsilon + n't\,\delta'\varepsilon$, $\gamma + n't\,\delta'\gamma$, et en regardant ces coordonnées comme fonctions de n, ε, γ, N, N_1, N_2, ε', il faudra encore remplacer N par $N + n't\,\delta_0 N$, N_1 par $N_1 + n't\,\delta_0 N_1$, N_2 par $N_2 + n't\,\delta_0 N_2$.

Quant aux inégalités restantes, qui proviennent de la substitution de $\nu m D^{-2}$, $2\nu m D^{-3}$ à D^{-1}, D^{-2}, on voit qu'elles seront toutes périodiques, et en fait négligeables, en raison de la petitesse de ν, sauf celles qui correspondent à la partie constante de R, et qui sont évidemment, d'après les formules (3),

$$\delta N = -\frac{1}{2}n't\,\delta_0 N, \qquad \delta N_1 = -\frac{1}{2}n't\,\delta_0 N_1, \qquad \delta N_2 = -\frac{1}{2}n't\,\delta_0 N_2.$$

Finalement, nous pouvons donc dire qu'à des inégalités périodiques négligeables près, on obtient l'effet de la variation séculaire de l'excentricité ε', en remplaçant ε', n, ε, γ, N, N_1, N_2 dans les expressions des coordonnées lunaires par

$$\varepsilon' + \varepsilon'_0 t, \qquad n + n't\,\delta' n, \qquad \varepsilon + n't\,\delta'\varepsilon, \qquad \gamma + n't\,\delta'\gamma,$$

$$N + \frac{1}{2} n't\,\delta_0 N, \qquad N_1 + \frac{1}{2} n't\,\delta_0 N_1, \qquad N_2 + \frac{1}{2} n't\,\delta_0 N_2,$$

on a d'ailleurs $t\delta' n = \delta_0 N$, et en fait, les variations de n, ε, γ sont sans effet appréciable.

Ces résultats sont identiques à ceux que nous avons trouvés à la fin du Chapitre précédent.

Passons à l'étude de l'effet de la variation séculaire de la longitude du périgée, φ', défini par

$$P = \iota\nu' n't\left[-\frac{3}{4}\varepsilon'_1 - \frac{3}{4}\varepsilon'_{-1} - \frac{9}{2}\varepsilon'^2_1 + \frac{9}{2}\varepsilon'^2_{-1} + \quad\right],$$

$$Q = \iota\nu' n't\left[\quad \frac{3}{8}\varepsilon'_1 + \frac{21}{8}\varepsilon'_{-1} \qquad\qquad + \frac{51}{2}\varepsilon'^2_{-1} + \quad\right],$$

$$Q' = \iota\nu' n't\left[-\frac{21}{8}\varepsilon'_1 - \frac{3}{8}\varepsilon'_{-1} - \frac{51}{2}\varepsilon'^2_1 \qquad\qquad + \quad\right],$$

et suivons la même méthode. Faisant d'abord abstraction du facteur $n't$, c'est-à-dire cherchant l'effet d'un accroissement constant ν' donné à φ', on trouve pour δn, $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$, δN, δN_1, δN_2 des expressions purement périodiques, et les accroissements qui en résultent pour les coordonnées lunaires sont identiques à ceux que prennent ces coordonnées quand on y remplace φ' par $\varphi' + \nu'$, en même temps que N, N_1, N_2 par $N + \delta' N$, $N_1 + \delta' N_1$, $N_2 + \delta' N_2$, en désignant par $\delta' N$, $\delta' N_1$, $\delta' N_2$ des constantes à déterminer par les relations telles que

$$\frac{\partial v}{\partial n}\delta n + \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\delta\gamma + \frac{\partial v}{\partial N}\delta N + \frac{\partial v}{\partial N_1}\delta N_1 + \frac{\partial v}{\partial N_2}\delta N_2$$
$$= \frac{\partial v}{\partial \varphi'}\nu' + \frac{\partial v}{\partial N}\delta' N + \frac{\partial v}{\partial N_1}\delta' N_1 + \frac{\partial v}{\partial N_2}\delta' N_2,$$

qui serviront en même temps de nouvelle vérification.

En comparant les coefficients de $\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$, $\varepsilon_1\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$ dans les deux

membres de cette équation, et opérant d'une façon analogue pour la latitude, on trouvera

$$\delta' \mathrm{N} = -\frac{3783}{12^{4}} \nu' m^{4} \varepsilon'^{2}, \qquad \delta \mathrm{N}_1 = \frac{125}{2^{3}} \nu' m^{2} \varepsilon'^{2}, \qquad \delta \mathrm{N}_2 = \frac{5}{2^{3}} \nu' m^{2} \varepsilon'^{2}$$

Revenant alors à la question posée, on voit que la variation séculaire de φ' produit deux sortes d'inégalités pour obtenir l'effet des premières, il suffit de remplacer dans les expressions des coordonnées lunaires φ' par $\varphi' + \varphi'_0 t$, et en outre N par $\mathrm{N} + n't\, \delta'\mathrm{N}$, N_1 par $\mathrm{N}_1 + n't\, \delta'\mathrm{N}_1$, N_2 par $\mathrm{N}_2 + n't\, \delta'\mathrm{N}_2$, quant aux autres, toutes périodiques, elles proviennent de la substitution de $\iota m \mathrm{D}^{-2}$ et $2\iota m \mathrm{D}^{-3}$ à D^{-1} et D^{-2} dans les formules générales d'intégration appliquées à la fonction R privée du facteur $n't$ Nous pouvons donner les parties principales de ces inégalités, non pas qu'elles soient sensibles, mais pour permettre leur vérification directe, obtenue en intégrant les équations générales du mouvement suivant la méthode ordinaire, sous la condition de prendre $n' - \varphi'_0$ pour mouvement de l'argument G'

On a

$$\delta(\iota \mathrm{N}) = \nu' m (-3\varepsilon'_1 + 3\varepsilon'_{-1}),$$

$$\delta\varepsilon_1 = \nu' m \left(-\frac{21}{2^{2}} \varepsilon_1 \varepsilon'_1 + \frac{21}{2^{2}} \varepsilon_1 \varepsilon'_{-1} + \frac{15}{2^{2}} \varepsilon_{-1} \varepsilon'_1 \theta^{2} + \frac{35}{2^{2}\,3} \varepsilon_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^{2}\right),$$

$$\delta\gamma_1 = \nu' m \left(-\frac{3}{2^{2}} \gamma_1 \varepsilon'_1 + \frac{3}{2^{2}} \gamma_1 \varepsilon'_{-1} + \frac{3}{2^{2}} \gamma_{-1} \varepsilon'_1 \theta^{2} + \frac{7}{2^{2}\,3} \gamma_{-1} \varepsilon'_{-1} \theta^{2}\right),$$

$\delta\varepsilon_{-1}$, $\delta\gamma_{-1}$ étant conjugués de $\delta\varepsilon_1$, $\delta\gamma_1$, et enfin

$$\frac{a}{b} \delta(\sin \varpi) = \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_{-1}, \qquad \delta(\iota v) = \delta(\iota \mathrm{N}) + 2\delta\varepsilon_1 - 2\delta\varepsilon_{-1}, \qquad \delta(\iota s) = \delta\gamma_1 - \delta\gamma_{-1}$$

Observons encore que, conformément à ce qui a été dit à la fin du n° **149**, il conviendrait, si $\delta'_1\mathrm{N}$ avait une valeur sensible, de remplacer partout n par $n - n'\delta'\mathrm{N}$, de façon à ramener le coefficient du temps dans N à la valeur n

On aurait aussi bien pu arriver à tous ces mêmes résultats par l'application de la méthode du n° **11** (5°), déjà employée pour le calcul des inégalités séculaires

L'effet de la variation séculaire de l'écliptique est défini par

$$\mathrm{S} = -\frac{3}{2} n't (\kappa_1 - \kappa_{-1} e^{-2\lambda'}) \rho'^{3}, \qquad \mathrm{S}' = -\frac{3}{2} n't (\kappa_1 e^{2\lambda'} - \kappa_{-1}) \rho'^{3},$$

rappelons d'ailleurs que l'on a

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa}{2} e^{i(N'-\chi)}, \qquad \varkappa_{-1} = \frac{\varkappa}{2} e^{-i(N'-\chi)},$$

et convenons de négliger la très petite variation de χ, puisqu'elle se trouverait toujours multipliée par le nombre $\varkappa$ extrêmement petit lui-même.

En suivant toujours les mêmes principes, nous ferons d'abord abstraction du facteur $n't$, ce qui revient à chercher l'effet de l'attribution à l'orbite keplerienne du Soleil d'une inclinaison constante $\varkappa$ (dont on néglige le carré) et d'une longitude du nœud χ. Il est clair qu'ici cet effet sera obtenu en donnant simplement à λ et σ les accroissements déterminés au n° 150,

$$\delta\lambda = -\,\mathrm{th}\,\sigma(\varkappa_1 \theta e^{\lambda} + \varkappa_{-1}\theta^{-1} e^{-\lambda}),$$

$$\delta\sigma = \varkappa_1 \theta e^{\lambda} - \varkappa_{-1}\theta^{-1} e^{-\lambda},$$

et ceci permettra d'achever la vérification des formules générales d'intégration.

Revenant alors au problème véritable, on voit que la variation séculaire de l'écliptique produira deux sortes d'inégalités, et que pour obtenir l'effet des premières, il suffit de multiplier les expressions précédentes par $n't$. Mais on peut évidemment les laisser de côté, à la condition de supposer le mouvement de la Lune rapporté non plus à un plan fixe, mais au plan de l'écliptique mobile moyenne. Notons seulement que dans ces conditions, le nouvel axe mobile GX', parallèle à TX, n'est pas dirigé vers l'équinoxe mobile moyen, mais est tel que l'angle X'GN soit encore égal à χ, si l'on appelle GN la droite de longitude χ dans le plan fixe GX'Y' primitif.

Quant aux inégalités de la seconde sorte, toutes périodiques, qui proviennent de la substitution de imD^{-2} et $2imD^{-3}$ à D^{-1} et D^{-2} dans les formules générales d'intégration appliquées à la fonction R privée du facteur $n't$, elles peuvent devenir fort sensibles, en raison de la présence de très petits diviseurs. Nous allons les déterminer en négligeant e', e^2, γ^2, $\varepsilon\gamma$, et ne dépassant pas le second ordre par rapport à l'ensemble des quantités ε, γ, m. Il suffira d'ailleurs d'écrire les termes en $\varkappa_1$, ceux en $\varkappa_{-1}$ s'en déduisant immédiatement. Faisant donc $S = S' = -\frac{3}{2}\varkappa_1$, on trouve sans la moindre peine, à l'aide des

formules generales, les resultats suivants

$$\frac{\delta n}{n} = -6 i m \varkappa_1 \iota_{-1} \theta,$$

$$\delta N = \frac{21}{2^4} m \varkappa_1 \iota_1 \theta^{-1} + \varkappa_1 \iota_{-1} \theta \left(\frac{20}{3} m^{-1} + \frac{37}{2 \cdot 3} - \frac{503}{2^4 \cdot 3} m \right)$$

$$\delta \iota_1 = i \varkappa_1 \theta \left(-\frac{4}{3} m^{-1} - \frac{11}{2 \cdot 3} - \frac{11}{3} m - \frac{9083}{2^7 \cdot 3^2} m^2 \right),$$

$$\delta \iota_{-1} = i \varkappa_1 \theta^{-1} \left(-\frac{3}{2^4} m + \frac{51}{2^7} m^2 \right),$$

et, par suite,

$$\frac{a}{b} \delta(\sin \varpi) = i \varkappa_1 \gamma_1 \left(-\frac{8}{3} m \theta + 4 m \theta^{-1} \right) + i \varkappa_1 \iota_1 \left(-4 m \theta - \frac{16}{3} m \theta^{-1} + 8 m \theta^3 \right),$$

$$\begin{aligned}
\delta \iota = \varkappa_1 \gamma_1 \Big[& \theta \left(\frac{4}{3} m^{-1} + \frac{11}{2 \cdot 3} + 0\, m \right) + \theta^{-1} \left(3 - \frac{235}{2^4 \cdot 3} m \right) \\
& + \frac{11}{2 \cdot 3} m \theta^3 - \frac{3}{2^4} m \theta^{-3} \Big] \\
+ \varkappa_1 \iota_{-1} \Big[& \theta \left(\frac{20}{3} m^{-1} + \frac{37}{2 \cdot 3} - \frac{503}{2^4 \cdot 3} m \right) \\
& + \theta^{-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{41}{2 \cdot 3} m \right) + \theta^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{181}{2^4} m \right) \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta s = \varkappa_1 \Big[& \theta \left(-\frac{4}{3} m^{-1} - \frac{11}{2 \cdot 3} - \frac{11}{3} m - \frac{2291}{2^7 \cdot 3^2} m^2 \right) \\
& + \theta^{-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{2^4 \cdot 3} m + \frac{779}{2^5 \cdot 3^2} m^2 \right) \\
& + \theta^3 \left(-\frac{11}{2^2 \cdot 3} m - \frac{779}{2^6 \cdot 3^2} m^2 \right) + \frac{11}{2^5} m^2 \theta^{-3} \Big] \\
+ \varkappa_1 \varepsilon_1 \Big[& \theta \left(-\frac{8}{3} m^{-1} - \frac{11}{3} - \frac{20}{3} m \right) + \theta^{-1} \left(4 + \frac{149}{2^4} m \right) \\
& - \frac{14}{3} m \theta^3 + \frac{15}{2^3} m \theta^{-3} \Big] \\
+ \varkappa_1 \varepsilon_{-1} \Big[& \theta \left(\frac{8}{3} m^{-1} + \frac{11}{3} - \frac{13}{2^3 \cdot 3} m \right) \\
& + \theta^{-1} \left(1 + \frac{8}{3} m \right) + \theta^3 \left(-5 - \frac{527}{2^8 \cdot 3} m \right) \Big]
\end{aligned}$$

En ne s'arrêtant qu'aux inégalités les plus sensibles, ceci donne

numériquement

$$\delta s = -1'',40 \cos(N-\chi),$$

$$\delta v = 0'',06 \cos(N+H-\chi) + 0'',29 \cos(N-H-\chi)$$

Il convient encore de rapprocher de l'étude que nous venons de faire de l'effet des inégalités séculaires des éléments de l'orbite solaire, celle de l'effet des inégalités à longue période de ces mêmes éléments. Considérons un terme à longue période de la fonction perturbatrice qui définit l'action des planètes sur le mouvement de la Terre : il en résultera pour les éléments N', n', ε', φ' de ce mouvement des inégalités à longue période $\delta N'$, $\delta n'$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varphi'$, qui se trouvent grandies par l'intégration, la première surtout ; si sn' est le coefficient de t dans l'argument à longue période considéré ω, les inégalités $\delta n'$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varphi'$ d'une part, $\delta N'$ d'autre part, renfermeront respectivement la très petite quantité s ou s^2 en dénominateur.

Au lieu de passer par l'intermédiaire des perturbations $\delta r'$, $\delta v'$ du rayon vecteur et de la longitude qui correspondent à $\delta N'$, $\delta n'$, ..., ainsi que le demande la méthode générale, il est préférable ici de prendre directement la fonction R sous la forme

$$R = \frac{\delta U}{\delta N'}\delta N' + \frac{\delta U}{\delta n'}\delta n' + \frac{\delta U}{\delta\varepsilon'}\delta\varepsilon' + \frac{\delta U}{\delta\varphi'}\delta\varphi',$$

et nous nous bornerons à rechercher les inégalités résultantes, seules sensibles en réalité, qui sont d'un ordre supérieur à l'unité par rapport à l'inverse de s.

Comme $\frac{\delta U}{\delta\varphi'}$ est une fonction purement périodique (en entendant par là qu'elle ne contient ni terme constant, ni terme à longue période comparable à la période de l'argument ω), nous voyons d'abord qu'on peut laisser de côté l'influence de $\delta\varphi'$.

En second lieu, pour tenir compte de $\delta\varepsilon'$, il faut, pour la même raison, réduire $\frac{\delta U}{\delta\varepsilon'}$ à sa partie constante, et si alors $n'^2a^2A\delta\varepsilon'$ est un terme de R, de sorte que A est une constante, il faut lui appliquer les formules (3) en remplaçant A par $A\,\delta\varepsilon'$, et par suite $D^{-1}A$ par $A\,D^{-1}\delta\varepsilon'$. Or, quand on prend $\delta\varepsilon' = \nu\varepsilon'$, nous avons déjà fait ce calcul, et indiqué les valeurs $\delta_0 N$, $\delta_0 N_1$, $\delta_0 N_2$ qui en résultent ; mais dans ce cas particulier on a $D^{-1}\,\delta\varepsilon' = \frac{i\nu\varepsilon' nt}{1+m}$, tandis qu'actuellement il faut

prendre $D^{-1}\delta\varepsilon' = \frac{\delta\varepsilon'}{sm}$, en supposant $\delta\varepsilon'$ proportionnel à $e^{i\omega}$, nous aurons donc les valeurs cherchées de δN, δN_1, δN_2, en remplaçant le facteur $i\nu n t \varepsilon'^2$ par $\frac{n\varepsilon'\delta\varepsilon'}{sn'}$ dans les expressions de $\delta_0 N$, $\delta_0 N_1$, $\delta_0 N_2$, d'où, en particulier,

$$\delta(iN) = \frac{n\varepsilon'\delta\varepsilon'}{sn'}\left(-3m^2 + 6m^3 + \frac{3483}{2^3}m^4 + \frac{19347}{2^5}m^5\right),$$

en se bornant aux termes utiles pour le calcul de la partie principale des inégalités de la longitude.

De la même façon, il faut, pour tenir compte de $\delta n'$, réduire $\frac{\delta U}{\delta n'}$ à sa partie constante $\left(\frac{\delta U}{\delta n'}\right)_0$, or, on a

$$n'\frac{\delta U}{\delta n'} = -\frac{2}{3}r'\frac{\delta U}{\delta r'},$$

de sorte que la fonction R devient

$$n'^2 a^2 \frac{\delta n'}{n'}\left[\frac{1}{2}\rho'^3(xy + 2z^2) + \frac{3}{4}\rho'^3 e^{-2i\tau'} x^2 + \frac{3}{4}\rho'^3 e^{2i\tau'} y^2\right]_0,$$

donc, immédiatement,

$$\delta(iN) = \frac{n}{sn'}\frac{\delta n'}{n'}\left[-2m^2 + 4m^3 + \frac{213}{2^3}m^4 + \frac{281}{2^3}m^5\right]$$

Il ne reste plus qu'à tenir compte de $\delta N'$, qui est déjà de l'ordre de $\frac{1}{s^2}$, comme $\frac{\delta U}{\delta N'}$ est entièrement périodique, toutes les inégalités résultantes seront elles-mêmes périodiques, et du même ordre de grandeur. Observons alors que si A est une quantité périodique, les intégrales $D^{-1}(A\,\delta N')$, $D^{-2}(A\,\delta N')$ peuvent être confondues, dans les hypothèses faites, avec $\delta N' D^{-1} A$, $\delta N' D^{-2} A$. Tout va donc se passer comme si l'on donnait simplement à N' l'accroissement $\delta N'$ supposé constant. On aura des inégalités δn, $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$, δN, δN_1, δN_2, et en suivant toujours les mêmes principes que ci-dessus, on peut dire : les accroissements que l'on en déduira pour les coordonnées lunaires seront identiques à ceux pris par ces coordonnées quand on y remplace N' par $N' + \delta N'$, en même temps que N, N_1, N_2 par $N + \delta' N$, $N_1 + \delta' N_1$, $N_2 + \delta' N_2$, $\delta' N$, ... désignent encore ici

des constantes à déterminer par les relations telles que

$$\frac{\partial v}{\partial n}\delta n + \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\delta\gamma + \frac{\partial v}{\partial N}\delta N + \frac{\partial v}{\partial N_1}\delta N_1 + \frac{\partial v}{\partial N_2}\delta N_2$$

$$= \frac{\partial v}{\partial N}\delta N' + \frac{\partial v}{\partial N}\delta' N + \frac{\partial v}{\partial N_1}\delta' N_1 + \frac{\partial v}{\partial N_2}\delta' N_2$$

Il est facile de calculer $\delta' N$ en comparant les termes constants des deux membres de cette égalité. La fonction R qui doit être utilisée ici correspond aux hypothèses

$$P = 0, \qquad Q = -\frac{3}{4} i\,\delta N'\rho'^3 e^{-2\lambda'}, \qquad Q' = \frac{3}{4} i\,\delta N'\rho'^3 e^{2\lambda},$$

puisque l'on a

$$\frac{\delta U}{\delta N'} = \frac{\delta U}{\delta v'},$$

il en résulte

$$\frac{\delta n}{n} = i\,\delta N'\left(\frac{9}{2^2} m^2\theta^2 - \frac{9}{2^2} m^2\theta^{-2}\right),$$

$$\delta(iN) = i\,\delta N'\left(\frac{21}{2^3} m^2\theta^2 + \frac{21}{2^3} m^2\theta^{-2}\right),$$

$$\delta\varepsilon_1 = i\,\delta N'\left[-\frac{135}{2^5} m^3 - \frac{1029}{2^7} m^4 + \left(-\frac{9}{2^2} m^2 + 0\,m^3\right)\theta^2 + \frac{1}{2^2} m^2\theta^{-2}\right],$$

$$\delta\varepsilon_{-1} = i\,\delta N'\left[\frac{135}{2^5} m^3 + \frac{1029}{2^7} m^4 + \left(\frac{9}{2^2} m^2 + 0\,m^3\right)\theta^{-2} - \frac{1}{2^2} m^2\theta^2\right],$$

et partant,

$$\delta' N = \frac{1261}{2^5} m^4\,\delta N'.$$

Finalement donc, on obtiendra l'effet des inégalités à longue période considérées en remplaçant N′ par $N' + \delta N'$ dans les expressions des coordonnées lunaires, et (si l'on néglige ε, γ, e') en donnant à N l'accroissement

$$\delta N = \frac{n\varepsilon'\delta\varepsilon'}{isn'}\left(-3m^2 + 6m^3 + \frac{3483}{2^5} m^4 + \frac{19347}{2^{\text{[illegible]}}} m^5\right)$$

$$+ \frac{n}{isn'}\frac{\delta n'}{n'}\left(-2m^2 + 4m^3 + \frac{213}{2^3} m^4 + \frac{281}{2^3} m^5\right)$$

$$+ \delta N'\left(\frac{1261}{2^5} m^4\right),$$

Supposons que $\delta N'$, $\delta n'$, $\delta \varepsilon'$ proviennent d'un même terme de la fonction perturbatrice qui s'exerce sur la Terre, ce terme étant, suivant les notations du n° 150, de la forme

$$B\, \lambda'^{q'}_1\, \lambda''^{q''}\, \varepsilon'^{p'_1}_1\, \varepsilon'^{p'_{-1}}_{-1}\, \varepsilon''^{p''_1}_1\, \varepsilon''^{p''_{-1}}_{-1}\, \gamma''^{q''_1}_1\, \gamma''^{q''_{-1}}_{-1}$$

D'après le n° 98, on a

$$\frac{\delta n'}{n'} = \iota s\, \delta N',$$

et en réduisant $\delta\varepsilon'$ à sa partie principale,

$$\varepsilon'\, \delta\varepsilon' = -\frac{1}{3}\, \iota s \delta N' \frac{p'_1 - p'_{-1}}{q' + p'_1 - p'_{-1}},$$

nous pouvons donc écrire encore

$$\delta N = \delta N' \left[-2m + 2m^2 + \frac{245}{2^3} m^3 + \frac{3237}{2^5} m^4 \right.$$
$$\left. + \frac{p'_1 - p'_{-1}}{q' + p'_1 - p'_{-1}} \left(m - m^2 - \frac{1221}{2^6} m^3 - \frac{3805}{2^4} m^4 \right) \right]$$

La principale inégalité à longue période $\delta N'$ est égale à

$$1'',89 \sin(13N' - 8l'' + 314^\circ)$$

en appelant l'' la longitude moyenne de Vénus la formule précédente fait prévoir que l'inégalité δN correspondante en sera environ la huitième partie, au signe près M Brown la donne égale à

$$-0'',234 \sin(13N' - 8l'' + 313^\circ,8),$$

la période est de 239 ans

153 Donnons maintenant quelques indications générales sur le calcul des inégalités lunaires provenant des termes que nous n'avons pas encore envisagés dans les fonctions P, Q, Q′, S, S′ Ces quantités sont de la forme $\Sigma A e^{\iota(\alpha N' + \beta l'')}$, en désignant par A une constante, par α et β deux entiers quelconques, et par l'' la longitude moyenne d'une planète perturbatrice P″ Supposons que l'on ait fixé cette planète, et aussi l'entier β nous écrirons alors

$$P = \Sigma P_\alpha e^{\iota(\alpha N' + \beta l'')}, \qquad Q = \Sigma Q_\alpha e^{\iota(\alpha N' + \beta l'')},$$

Ces termes produisent des inégalités généralement périodiques que

nous caractériserons par le diviseur qu'y introduit l'intégration à la première ou à la deuxième puissance. Ce diviseur, qui peut être désigné précisément par la même lettre D qui sert de signe d'intégration, est de la forme $k + pg + qh + rm + \beta \frac{n''}{n-n'}$, en appelant k, p, q, r des entiers quelconques. Si ce diviseur est grand, les inégalités correspondantes seront en général négligeables; mais s'il est petit, elles pourront prendre des valeurs sensibles, surtout celles qui dépendent du carré du diviseur. Il est d'ailleurs clair que les coefficients des inégalités diminuent quand les nombres k, p, q, $r-\alpha$ grandissent en valeur absolue, en raison des facteurs m, ε, γ, ε' qui s'y introduisent alors à des puissances plus élevées.

Dans le cas particulier où l'on aurait $k = p = q = r = \beta = 0$, il faudrait, comme on sait, remplacer D^{-1} par $\frac{imt}{1+m}$.

Nous allons examiner en détail quelques cas seulement parmi les plus simples, en nous bornant bien entendu aux parties principales des quantités mises en évidence.

Supposons d'abord $k = p = q = 0$. Les formules générales donnent alors

$$\delta n = \delta\varepsilon = \delta\gamma = 0$$

puis

$$\begin{aligned}\delta(\iota N) = D^{-1}\Big[&(-4m^2+4m^3-10m^4+22m^5)P_r \\ &+\left(\frac{95}{2^3}m^4+\frac{203}{2\cdot 3}m^5\right)(Q_r+Q'_r) \\ &+(-30m^4+90m^5)(\varepsilon'_1 P_{r-1}+\varepsilon'_{-1}P_{r+1}) \\ &+\left(\frac{665}{2^2}m^4+\frac{4837}{2^3}m^5\right)(\varepsilon'_1 Q_{r-1}+\varepsilon'_{-1}Q'_{r+1}) \\ &+\left(-\frac{95}{2^2}m^4+\frac{449}{2^3\cdot 3}m^5\right)(\varepsilon'_{-1}Q_{r+1}+\varepsilon'_1 Q'_{r-1})+\dots\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\delta\varepsilon_{-1}}{\varepsilon_{-1}} = D^{-1}\Big[&\left(-7m^2+7m^3-\frac{1259}{2^5}m^4\right)P_r \\ &+\left(-\frac{75}{2^2}m^3-\frac{365}{2^4}m^4\right)(Q_r+Q'_r) \\ &-111\,m^4(\varepsilon'_1 P_{r-1}+\varepsilon'_{-1}P_{r+1}) \\ &\left(-\frac{175}{2}m^3-\frac{1765}{2^3}m^4\right)(\varepsilon'_1 Q_{r-1}+\varepsilon'_{-1}Q'_{r+1}) \\ &+\left(\frac{75}{2}m^3-\frac{455}{2^6}m^4\right)(\varepsilon'_{-1}Q_{r+1}+\varepsilon'_1 Q'_{r-1})+\dots\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_1} = -\frac{\delta\gamma_{-1}}{\gamma_{-1}} = D^{-1}\Big[&\left(-m^2+m^3-\frac{173}{2^5}m^4\right)P_1\\ &+\left(-\frac{3}{2^2}m^3+\frac{325}{2^4}m^4\right)(Q_1+Q'_1)\\ &-\frac{33}{2}m^4(\varepsilon'_1 P_{1-1}+\varepsilon'_{-1}P_{1+1})\\ &+\left(-\frac{7}{2}m^3+\frac{1101}{2^3}m^4\right)(\varepsilon'_1 Q_{1-1}+\varepsilon'_{-1}Q'_{1+1})\\ &\quad+\left(\frac{3}{2}m^3-\frac{161}{2^3}m^4\right)(\varepsilon'_1 Q_{1+1}+\varepsilon'_1 Q'_{1-1})+\ldots\Big]\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où l'on suppose $\gamma = \beta = 0$, on aurait toujours

$$\delta n = \delta c = \delta\gamma = 0,$$

puis

$$\begin{aligned}\delta N = nt\Big[&(-4m^2+8m^3-18m^4+40m^5)P_0\\ &+\left(\frac{95}{2^2}m^4+\frac{121}{2^2\cdot 3}m^5\right)(Q_0+Q'_0)-30m^4(\varepsilon'_1 P_{-1}+\varepsilon'_{-1}P_1)\\ &+\frac{665}{2^2}m^4(\varepsilon'_1 Q_{-1}+\varepsilon'_{-1}Q'_1)-\frac{95}{2^2}m^4(\varepsilon'_{-1}Q_1+\varepsilon'_1 Q'_{-1})\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta N_1 = nt\Big[&\left(3m^2-6m^3+\frac{1131}{2^5}m^4\right)P_0+\left(\frac{75}{2^2}m^3+\frac{445}{2^4}m^4\right)(Q_0+Q'_0)\\ &+81m^4(\varepsilon'_1 P_{-1}+\varepsilon'_{-1}P_1)\\ &+\left(\frac{175}{2}m^3+\frac{2395}{2^3}m^4\right)(\varepsilon'_1 Q_{-1}+\varepsilon'_{-1}Q'_1)\\ &\quad+\left(-\frac{75}{2}m^3+\frac{565}{2^3}m^4\right)(\varepsilon'_{-1}Q_1+\varepsilon'_1 Q'_{-1})\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta N_2 = nt\Big[&\left(-3m^2+6m^3-\frac{339}{2^5}m^4\right)P_0\\ &+\left(\frac{3}{2^2}m^3+\frac{43}{2^4}m^4\right)(Q_0+Q'_0)-\frac{27}{2}m^4(\varepsilon'_1 P_{-1}+\varepsilon'_{-1}P_1)\\ &+\left(\frac{7}{2}m^3+\frac{201}{2^3}m^4\right)(\varepsilon'_1 Q_{-1}+\varepsilon'_{-1}Q'_1)\\ &\quad+\left(-\frac{3}{2}m^3-\frac{17}{2^3}m^4\right)(\varepsilon'_{-1}Q_1+\varepsilon'_1 Q'_{-1})\Big]\end{aligned}$$

Mais il convient de faire disparaître δN, en donnant à n un accroissement égal et de signe contraire au coefficient de t dans δN, soit

$$\delta n = n[(4m^2-8m^3)P_0+\ldots],$$

et dans ces conditions, les valeurs ci-dessus de δN_1 et δN_2 doivent être augmentées de $nt(-3m'P_0 + \quad)$, $nt(3m'P_0 + \quad)$, de sorte que les coefficients de $nt\, m'P_0$ y deviennent respectivement $\frac{1035}{2^5}$ et $-\frac{243}{2^5}$. Les formules (5) et (6) conduisent directement à ces résultats

En négligeant ε', et appelant $(\delta u')_0$ la partie constante de $\delta u'$, on peut appliquer ces formules au calcul des perturbations du mouvement du périgée et du nœud lunaires, en faisant d'abord, pour tenir compte de μ et de l'action indirecte des planètes,

$$P_0 = \frac{1}{4}[\mu - 3(\delta u')_0], \qquad Q_0 = Q'_0 = \frac{3}{8}[\mu - (\delta u')_0],$$

d'où

$$\delta N_1 = nt[\mu - 3(\delta u')_0]\left(\frac{3}{2^2}m^2 + \frac{201}{2^4}m^3 + \frac{3705}{2^7}m^4\right),$$

$$\delta N_2 = nt[\mu - 3(\delta u')_0]\left(-\frac{3}{2^2}m^2 + \frac{33}{2^4}m^3 + \frac{15}{2^7}m^4\right),$$

les résultats n'atteignent pas une seconde par an

Si l'on veut avoir maintenant les mêmes perturbations dues à l'action d'une planète P″, on devra prendre, suivant les notations du n° 150, et d'après le 91, en négligeant les excentricités, et tenant compte de l'inclinaison j'',

$$C = b_0^{\frac{1}{2}} - \gamma''_1\gamma''_{-1}b_1^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$P_0 = \frac{1}{4}\frac{M''}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\left(D^2 - D + \frac{1}{4}\right)\left(b_0^{\frac{1}{2}} - \gamma''_1\gamma''_{-1}b_1^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$Q_0 = Q'_0 = \frac{1}{8}\frac{M''}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\left(D^2 - 3D + \frac{5}{4}\right)\left(b_0^{\frac{1}{2}} - \gamma''_1\gamma''_{-1}b_1^{\frac{3}{2}}\right),$$

en n'oubliant pas que ces formules conviennent au cas d'une planète inférieure, le signe de D devant être changé dans le cas contraire Les résultats, sensibles pour Vénus et Jupiter, n'atteignent pas trois secondes par an

Faisons maintenant l'hypothèse $k = q = 0$, $p = 1$, et retenons seulement les termes qui contiennent le diviseur D à la puissance -2, et qui sont de moindre degré par rapport à ε, γ, ε', en regardant

P_{i+h} comme de degré $-h$ par rapport à ε'. On a simplement

$$
\begin{aligned}
\delta(i\mathrm{N}) = \mathrm{D}^{-2}\Bigg[& \left(6m^2 + [\text{illegible}]\,m^4 + \frac{537}{2^5}m^5\right)\mathrm{P}_i\,\varepsilon_1 \\
& + \left(\frac{135}{2^2}m^3 + \frac{1779}{2^4}m^4 + \frac{93643}{2^8}m^5\right)\mathrm{Q}_i\,\varepsilon_1 \\
& + \left(-\frac{165}{2^3}m^4 - \frac{269}{2^3}m^5\right)\mathrm{Q}'_i\,\varepsilon_1 \\
& + \left(\frac{63}{2}m^3 + \frac{3267}{2^4}m^4\right)\mathrm{P}_{i+1}\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_{-1} \\
& + \left(-\frac{135}{2}m^3 + \frac{2811}{2^4}m^4\right)\mathrm{Q}_{i+1}\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_{-1} - \frac{1155}{2^3}m^4\,\mathrm{Q}'_{i+1}\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_{-1} \\
& + \left(\frac{189}{2^2}m^3 + \frac{14985}{2^5}m^4\right)\mathrm{P}_{i+2}\,\varepsilon_1\,\varepsilon'^2_{-1} \\
& + \left(-\frac{405}{2^2}m^3 - \frac{15971}{2^5}m^4\right)\mathrm{Q}_{i+2}\,\varepsilon_1\,\varepsilon'^2_{-1} - \frac{2805}{2^2}m^4\,\mathrm{Q}'_{i+2}\,\varepsilon_1\,\varepsilon'^2_{-1} + \ldots \Bigg]
\end{aligned}
$$

Faisons l'application de cette formule à la détermination de la partie principale d'une inégalité de la longitude lunaire, de très longue période, découverte par Hansen : c'est celle qui dépend de l'argument $16\,\mathrm{N}' - 18\,l'' + \mathrm{G}$, en désignant par l'' la longitude moyenne de Vénus ; sa période est de 273 ans.

Cherchons seulement la partie principale de cette inégalité provenant de l'action directe de Vénus ; suivant les notations du n° 150, nous devons considérer les termes C suivants

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{B}_1\lambda_1^{16}\lambda''^{-18}\gamma''^2_{-1} + \mathrm{B}_2\lambda_1^{16}\lambda''^{-16}\varepsilon''^2_{-1} + \mathrm{B}_3\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon'_{-1}\varepsilon''_{-1} + \mathrm{B}_4\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'^2_{-1} \\
& + \mathrm{B}_5\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon''_{-1} + \mathrm{B}_6\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'_{-1} + \mathrm{B}_7\lambda_1^{18}\lambda''^{-18},
\end{aligned}
$$

et d'après le n° 91, on a sans peine

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}_1 &= \frac{1}{2}\,b^{\frac{3}{2}}_{17}, \\
\mathrm{B}_2 &= \left(\frac{1}{2}\mathrm{D}^2 - 34\,\mathrm{D} + \frac{4551}{8}\right)b^{\frac{1}{2}}_{16}, \\
\mathrm{B}_3 &= \left(-\mathrm{D}^2 + 68\,\mathrm{D} - \frac{4623}{4}\right)b^{\frac{1}{2}}_{17}, \\
\mathrm{B}_4 &= \left(\frac{1}{2}\mathrm{D}^2 - 34\,\mathrm{D} + \frac{4687}{8}\right)b^{\frac{1}{2}}_{18}, \\
\mathrm{B}_5 &= \left(-\mathrm{D} + \frac{69}{2}\right)b^{\frac{1}{2}}_{17}, \\
\mathrm{B}_6 &= \left(\mathrm{D} - \frac{71}{2}\right)b^{\frac{1}{2}}_{18}, \\
\mathrm{B}_7 &= b^{\frac{1}{2}}_{18}.
\end{aligned}
$$

Tenant alors compte des formules

$$\begin{aligned}
\rho'^2 &= 1 + 2\varepsilon'_{-1} + 5\varepsilon'^2_{-1} + \quad, \\
\rho'^2 e^{-2\lambda'} &= 1 + 6\varepsilon'_{-1} + 26\varepsilon'^2_{-1} + \quad, \\
\rho'^2 e^{2\lambda'} &= 1 - 2\varepsilon'_{-1} + 0\,\varepsilon'^2_{-1} + \quad,
\end{aligned}$$

puis faisant, pour abréger l'écriture,

$$\frac{1}{4}\frac{M''}{M'}\sqrt{\frac{a'}{a''}} = f,$$

et introduisant les opérateurs

$$\Delta_{16} = D^2 + D - \frac{1023}{4}, \quad \Delta'_{16} = D^2 - 29D + \frac{837}{4}, \quad \Delta''_{16} = D^2 + 35D + \frac{1221}{4},$$

$$\Delta_{17} = D^2 + D - \frac{1155}{4}, \quad \Delta'_{17} = D^2 - 31D + \frac{957}{4}, \quad \Delta''_{17} = D^2 + 37D + \frac{1365}{4},$$

$$\Delta_{18} = D^2 + D - \frac{1295}{4}, \quad \Delta'_{18} = D^2 - 33D + \frac{1085}{4}, \quad \Delta''_{18} = D^2 + 39D + \frac{1517}{4},$$

nous pourrons écrire, l'entier β étant -18,

$$\begin{aligned}
P_{16} = {} & f\Delta_{16}(B_1\gamma''^2_{-1} + B_2\varepsilon''^2_{-1})\lambda_1^{16}\lambda''^{-16} + f\Delta_{17}(B_3 + 2B_5)\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon'_{-1}\varepsilon''_{-1} \\
& + f\Delta_{18}(B_4 + 2B_6 + 5B_7)\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'^2_{-1}, \\
P_{17} = {} & f\Delta_{17}B_5\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon''_{-1} + f\Delta_{18}(B_6 + 2B_7)\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'_{-1}, \\
P_{18} = {} & f\Delta_{18}B_7\lambda_1^{18}\lambda''^{-18},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{16} = {} & \frac{1}{2}f\Delta'_{16}(B_1\gamma''^2_{-1} + B_2\varepsilon''^2_{-1})\lambda_1^{16}\lambda''^{-16} + \frac{1}{2}f\Delta'_{17}(B_3 + 6B_5)\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon'_{-1}\varepsilon''_{-1} \\
& + \frac{1}{2}f\Delta'_{18}(B_4 + 6B_6 + 26B_7)\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'^2_{-1}, \\
Q_{17} = {} & \frac{1}{2}f\Delta'_{17}B_5\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon''_{-1} + \frac{1}{2}f\Delta'_{18}(B_6 + 6B_7)\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'_{-1}, \\
Q_{18} = {} & \frac{1}{2}f\Delta'_{18}B_7\lambda_1^{18}\lambda''^{-18},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{16} = {} & \frac{1}{2}f\Delta''_{16}(B_1\gamma''^2_{-1} + B_2\varepsilon''^2_{-1})\lambda_1^{16}\lambda''^{-16} + \frac{1}{2}f\Delta''_{17}(B_3 - 2B_5)\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon'_{-1}\varepsilon''_{-1} \\
& + \frac{1}{2}f\Delta''_{18}(B_4 - 2B_6)\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'^2_{-1}, \\
Q'_{17} = {} & \frac{1}{2}f\Delta''_{17}B_5\lambda_1^{17}\lambda''^{-17}\varepsilon''_{-1} + \frac{1}{2}f\Delta''_{18}(B_6 - 2B_7)\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}\varepsilon'_{-1}, \\
Q'_{18} = {} & \frac{1}{2}f\Delta''_{18}B_7\lambda_1^{18}\lambda''^{-18}
\end{aligned}$$

En mettant ces expressions dans la formule generale qui donne $\delta(iN)$, et y faisant $i = 16$, on aura l'inegalite cherchee Sa valeur complete est d'apres Brown, en tenant compte des termes negliges de l'action indirecte, et meme des termes du second ordre par rapport aux masses perturbatrices,

$$\delta N = 14'',27 \sin(16N' - 18l' + G - 101^\circ,0),$$

sa partie de beaucoup la plus importante provient du terme $B_1 \gamma_1^2$

Supposons encore $k = 2$, $p = -2$, $q = 0$ L'inegalite principale resultante sera, en designant par D le diviseur,

$$\delta\varepsilon_1 = \varepsilon_{-1} \theta^2 D^{-1} \Big[\left(-\frac{45}{2^2} m^3 - \frac{441}{2^4} m^4 - \frac{14035}{2^7} m^5\right) P_1 + \left(-10m^2 + 10m^3 - \frac{2013}{2^5} m^4 - \frac{9377}{2^6} m^5\right) Q_1 + \left(-\frac{1125}{2^5} m^5 - \frac{13425}{2^6} m^6\right) Q'_1 \Big]$$

On peut appliquer ceci au calcul de l'inegalite provenant du terme de R qui dépend de l'argument $2N' - 2l''$, en designant par l'' la longitude moyenne de Jupiter l'argument $2N - 2G - 2l''$ a en effet une periode assez longue de 17,4 ans Il faut alors évidemment, si l'on se borne toujours a l'action directe et aux parties principales, prendre

$$C = b_{\frac{1}{2}}^{1} \lambda_1^2 \lambda''^2,$$

d'ou

$$P_2 = \frac{1}{4} \frac{M''}{M'} \sqrt{\frac{a'}{a''}} \left(D^2 - D - \frac{15}{4}\right) b_{\frac{1}{2}}^{1},$$

$$Q_2 = \frac{1}{8} \frac{M''}{M'} \sqrt{\frac{a'}{a''}} \left(D^2 + D - \frac{3}{4}\right) b_{\frac{1}{2}}^{1},$$

$$Q'_2 = \frac{1}{8} \frac{M''}{M'} \sqrt{\frac{a'}{a''}} \left(D^2 - 7D + \frac{45}{4}\right) b_{\frac{1}{2}}^{1},$$

l'inegalite de la longitude, de même forme que $\delta\varepsilon_1$, a pour valeur complete

$$1'',14 \sin(2N - 2G - 2l'' + 180^\circ,3),$$

et a une periode voisine du mois lunaire

Cette inegalite et la precedente sont les seules dont le coefficient depasse une seconde

Faisons enfin l'hypothese $k = 1$, $p = 0$, $q = -1$ L'inégalité prin-

cipale résultante sera, en désignant toujours par D le diviseur,

$$\delta_{11} = \theta D^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{2} m^3 + \frac{25}{2^7} m^4 + \frac{131}{2^7} m^5 \right) S_1 \right.$$
$$\left. + \left(- \frac{3}{2^4} m^3 - \frac{55}{2^6} m^4 - \frac{799}{2^9 \cdot 3} m^5 \right) S'_1 \right],$$

et se reportera surtout sur la latitude

Prenons en même temps $i = 1$, $\beta = 0$, de sorte que le diviseur D, égal à $1 + m - h$, soit petit, correspondant à la période 18,6 ans du mouvement du nœud Il faut prendre simplement

$$C = -\gamma''_1 \zeta''_{-1} b_1^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$S_1 = \frac{1}{4} \frac{M''}{M'} \sqrt{\frac{a'}{a''}} (-2D + 1) b_1^{\frac{3}{2}} e^{iN} \gamma''_1, \qquad S'_1 = 0,$$

si l'on veut avoir l'action directe de la planète P′

L'inégalité correspondante de la latitude, due à l'action de Vénus, a pour valeur complète $-0'',24 \sin(N - \theta'')$

154 Pour achever l'étude des inégalités secondaires du mouvement de la Lune, il nous reste à tenir compte de la forme de la Terre, comme de celle de la Lune Envisageons d'abord l'influence de la forme de la Terre D'après les nos 4 et 5, la fonction perturbatrice correspondante est

$$R = \frac{f(M_0 + M)}{2 M_0 r^5} \left[(B + C - 2A)(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 \right.$$
$$+ (C + A - 2B)(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z)^2$$
$$\left. + (A + B - 2C)(\lambda'' X + \mu'' Y + \nu'' Z)^2 \right],$$

en appelant λ, μ, ν, les cosinus directeurs, par rapport aux axes fixes en direction TX, TY, TZ, des axes principaux d'inertie Tξ, Tη, Tζ, relatifs au centre de gravité de la Terre, et A, B, C les moments d'inertie correspondants

En assimilant la Terre à un corps solide, de sorte que A, B, C sont des constantes, nous choisirons pour C la plus grande de ces trois quantités, l'axe correspondant Tζ peut alors être confondu sans inconvénient avec l'axe instantané de rotation de la Terre sur elle-même, ainsi que nous le verrons ultérieurement, et par suite, le plan T$\xi\eta$ sera confondu avec celui de l'équateur

Soit γ_1 le nœud ascendant du plan TXY par rapport au plan T$\xi\eta$, nous nommerons ω l'inclinaison correspondante, ψ l'angle γ_1TX, φ l'angle γ_1Tξ. Le plan TXY étant celui de l'écliptique moyenne pour 1850,0, et l'axe TX étant dirigé vers l'équinoxe moyen correspondant, l'angle ψ n'est autre chose que la précession luni-solaire à l'époque t, si du moins on néglige la nutation, et dans les mêmes conditions, l'angle ω peut être considéré comme constant (sa très petite variation étant proportionnelle à t^2), égal à l'obliquité moyenne à l'origine du temps. On peut donc prendre $\psi = ft$, avec $f = 50'',37$, et $\omega = 23^\circ 27' 32''$. Quant à l'angle φ, il varie très rapidement, de 361° par jour.

En appelant toujours β la constante $f(M_0 + M)$, faisons

$$C - \frac{A+B}{2} = 2 M_0 k_1, \qquad \frac{B-A}{2} = 2 M_0 k_2,$$

de sorte que (*cf.* n° 2)

$$\begin{aligned} R = {} & \frac{\beta k_1}{r^5}\left[r^2 - 3(\lambda'' X + \mu'' Y + \nu'' Z)^2\right] \\ & + \frac{3\beta k_2}{r^5}\left[(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 - (\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z)^2\right] \end{aligned}$$

On a d'abord

$$\lambda'' = \sin\omega \sin\psi, \qquad \mu'' = \sin\omega\cos\psi, \qquad \nu'' = \cos\omega,$$

et par suite, en introduisant les coordonnées lunaires x, y, z et ρ,

$$\lambda'' X + \mu'' Y + \nu'' Z = \frac{a}{\rho}\left[\frac{1}{2}\sin\omega\left(x e^{i(N'+\psi)} - y e^{-i(N'+\psi)}\right) + z\cos\omega\right],$$

la première partie de R devient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\beta k_1}{a^3}\rho^6 \Bigg[& \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\omega\right)(xy + 2z^2) + \frac{3}{4}\sin^2\omega\left(x^2 e^{2i(N'+\psi)} + y^2 e^{-2i(N'+\psi)}\right) \\ & + \frac{3}{2}\sin 2\omega\left(xz e^{i(N'+\psi)} - yz e^{-i(N'+\psi)}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \lambda &= \cos\psi\cos\varphi + \cos\omega\sin\psi\sin\varphi, & \lambda' &= -\cos\psi\sin\varphi + \cos\omega\sin\psi\cos\varphi, \\ \mu &= -\sin\psi\cos\varphi + \cos\omega\cos\psi\sin\varphi, & \mu' &= \sin\psi\sin\varphi + \cos\omega\cos\psi\cos\varphi, \\ \nu &= -\sin\omega\sin\varphi, & \nu' &= -\sin\omega\cos\varphi, \end{aligned}$$

et par suite

$$\lambda^2 - \lambda'^2 = \frac{1}{2}[\sin^2\omega + (1 + \cos^2\omega)\cos 2\psi]\cos 2\varphi - \cos\omega \sin 2\psi \sin 2\varphi,$$

$$\mu^2 - \mu'^2 = \frac{1}{2}[\sin^2\omega - (1 + \cos^2\omega)\cos 2\psi]\cos 2\varphi - \cos\omega \sin 2\psi \sin 2\varphi,$$

$$\nu^2 - \nu'^2 = - \sin^2\omega \cos 2\varphi$$

$$\lambda\mu - \lambda'\mu' = -\frac{1}{2}(1 + \cos^2\omega)\sin 2\psi \cos 2\varphi + \cos\omega \cos 2\psi \sin 2\varphi,$$

$$\lambda\nu - \lambda'\nu' = \sin\omega \cos\omega \sin\psi \cos 2\varphi - \sin\omega \cos\psi \sin 2\varphi,$$

$$\mu\nu - \mu'\nu' = \sin\omega \cos\omega \cos\psi \cos 2\varphi + \sin\omega \sin\psi \sin 2\varphi$$

On voit par là que tous les termes de la deuxième partie de R renferment le facteur $e^{\pm 2i\varphi}$, et par suite ont une période voisine d'un demi-jour, très courte par rapport au mois lunaire, ces termes seront fortement diminués par les intégrations auxquelles ils seront soumis, et comme en outre la quantité k_2 est très petite par rapport à k_1, on doit réduire R à sa première partie seule, soit

$$R = \frac{\beta_1}{a^3}\rho^5(xy + 2z^2) + \frac{\beta_2}{a^3}\rho^5[x^2 e^{2i(N'+\psi)} + y^2 e^{-2i(N'+\psi)}]$$
$$+ \frac{\beta_3}{a^3}\rho^5[xze^{i(N'+\psi)} - yze^{-i(N'+\psi)}],$$

en faisant

$$\beta_1 = \beta k_1\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\omega\right), \qquad \beta_2 = \frac{3}{4}\beta k_1 \sin^2\omega, \qquad \beta_3 = \frac{3}{2}\beta k_1 \sin 2\omega$$

Les perturbations dépendront finalement, si l'on veut, des nombres $\frac{\beta_1}{n^2a^5}$, $\frac{\beta_2}{n^2a^5}$, $\frac{\beta_3}{n^2a^5}$, qui ont les valeurs suivantes en appelant encore $n^2a_0^3$ la constante β, et en admettant avec Brown que l'on ait

$$k_1 = a_0^2[7,666],$$

il vient

$$\frac{\beta k_1}{n^2a^5} = \frac{k_1}{a_0^2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^5 = \frac{k_1}{a_0^2}\left(1 + \frac{n'^2}{2n^2}\right)^{\frac{5}{3}},$$

et par suite,

$$\frac{\beta_1}{n^2a^5} = 0'',0244, \qquad \frac{\beta_2}{n^2a^5} = 0'',0038, \qquad \frac{\beta_3}{n^2a^5} = 0'',0321$$

La partie de R qui dépend de β_1 ne donne pas d'autres inégalités importantes que celles qui proviennent de sa partie constante, on

trouve aisément

$$\rho^5(xy - 2z^2) = 1 + 0\, m^3 + \left(6 + \frac{387}{2^5} m^2 + \frac{7047}{2^6} m^3\right) \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$$
$$+ \left(-6 - \frac{27}{2^5} m^2 + \frac{315}{2^6} m^3\right) \gamma_1 \gamma_{-1}$$
$$+ 30 \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1}^2 - 36 \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1} + 6 \gamma_1^2 \gamma_{-1}^2 + \ldots,$$

d'où, par les formules (5) et (6),

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}(-6 + \ldots),$$

$$\delta N_1 = nt \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(3 + \frac{717}{2^5} m^2 + \frac{7227}{2^6} m^3 + 6e^2 - 6\gamma^2 + \ldots\right) = +6'',57\, t,$$

$$\delta N_2 = nt \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(-3 + \frac{45}{2^5} m^2 - \frac{189}{2^6} m^3 - 6e^2 + \frac{3}{2}\gamma^2 + \ldots\right) = -6'',15\, t$$

En cherchant encore les inégalités qui ne dépassent le premier degré par rapport à ε, γ, m, on aura les compléments suivants

$$\rho^5(xy + 2z^2) = 3(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) + 9(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2)$$
$$+ \frac{45}{2^2} m(\varepsilon_1^2 \theta^{-2} + \varepsilon_{-1}^2 \theta^2) + 3(\gamma_1^2 + \gamma_{-1}^2) - \frac{9}{2^2} m(\gamma_1^2 \theta^{-2} + \gamma_{-1}^2 \theta^2),$$

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(-9\varepsilon_1 - 9\varepsilon_{-1}\right),$$

$$\delta(\iota N) = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(\frac{21}{2}\varepsilon_1 - \frac{21}{2}\varepsilon_{-1}\right),$$

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\varepsilon_{-1} + \frac{45}{2^3}\varepsilon_{-1}\theta^2\right),$$

$$\delta\varepsilon_{-1} = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\varepsilon_1 + \frac{45}{2^3}\varepsilon_1\theta^{-2}\right),$$

$$\delta\gamma_1 = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(\frac{3}{2}\gamma_{-1} - \frac{9}{2^3}\gamma_{-1}\theta^2\right),$$

$$\delta\gamma_{-1} = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left(\frac{3}{2}\gamma_1 - \frac{9}{2^3}\gamma_1\theta^{-2}\right),$$

et, finalement,

$$\delta(\iota e) = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left[9(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}) - \frac{45}{2^2}(\varepsilon_1\theta^{-2} - \varepsilon_{-1}\theta^2)\right],$$

$$\delta(\iota s) = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left[-\frac{3}{2}(\gamma_1 - \gamma_{-1}) + \frac{9}{2^3}(\gamma_1\theta^{-2} - \gamma_{-1}\theta^2)\right],$$

$$\frac{a}{b}\delta(\sin\varpi) = \frac{\beta_1}{n^2 a^5}\left[-1 + \frac{9}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) + \frac{45}{2^3}(\varepsilon_1\theta^{-2} + \varepsilon_{-1}\theta^2)\right],$$

en changeant ε en $\varepsilon\left(1 - \frac{9}{2}\frac{\beta_1}{n^2 a^5}\right)$, γ en $\gamma\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\beta_1}{n^2 a^5}\right)$, on fera disparaitre, comme il convient, les termes en ε_1, ε_{-1} de $\delta(iv)$, et ceux en γ_1, γ_{-1} de $\delta(is)$

Pour les inegalités qui dependent de β_2, bornons-nous a celles de degre zero au plus par rapport a m, ε, γ Faisons aussi

$$b_1 = \frac{\beta_2}{n^2 a^5} e^{2i(N+\psi)},$$

en nous contentant d'ecrire les termes en $e^{2i\psi}$, ceux en $e^{-2i\psi}$ s'en déduisant immediatement Il faut prendre

$$\rho^5 x^2 = \theta^2 + 7\varepsilon_{-1}\theta^2 - \gamma_{-1}\theta^2 + 2\varepsilon_{-1}^2\theta^2$$

(le coefficient de $\varepsilon_{-1}^2\theta^2$ etant du second degre en m), par suite,

$$\frac{\delta n}{n} = -3 b_1\theta^2, \qquad \delta(iN) = b_1\theta^2\left(\frac{3}{2} - \frac{40}{3} m^{-2}\gamma_{-1}^2\right),$$

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{1}{2} b_1\theta^2, \qquad \delta\varepsilon_{-1} = \frac{7}{2\cdot 3} b_1\theta^2, \qquad \delta\gamma_1 = b_1\theta^2\gamma_{-1}\left(\frac{4}{3} m^{-2} + \frac{19}{2\cdot 3} m^{-1}\right),$$

d'ou

$$\delta(iv) = b_1\theta^2\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{4}{3} m^{-2}\gamma_1\gamma_{-1} - \frac{40}{3} m^{-2}\gamma_{-1}^2\right),$$

$$\delta(is) = b_1\theta^2\gamma_{-1}\left(\frac{4}{3} m^{-2} + \frac{19}{2\cdot 3} m^{-1} + \frac{8}{3} m^{-2}\varepsilon_{-1} - \frac{8}{3} m^{-2}\varepsilon_1\right) - \frac{1}{2} m^{-1} b_1\gamma_{-1},$$

$$\frac{a}{b}\delta(\sin\varpi) = -\frac{1}{3} b_1\theta^2$$

Un terme de R merite encore de retenir l'attention c'est celui en $\frac{\beta_2}{a^3}\varepsilon'^2_{-1} e^{2i(N+\psi)}$, dont l'argument est $2\psi + 2\varphi'$, a période extrêmement longue, il faut d'ailleurs tenir compte du mouvement réel de la longitude φ' du périgee solaire pour estimer cette periode Mais, en allant jusqu'au troisieme degre par rapport a m, ε, γ, le coefficient de ce terme est $-\frac{9}{2} m\gamma_1\gamma_{-1}$, les inegalites correspondantes contiendront donc en facteur $\frac{9}{32} m\gamma^2\varepsilon'^2\frac{\beta_2}{n^2 a^5}$, et seront entierement insensibles

Envisageons enfin les inegalites qui dependent de β_3, et qui sont analogues a celles produites par le mouvement de l'ecliptique

Posons

$$c_1 = \frac{\beta_3}{n^2 a^5} e^{i(N+\psi)},$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\iota s) = \; & c_1 \Big[\theta\left(-\frac{2}{3}m^{-2} - \frac{19}{2^2\,3}m^{-1} - \frac{11}{2^2} - \frac{3329}{2^6\,3^2}m\right) \\
& + \theta^{-1}\left(\frac{1}{2^2}m^{-1} + \frac{23}{2^3\,3} + \frac{1169}{2^6\,3^2}m\right) \\
& + \theta^3\left(-\frac{11}{2^3\,3} - \frac{1043}{2^6\,3^2}m\right) + \frac{11}{2^6}\theta^{-3}\Big] \\
+ c_1\varepsilon_1 & \Big[\theta\left(-\frac{4}{3}m^{-2} - \frac{19}{2\,3}m^{-1} - \frac{23}{2\,3}\right) \\
& + \theta^{-1}\left(2m^{-1} + \frac{181}{2^4}\right) - \frac{7}{3}\theta^3 + \frac{15}{2^4}\theta^{-3}\Big] \\
+ c_1\varepsilon_{-1} & \Big[\theta\left(\frac{4}{3}m^{-2} + \frac{19}{2\,3}m^{-1} - \frac{7}{2^2}\right) \\
& + \theta^{-1}\left(\frac{1}{2}m^{-1} + \frac{11}{2\,3}\right) + \theta^3\left(\frac{1}{2}m^{-1} - \frac{647}{2^4\,3}\right)\Big],
\end{aligned}
$$

en laissant de côte la parallaxe, dont les perturbations sont absolument negligeables

Finalement, les seules inegalités de la longitude et de la latitude de la Lune, dues a la forme de la Terre, et atteignant la seconde, sont

$$\delta v = 7'',4 \sin(N - H + \psi), \qquad \delta s = - 8'',4 \sin(N - \psi),$$

il faut y joindre celles des longitudes du périgée et du nœud déjà signalees

Il convient, ici encore, de tenir compte du mouvement de l'écliptique, ce qui donnera en réalité des inégalités du second ordre par rapport aux coefficients des actions secondaires Donnons d'abord à l'orbite képlerienne du Soleil une inclinaison $\jmath'$, dont on négligera le carré, et une longitude du nœud ϑ' Les expressions des coordonnées de la Lune prendront des accroissements δX, δY, δZ, mais les coefficients des équations fondamentales (5) et (6) du Chapitre précédent ne changeront pas, puisqu'on neglige le carré de $\jmath'$ On a évidemment

$$
\begin{gathered}
\delta X = \jmath' \sin\vartheta' Z, \qquad \delta Y = -\jmath' \cos\vartheta' Z, \\
\delta Z = -\jmath' \sin\vartheta' X + \jmath' \cos\vartheta' Y,
\end{gathered}
$$

et par suite la fonction R prend l'accroissement

$$\delta R = -\frac{6\beta k_1}{r^5}(\lambda'' X + \mu'' Y + \nu'' Z)(\lambda''\delta X + \mu''\delta Y + \nu''\delta Z),$$

égal encore à

$$
\begin{aligned}
&-j'\frac{\beta_3}{a^3}\rho^2(xy+2z^2)\cos(\vartheta'+\psi)\\
&+\frac{1}{2}j'\frac{\beta_3}{a^3}\rho^2[x^2e^{i(2N'+\psi-\vartheta)}+y^2e^{-i(2N'+\psi-\vartheta)}]\\
&-4j'\frac{\beta_2}{a^3}\rho^2\cos(\vartheta'+\psi)[xze^{i(N'+\psi)}-yze^{-i(N'+\psi)}]\\
&+4j'\frac{\beta_2}{a^3}\rho^2[xze^{i(N'-\vartheta)}-yze^{-i(N'-\vartheta)}],
\end{aligned}
$$

en faisant

$$\beta_2' = \frac{3}{4}\beta k_1\cos^2\omega.$$

Il faut maintenant remplacer j' par $\varkappa n't$ et ϑ' par χ, suivant les notations adoptées précédemment. Il en résultera généralement des perturbations périodiques et mixtes entièrement négligeables, mais il faut accorder une attention spéciale au terme purement séculaire de δR (en négligeant le mouvement de $\chi+\psi$), égal à

$$-\frac{\beta_3}{a^3}\varkappa\cos(\chi+\psi)[\rho^2(xy+2z^2)]_0 n't,$$

nous avons d'ailleurs déjà calculé la quantité $[\rho^2(xy+2z^2)]_0$, égale à $1+6\varepsilon_1\varepsilon_{-1}-6\gamma_1\gamma_{-1}$.

Il en résulte, suivant les formules (3), des *accélérations séculaires* nouvelles

$$\delta N = -3\frac{\beta_3}{n^2a^3}\varkappa\cos(\chi+\psi)nn't^2,\qquad \delta N_1 = \frac{1}{2}\delta N,\qquad \delta N_2 = -\frac{1}{2}\delta N,$$

qui ne sont pas négligeables, en prenant le siècle julien pour unité, on a en effet plus exactement

$$\delta N = 0'',20t^2,\qquad \delta N_1 = 0'',11t^2,\qquad \delta N_2 = -0'',10t^2.$$

On observera que le coefficient $\varkappa n'\cos(\chi+\psi)$ est précisément égal à celui de variation séculaire de l'obliquité moyenne de l'écliptique, angle de l'équateur et de l'écliptique moyens mobiles.

On peut encore se demander avec Laplace si, en complétant la fonction R qui définit les perturbations du mouvement de la Lune dues à la forme et à la constitution de la Terre, on ne rencontrerait

pas quelque nouvelle inégalité à longue période susceptible de grandir suffisamment pour devenir appréciable.

Reportons-nous aux nos 2, 4, 5 : on voit bien vite que si l'on tient compte du terme appelé U_3 (no 2) dans le développement du potentiel d'attraction de la Terre et de la Lune, tout en négligeant la forme de la Lune elle-même, il faudra compléter la fonction R du numéro précédent par le terme

$$\delta R = \frac{f(M_0+M)}{2M_0 r^4}\left[5\Sigma m\rho^3\cos^3\left(\widehat{TM,\,TL}\right) - 3\Sigma m\rho^3\cos\left(\widehat{TM,\,TL}\right)\right],$$

en désignant par m un élément de la Terre, de masse m, et par ρ la distance TM.

Si ξ, η, ζ sont les cordonnées de M par rapport aux axes $T\xi$, $T\eta$, $T\zeta$ définis précédemment, on a donc

$$\begin{aligned}\delta R = \frac{f(M_0+M)}{2M_0 r^7}\Big\{ & 5\Sigma m[\xi(\lambda X+\mu Y+\nu Z)+\eta(\lambda' X+\mu' Y+\nu' Z)\\ & \qquad +\zeta(\lambda'' X+\mu'' Y+\nu'' Z)]^3\\ & -3r^2\Sigma m(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)[\xi(\lambda X+\mu Y+\nu Z)\\ & +\eta(\lambda' X+\mu' Y+\nu' Z)+\zeta(\lambda'' X+\mu'' Y+\nu'' Z)]\Big\}\end{aligned}$$

On peut enlever tous les termes qui dépendent de l'angle φ, 2φ ou 3φ, leur très courte période les rendant insensibles, en posant alors

$$\Sigma m\zeta\left(\frac{3}{2}\xi^2+\frac{3}{2}\eta^2-\zeta^2\right) = 2M_0 k,$$

on constate sans peine qu'il reste simplement

$$\delta R = \frac{\beta k}{r^7}[3r^2(\lambda'' X+\mu'' Y+\nu'' Z) - 5(\lambda'' X+\mu'' Y+\nu'' Z)^3]$$

Le seul argument à très longue période que l'on puisse rencontrer dans le développement de cette expression est l'argument $3(N+\psi)-G-2H$, dont la période diffère peu de celle de l'inégalité que nous avons déjà caractérisée par le nom de Laplace au no **130**. En n'écrivant que les termes en $e^{3i\psi}$, la partie utile de δR se réduit à

$$-\frac{5i}{8}\,\frac{\beta k}{a^4}\sin^3\omega\,\rho^7\chi^3 e^{3i(N'+\psi)},$$

et comme on a

$$\rho = 1 + \varepsilon_{-1} + \ldots, \qquad r = a(1 - 3\varepsilon_{-1} + \zeta^2_1 + \varepsilon_{-1}\zeta^2_1 + \varepsilon_{-1}\gamma^2_1 + \ldots),$$

le terme à considérer de δR est

$$-\frac{15i}{4}\,\frac{\beta k}{a^4}\sin^3\omega\,\varepsilon_{-1}\,\zeta^2_1\,e^{3i(N+\psi)}.$$

Il en résulte en particulier

$$\delta N = \frac{15}{16}\,\frac{\beta k}{n^2 a^6}\sin^3\omega\,\varepsilon_{-1}\,\zeta^2_1\,e^{3i(N+\psi)}\left[\frac{9m^2}{(g'+2h')^2} - \frac{38}{g'+h'}\right],$$

et l'on voit sans peine que cette inégalité reste tout à fait inappréciable, à moins de donner à $\frac{k}{a^3}$ des valeurs certainement inadmissibles; le coefficient k serait nul en effet si la Terre était constituée symétriquement par rapport à l'équateur, et par suite, sa valeur résulte du très faible défaut de symétrie entre les deux hémisphères terrestres.

L'influence de la forme de la Lune sur son mouvement autour de la Terre est extrêmement petite. La fonction perturbatrice dont elle dépend est la même que ci-dessus, quand il s'agissait d'étudier l'action de la forme de la Terre, à la condition d'échanger M et M_0, et de regarder les quantités A, B, C, λ, μ, ν, ... comme se rapportant aux axes d'inertie principaux de la Lune relatifs à son centre de gravité L, soit $L\xi$, $L\eta$, $L\zeta$.

Supposons $A < B < C$, et définissons comme précédemment la position relative des deux systèmes d'axes $L\xi\eta\zeta$, $Lxyz$, ces derniers étant parallèles aux axes fondamentaux TXYZ; γ_1 désignant le nœud ascendant de Lxy sur $L\xi\eta$, ω est l'inclinaison correspondante, et l'on a

$$\psi = \widehat{\gamma_1 L x}, \qquad \varphi = \widehat{\gamma_1 L \xi}.$$

En faisant encore ici

$$C - \frac{A+B}{2} = 2Mk_1, \qquad \frac{B-A}{2} = 2Mk_2,$$

on a l'expression complète

$$
\begin{aligned}
R = \quad & \frac{\beta k_1}{a^3}\rho^5 \Big[\Big(1 - \frac{3}{2}\sin^2\omega\Big)(xy + 2z^2) + \frac{3}{4}\sin^2\omega\big(x^2 e^{2i(N'+\psi)} + y^2 e^{-2i(N'+\psi)}\big) \\
& \qquad + \frac{3}{2}\sin 2\omega\big(xz e^{i(N'+\psi)} - yz e^{-i(N'+\psi)}\big)\Big] \\
& + \frac{3\beta k_2}{a^3}\rho^5 \Big\{ \frac{1}{2} x^2 e^{2i(N'+\psi-\varphi)} + \frac{1}{2} y^2 e^{-2i(N'+\psi-\varphi)} \\
& - \big(xe^{i(N'+\psi-2\varphi)} - ye^{-i(N'+\psi-2\varphi)}\big)\Big[z\sin\omega + \sin^2\frac{\omega}{2}\big(xe^{i(N'+\psi)} - ye^{-i(N'+\psi)}\big)\Big] \\
& + \frac{1}{2}\big(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}\big)\Big[z\sin\omega + \sin^2\frac{\omega}{2}\big(xe^{i(N'+\psi)} - ye^{-i(N'+\psi)}\big)\Big]^2 \Big\}.
\end{aligned}
$$

Les lois du mouvement de la Lune sur elle-même nous apprennent, ainsi que nous le verrons plus tard, que les positions moyennes de la droite $L\gamma_1$ et de la ligne du nœud ascendant de l'orbite de la Lune sur le plan Lxy sont coïncidantes, de sorte qu'on a, avec une approximation suffisante,

$$N + \psi = \Pi,$$

de plus, la longitude moyenne de l'axe $L\xi$ est constamment égale à celle du rayon vecteur LT, c'est-à-dire qu'on a, dans les mêmes conditions,

$$\varphi = \Pi + \pi,$$

enfin, l'angle ω peut être pris constant, égal à 1° 32′.

Cherchons seulement l'influence de R sur les moyens mouvements du périgée et du nœud lunaires, c'est-à-dire les inégalités des longitudes N_1 et N_2 produites par la partie constante de R. En nous bornant aux termes principaux, et tenant compte de ce que nous venons de dire, ainsi que de la petitesse de ω, on aura

$$
\begin{aligned}
R = \quad & \frac{\beta k_1}{a^3}\big[6\varepsilon_1\varepsilon_{-1} - 6\gamma_1\gamma_{-1} - 3\sin\omega\big(\gamma_1 e^{-i(N+\psi)} + \gamma_{-1} e^{i(N+\psi)}\big)\big] \\
& + 3\frac{\beta k_2}{a^3}\big[(-5\varepsilon_1\varepsilon_{-1} - \gamma_1\gamma_{-1})\big(e^{2i(N+\psi-\varphi)} + e^{-2i(N+\psi-\varphi)}\big) \\
& \qquad - \sin\omega\big(\gamma_1 e^{i(N+\psi-2\varphi)} + \gamma_{-1} e^{-i(N+\psi-2\varphi)}\big)\big]
\end{aligned}
$$

Nous rencontrons ici les termes constants spéciaux signalés au n° **149**, et d'après les formules (6), on trouve en tout

$$\delta N_1 = 3nt\frac{\beta(k_1 - 5k_2)}{n^2 a^5}, \qquad \delta N_2 = -3nt\frac{\beta(k_1 + k_2)}{n^2 a^5}\Big(1 + \frac{\sin\omega}{\gamma}\Big)

Les valeurs assez incertaines de k_1, k_2 donnent à M. Brown

$$\delta N_1 = 0'',03\,t, \qquad \delta N_2 = -0'',14\,t.$$

155. La Lune produit sur le mouvement de la Terre, ou plutôt sur le mouvement du Soleil vu de la Terre, des perturbations qu'il est bien facile de déterminer.

En premier lieu, les coordonnées X′, Y′, Z′, qui se rapportent au centre de gravité G du système Terre-Lune, prennent des accroissements δX′, δY′, δZ′, quand c'est la Terre elle-même qui devient l'origine, et l'on a évidemment

$$\delta X' = \nu X, \qquad \delta Y' = \nu Y, \qquad \delta Z' = \nu Z,$$

en se rappelant que $\nu = \dfrac{M}{M_0 + M}$. Il en résulte pour les perturbations des coordonnées polaires r', v', s',

$$\frac{\delta r'}{r'} = \nu \frac{a}{r'} \frac{1}{2}(x e^{-\lambda'} + y e^{\lambda'}),$$

$$\delta(iv') = \nu \frac{a}{r'} \frac{1}{2}(x e^{-\lambda'} - y e^{\lambda'}),$$

$$\delta(is') = \nu \frac{a}{r'} z,$$

les termes principaux de ces inégalités sont

$$\frac{\delta r'}{r'} = 6'',[illegible] \cos(N - N'),$$
$$\delta v' = 6'',[illegible] \sin(N - N'),$$
$$\delta s' = 0'',58 \sin \Pi.$$

En second lieu, nous avons dit au nº 4 que la fonction perturbatrice qui définit le mouvement du point G devait être augmentée, en raison de la constitution du système Terre-Lune, d'un terme complémentaire

$$\delta V = f \frac{(M' + M_0 + M) M_0 M}{(M_0 + M)^2} \frac{r^2}{r'^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \Pi - \frac{1}{2} \right),$$

soit

$$\delta V = n'^2 a'^2 \frac{M_0 M}{(M_0 + M)^2} \alpha^2 \Big[\frac{1}{4} \rho'^3 (xy + [illegible]\, z^2) + \frac{3}{8} x^2 \rho'^3 e^{-2\lambda'} + \frac{3}{8} y^2 \rho'^3 e^{2\lambda'}$$
$$- \frac{3}{2} \rho'^3 (\gamma'_1 e^{\lambda'} - \gamma'_1 e^{-\lambda'})(xz e^{-\lambda'} + yz e^{\lambda'}) \Big],$$

en attribuant à l'orbite du Soleil une inclinaison j' (que l'on supposera nulle après le calcul), une longitude du nœud θ', et faisant comme precedemment

$$\iota'_1 = \frac{j'}{2} e^{i(\lambda' - \theta')}, \qquad \iota'_{-1} = \frac{j'}{2} e^{-i(\lambda' - \theta')}.$$

En ne retenant que les parties les plus importantes, constantes ou à longue periode, et posant

$$p = \alpha^2 \frac{M_0 M}{(M_0 + M)^2},$$

on a simplement

$$\delta V = p n'^2 a'^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} + \frac{3}{2} (\gamma_1 \gamma'_{-1} \theta^{-1} + \gamma_{-1} \gamma'_1 \theta) \right],$$

et les formules generales les plus simples du Livre III nous donnent les inégalités correspondantes

$$\delta\varpi' = \frac{3}{4} p n' t = 0'',08 t,$$

$$\delta(j' \sin \theta') = \frac{3}{4} p \gamma \frac{n'}{n_2} \sin N_2 = -0'',02 \sin N_2,$$

$$\delta(j' \cos \theta') = \frac{3}{4} p \gamma \frac{n'}{n_2} \cos N_2 = -0'',02 \cos N_2.$$

156 Nous avons deja signale la difficulte qui provient des derivations par rapport à n, lorsqu'on veut effectuer numeriquement les calculs decrits dans ce Chapitre et le precedent. Nous allons indiquer sommairement, pour terminer, un procede relativement simple, dont l'application permettrait de calculer exactement les valeurs numeriques des derivees des coordonnees lunaires par rapport à n, surtout si l'on en possède deja des valeurs approchees.

Faisons pour un instant, en raisonnant comme nous avons déja fait au n° **127**,

$$x_1 = a x, \quad y_1 = a y, \quad z_1 = a z, \quad t_1 = n t, \quad \beta = f(M_0 + M),$$

on a

$$r^2 = x_1 y_1 - z_1^2,$$

$$U = \frac{\beta}{r} + \frac{n'^2}{4} \rho'^3 (x_1 y_1 + 2 z_1^2) + \frac{3 n'^2}{8} (x_1^2 \rho'^3 e^{-2i\lambda'} + y_1^2 \rho'^3 e^{2i\lambda'}),$$

et les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont déterminées par les équations du n° 121 modifiées comme il convient, soit

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x_1}{dt_1^2} + 2n'\frac{dx_1}{dt_1} + n'^2 x_1 + 2\frac{\partial U}{\partial y_1} = 0,\\
&\frac{d^2 y_1}{dt_1^2} - 2n'\frac{dy_1}{dt_1} + n'^2 y_1 + 2\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{d^2 z_1}{dt_1^2} \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{\partial U}{\partial z_1} = 0
\end{aligned}$$

La solution de ces équations dépend des six constantes arbitraires n, ε, γ, l_0, φ_0, ϑ_0, introduites précédemment. Soit μ l'une quelconque de ces constantes, et faisons $\frac{\partial x_1}{\partial \mu} = x'_1$, $\frac{\partial y_1}{\partial \mu} = y'_1$, $\frac{\partial z_1}{\partial \mu} = z'_1$, en différentiant par rapport à μ les équations ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x'_1}{dt_1^2} + 2n'\frac{dx'_1}{dt_1} + n'^2 x'_1 + 2x'_1\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_1} + 2y'_1\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + 2z'_1\frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial z_1} = 0,\\
&\frac{d^2 y'_1}{dt_1^2} - 2n'\frac{dy'_1}{dt_1} + n'^2 y'_1 + 2x'_1\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + 2y'_1\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_1} + 2z'_1\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial z_1} = 0,\\
&\frac{d^2 z'_1}{dt_1^2} - x'_1\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial z_1} - y'_1\frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial z_1} - z'_1\frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} = 0
\end{aligned}$$

Mais x_1, y_1, z_1 se présentent comme des fonctions périodiques des arguments N, G, H, dont les coefficients dépendent de n, ε, γ, et de même les coefficients n, $n - n_1$, $n - n_2$ de t dans N, G, H dépendent de n, ε, γ. Si donc on considère dorénavant x_1, y_1, z_1 comme fonctions des variables N, G, H, n, ε, γ, ainsi que nous l'avons toujours fait dans ce Chapitre et le précédent, on a par exemple, en prenant pour μ la constante n,

$$x'_1 = \frac{\partial x_1}{\partial n} + t\left[\frac{\partial x_1}{\partial N} + \frac{\partial x_1}{\partial G}\left(1 - \frac{\partial n_1}{\partial n}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial H}\left(1 - \frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\right]$$

En portant ces valeurs dans les équations ci-dessus, leurs premiers membres prennent la forme $P + P't$, en désignant par P et P' des fonctions périodiques, de sorte que l'on a séparément $P = 0$, $P' = 0$, le fait que P' est nul est d'ailleurs facile à vérifier directement, puisqu'il résulte de ces mêmes équations en supposant que μ soit pris successivement égal à l_0, ou φ_0, ou ϑ_0.

Les quantités $\frac{\partial x_1}{\partial n}$, $\frac{\partial y_1}{\partial n}$, $\frac{\partial z_1}{\partial n}$ vérifient donc les équations précé-

dentes, quand on les y met à la place de x'_1, y'_1, z'_1, à la condition d'augmenter les premiers membres respectivement de

$$2\left(\frac{d}{dt_1}+n'\right)\left[\frac{\partial x_1}{\partial(\iota N)}+\frac{\partial x_1}{\partial(\iota G)}\left(1-\frac{\partial n_1}{\partial n}\right)+\frac{\partial x_1}{\partial(\iota H)}\left(1-\frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\right],$$

$$2\left(\frac{d}{dt_1}-n'\right)\left[\frac{\partial y_1}{\partial(\iota N)}+\frac{\partial y_1}{\partial(\iota G)}\left(1-\frac{\partial n_1}{\partial n}\right)+\frac{\partial y_1}{\partial(\iota H)}\left(1-\frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\right],$$

$$2\ \frac{d}{dt_1}\qquad\left[\frac{\partial z_1}{\partial(\iota N)}+\frac{\partial z_1}{\partial(\iota G)}\left(1-\frac{\partial n_1}{\partial n}\right)+\frac{\partial z_1}{\partial(\iota H)}\left(1-\frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\right].$$

Revenons alors à nos notations ordinaires, et soit

$$x'=\frac{n-n'}{a}\,\frac{\partial}{\partial n}(ax),\qquad y'=\frac{n-n'}{a}\,\frac{\partial}{\partial n}(ay),\qquad z'=\frac{n-n'}{a}\,\frac{\partial}{\partial n}(az),$$

$$U'=\frac{U}{(n-n')^2a^2}=\mathbf{k}\rho+\frac{m^2}{4}(xy+2z^2)+\frac{3m^2}{8}(x^2+y^2)+F,$$

$$X'=\theta\frac{\partial x}{\partial\theta}+\left(1-\frac{\partial n_1}{\partial n}\right)\left(\varepsilon_1\frac{\partial x}{\partial\varepsilon_1}-\varepsilon_{-1}\frac{\partial x}{\partial\varepsilon_{-1}}\right)+\left(1-\frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\left(\gamma_1\frac{\partial x}{\partial\gamma_1}-\gamma_{-1}\frac{\partial x}{\partial\gamma_{-1}}\right),$$

$$Y'=\theta\frac{\partial y}{\partial\theta}+\left(1-\frac{\partial n_1}{\partial n}\right)\left(\varepsilon_1\frac{\partial y}{\partial\varepsilon_1}-\varepsilon_{-1}\frac{\partial y}{\partial\varepsilon_{-1}}\right)+\left(1-\frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\left(\gamma_1\frac{\partial y}{\partial\gamma_1}-\gamma_{-1}\frac{\partial y}{\partial\gamma_{-1}}\right),$$

$$Z'=\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}+\left(1-\frac{\partial n_1}{\partial n}\right)\left(\varepsilon_1\frac{\partial z}{\partial\varepsilon_1}-\varepsilon_{-1}\frac{\partial z}{\partial\varepsilon_{-1}}\right)+\left(1-\frac{\partial n_2}{\partial n}\right)\left(\gamma_1\frac{\partial z}{\partial\gamma_1}-\gamma_{-1}\frac{\partial z}{\partial\gamma_{-1}}\right),$$

remarquons de plus que

$$\frac{\partial^2U'}{\partial x^2}=\frac{3}{4}\mathbf{k}\rho^5y^2+\frac{3m^2}{4}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2U'}{\partial y^2}=\frac{3}{4}\mathbf{k}\rho^5x^2+\frac{3m^2}{4}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2U'}{\partial z^2}=\mathbf{k}\rho^5(xy+2z^2)+m^2+\frac{\partial^2F}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2U'}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{4}\mathbf{k}\rho^5(xy+2z^2)+\frac{m^2}{4}+\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial^2U'}{\partial x\,\partial z}=-\frac{3}{2}\mathbf{k}\rho^5yz+\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2U'}{\partial y\,\partial z}=-\frac{3}{2}\mathbf{k}\rho^5xz+\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial z}.$$

Nous voyons alors que x', y', z' vérifient les équations linéaires

suivantes

$$
\begin{aligned}
D^2x' + 2m\,Dx' + x'\Big[\ &\tfrac{1}{2}\mathbf{k}\rho^5(xy+2z^2)+\frac{3m^2}{2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\Big]\\
+y'\Big(\ &\tfrac{3}{2}\mathbf{k}\rho^5 z^2+\frac{3m^2}{2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big)\\
+z'\Big(-&3\mathbf{k}\rho^5 xz+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\Big)+2\,DX'+2m\,X'=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2y' - 2m\,Dy' + x'\Big(\ &\tfrac{3}{2}\mathbf{k}\rho^5 y^2+\frac{3m^2}{2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big)\\
+y'\Big[\ &\tfrac{1}{2}\mathbf{k}\rho^5(xy+2z^2)+\frac{3m^2}{2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\Big]\\
+z'\Big(-&3\mathbf{k}\rho^5 yz+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\Big)+2\,DY'-2m\,Y'=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2z' \qquad + x'\Big(\ &\tfrac{3}{2}\mathbf{k}\rho^5 yz-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\Big)\\
+y'\Big(\ &\tfrac{3}{2}\mathbf{k}\rho^5 xz-\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\Big)\\
+z'\Big(-&\mathbf{k}\rho^5(xy+2z^2)-m^2-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Big)+2\,DZ'=0
\end{aligned}
$$

Les développements des coefficients de ces équations peuvent être facilement obtenus, sans qu'il soit utile d'insister sur ce point, et par suite on aura aisément les développements correspondants des inconnues x', y', z', en appliquant toujours la même méthode d'approximations successives qui nous a servi pour le calcul des coordonnées lunaires Et si l'on demeure au point de vue analytique, nous voyons encore que l'usage de ces équations pourra fournir des vérifications efficaces pour le calcul des coefficients des coordonnées, et l'on en peut dire autant des équations analogues relatives aux autres paramètres ε, γ, l_0, φ_0 ϑ_0 Rappelons seulement que, si f est une fonction de m et α, on a

$$\frac{n-n'}{a}\,\frac{\partial}{\partial n}(af) = -m\frac{\partial f}{\partial m}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1+m}{1+2m+\frac{3}{2}m^2}\Big(f+\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big),$$

en prenant toujours

$$\mathbf{k} = 1+2m+\frac{3}{2}m^2$$

LIVRE V.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE ROTATION DE LA TERRE ET DE LA LUNE AUTOUR DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉ

CHAPITRE XXVI.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE ROTATION DE LA TERRE

157. Soit généralement un corps céleste de centre de gravité O, et de masse M_0, assimilé à un corps solide; soient de plus A, B, C ses moments d'inertie par rapport aux axes principaux $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, relatifs au point O.

D'après le n° 6, la fonction de forces V qui définit l'action d'un autre corps de centre de gravité S et de masse M sur le mouvement du corps O autour de son centre de gravité sera (en supprimant les termes manifestement indépendants des paramètres qui fixent la position du corps O)

$$V = -\frac{3fM}{2r^3}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\gamma^2 + \frac{B-A}{2}(\beta^2-\alpha^2)\right],$$

où l'on désigne par f le coefficient d'attraction, par r la distance OS, par α, β, γ les cosinus des angles que fait OS avec les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Reportons-nous ensuite au n° 15. Soient Ox, Oy, Oz (*fig. a*) des axes rectangulaires de directions fixes, orientés comme $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dans le sens direct, sur la sphère de centre O, soient G l'un des nœuds de $\xi\eta$ sur xy, et ω l'inclinaison correspondante; si $\widehat{xG} = \psi$, $\widehat{G\xi} = \varphi$, les trois angles φ, ψ, ω fixent la position du corps O.

Considérons le vecteur h, moment résultant par rapport à O des quantités de mouvement des différents points du corps, et soit P le plan perpendiculaire à ce vecteur, coupant la sphère suivant un grand cercle P orienté dans le sens direct par rapport au vecteur h.

Fig. a

Soient H l'un des nœuds de P sur xy, ε l'inclinaison correspondante, et $\widehat{xH} = \theta$, soient de même K l'un des nœuds de $\xi\eta$ sur P, σ l'inclinaison correspondante (c'est-à-dire de $\xi\eta$ sur P) et $\widehat{K\xi} = \chi$, soit enfin $\widehat{HK} = u$.

Nous avons vu que l'on pouvait déterminer le mouvement du corps à l'aide des équations canoniques suivantes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial u}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \chi}, \end{aligned} \right.$$

en faisant

$$g = h\cos\varepsilon, \qquad k = h\cos\sigma,$$

$$H = \frac{h^2}{2C}\left[1 + \frac{C-A}{A}\sin^2\sigma\sin^2\chi + \frac{C-B}{B}\sin^2\sigma\cos^2\chi\right] - U,$$

et appelant U, dans cette dernière formule, la somme des différentes fonctions V qui correspondent aux corps S dont l'action sur O n'est pas insensible.

Si l'on désigne par p, q, s les projections de la rotation instantanée

du corps O sur les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, on a en outre

$$Ap = h\sin\sigma\sin\chi, \qquad Bq = h\sin\sigma\cos\chi, \qquad Cs = h\cos\sigma,$$

et ces quantités sont précisément les projections du vecteur h sur les mêmes axes.

Enfin, les angles φ, ψ, ω, qui fixent la position du corps, résultent des formules trigonométriques fournies par le triangle GHK

$$\begin{aligned}
\sin\omega\sin(\varphi-\chi) &= \sin\sigma\sin u,\\
\sin\omega\cos(\varphi-\chi) &= \cos\varepsilon\sin\sigma+\sin\varepsilon\cos\sigma\cos u,\\
\sin\omega\sin(\psi-\theta) &= \sin\sigma\sin u,\\
\sin\omega\cos(\psi-\theta) &= \sin\varepsilon\cos\sigma+\cos\varepsilon\sin\sigma\cos u,\\
\cos\omega &= \cos\varepsilon\cos\sigma-\sin\varepsilon\sin\sigma\cos u.
\end{aligned}$$

Les équations (1) peuvent être transformées de diverses façons, présentant des avantages suivant les différents cas.

1° Conservons h, ε, θ, et faisons

$$v = u+\chi, \qquad \sigma_1 = \sin\sigma\sin\chi, \qquad \sigma_2 = \sin\sigma\cos\chi.$$

On trouve alors

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial v},\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial h}+\frac{\cot\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}-\frac{\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1\frac{\partial H}{\partial\sigma_1}+\sigma_2\frac{\partial H}{\partial\sigma_2}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\operatorname{coséc}\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial\varepsilon},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\operatorname{coséc}\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial\theta}-\frac{\cot\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial v},\\
\frac{d\sigma_1}{dt} &= -\frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial H}{\partial\sigma_2}+\frac{\sigma_1\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\frac{\partial H}{\partial v},\\
\frac{d\sigma_2}{dt} &= \frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial H}{\partial\sigma_1}+\frac{\sigma_2\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\frac{\partial H}{\partial v},
\end{aligned}\right.$$

avec

$$H = \frac{h^2}{2C}(1+\alpha_1\sigma_1^2+\alpha_2\sigma_2^2)-U,$$

$$\alpha_1 = \frac{C-A}{A}, \qquad \alpha_2 = \frac{C-B}{B}.$$

2° Conservons h, et faisons

$$\nu = \theta + u + \chi, \qquad \varepsilon_1 = \sin\varepsilon \sin(u+\chi), \qquad \sigma_1 = \sin\sigma \sin\chi,$$
$$\varepsilon_2 = \sin\varepsilon \cos(u+\chi), \qquad \sigma_2 = \sin\sigma \cos\chi.$$

La fonction H prend la même expression que dans le cas précédent, et l'on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \nu} - \varepsilon_2 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2},\\
\frac{d\nu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial h} - \frac{\cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\left(\varepsilon_1 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2}\right) - \frac{\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1 \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial H}{\partial \sigma_2}\right),\\
\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{\cos^2\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial H}{\partial h} + \frac{\varepsilon_1 \cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\frac{\partial H}{\partial \nu} - \frac{\varepsilon_2 \cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1 \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial H}{\partial \sigma_2}\right),\\
\frac{d\varepsilon_2}{dt} &= -\frac{\cos^2\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_1 \frac{\partial H}{\partial h} + \frac{\varepsilon_2 \cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\frac{\partial H}{\partial \nu} + \frac{\varepsilon_1 \cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1 \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial H}{\partial \sigma_2}\right),\\
\frac{d\sigma_1}{dt} &= -\frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial H}{\partial \sigma_2} + \frac{\sigma_1 \cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\frac{\partial H}{\partial \nu} + \varepsilon_2 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_1 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2}\right),\\
\frac{d\sigma_2}{dt} &= \frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \frac{\sigma_2 \cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\frac{\partial H}{\partial \nu} + \varepsilon_2 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_1 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2}\right)
\end{aligned}\right.$$

3° En conservant les variables h, ν, σ_1, σ_2 du cas précédent et par suite l'expression de H, faisons encore

$$\varepsilon_1 = \sin\varepsilon \sin\theta, \qquad \varepsilon_2 = \sin\varepsilon \cos\theta$$

On a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \nu},\\
\frac{d\nu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial h} - \frac{\cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\left(\varepsilon_1 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2}\right) - \frac{\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1 \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial H}{\partial \sigma_2}\right),\\
\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= -\frac{\cos\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_1 \cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\frac{\partial H}{\partial \nu},\\
\frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{\cos\varepsilon}{h}\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 \cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\frac{\partial H}{\partial \nu},\\
\frac{d\sigma_1}{dt} &= -\frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial H}{\partial \sigma_2} + \frac{\sigma_1 \cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\frac{\partial H}{\partial \nu},\\
\frac{d\sigma_2}{dt} &= \frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \frac{\sigma_2 \cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\frac{\partial H}{\partial \nu}
\end{aligned}\right.$$

158 Le cas du mouvement de la Terre, qui fait l'objet de ce Chapitre, est caractérisé par l'extrême petitesse de l'angle σ, tandis que

l'angle ε reste fini, égal en valeur absolue à $23^{\circ},5$ environ, si du moins le plan fixe Oxy est celui de l'écliptique à une certaine date. Il convient alors de faire usage des équations (2), où nous allons mettre en évidence la fonction de forces U, qui ne dépend manifestement pas de h, de sorte qu'elles deviennent

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \nu},\\
\frac{d\nu}{dt} &= \frac{h}{C} + \frac{h}{C(1+\cos\sigma)}(\alpha_1\sigma_1^2+\alpha_2\sigma_2^2) - \frac{\cot\varepsilon}{h}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + \frac{\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1\frac{\partial U}{\partial\sigma_1}+\sigma_2\frac{\partial U}{\partial\sigma_2}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec}\varepsilon}{h}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec}\varepsilon}{h}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\cot\varepsilon}{h}\frac{\partial U}{\partial \nu},\\
\frac{d\sigma_1}{dt} &= -\frac{h\cos\sigma}{C}\alpha_2\sigma_2 + \frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial U}{\partial\sigma_2} - \frac{\sigma_1\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\frac{\partial U}{\partial\nu},\\
\frac{d\sigma_2}{dt} &= \frac{h\cos\sigma}{C}\alpha_1\sigma_1 - \frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial U}{\partial\sigma_1} - \frac{\sigma_2\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\frac{\partial U}{\partial\nu}.
\end{aligned}
\right.
$$

De plus

$$p = \frac{h}{A}\sigma_1, \qquad q = \frac{h}{B}\sigma_2, \qquad r = \frac{h}{C}\cos\sigma,$$

et, en négligeant le carré de σ,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\omega &= \varepsilon + \sigma\cos u + \dots &&= \varepsilon + \sigma_1\sin\nu + \sigma_2\cos\nu + \dots,\\
\varphi &= u + \chi - \sigma\sin u\cot\varepsilon + \dots &&= \nu + \cot\varepsilon(\sigma_1\cos\nu - \sigma_2\sin\nu) + \dots,\\
\psi &= \theta + \sigma\sin u\operatorname{cos\acute{e}c}\varepsilon + \dots &&= \theta - \operatorname{cosec}\varepsilon(\sigma_1\cos\nu - \sigma_2\sin\nu) + \dots
\end{aligned}
\right.
$$

La fonction U se présente naturellement comme dépendante des angles φ, ψ, ω, les dérivées partielles de U qui figurent dans les équations (5) se calculeront donc par les formules

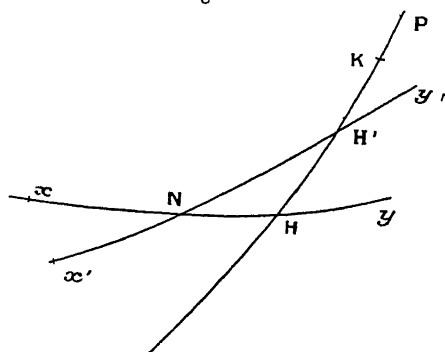
$$
\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial\nu} = \frac{\partial U}{\partial\varphi} + \dots, \qquad \frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{\partial U}{\partial\psi}, \qquad \frac{\partial U}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial U}{\partial\omega} + \dots,\\
\frac{\partial U}{\partial\sigma_1} = \sin\nu\frac{\partial U}{\partial\omega} + \cos\nu\left(\cot\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\varphi} - \operatorname{cosec}\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\psi}\right) + \dots,\\
\frac{\partial U}{\partial\sigma_2} = \cos\nu\frac{\partial U}{\partial\omega} - \sin\nu\left(\cot\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\varphi} - \operatorname{cos\acute{e}c}\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\psi}\right) + \dots,
\end{gathered}
$$

les termes non écrits, indiqués par des points, étant de l'ordre de σ

Il est infiniment plus avantageux, et plus conforme à la nature même de la question, de rapporter directement le mouvement de la Terre au plan de l'écliptique mobile, et non à celui de l'écliptique fixe d'une certaine date. Supposons donc que Oxy soit l'écliptique à l'origine du temps, l'axe Ox étant dirigé vers l'équinoxe moyen correspondant ; l'écliptique $x'y'$ de l'époque t est définie par la longitude ϑ d'un de ses nœuds N sur xy, et par l'inclinaison correspondante ι ; de plus, on peut choisir l'axe Ox' de telle façon que l'arc x'N soit égal à xN ou ϑ (*fig.* b).

Dans ces conditions, si H′ est l'un des nœuds du plan P sur $x'y'$, nous appellerons ε' l'inclinaison correspondante, et nous ferons $x'\mathrm{H}' = \theta'$, $\mathrm{H'K} = u'$, $v' = u' + \chi$; il faut déterminer directement les nouvelles variables v', θ', ε', qui doivent être substituées à v, θ, ε.

Imaginons pour un instant que les quantités ι et ϑ soient constantes,

Fig. b

de sorte que les axes $Ox'y'$ soient fixes. Il est clair alors, puisque l'on fait simplement un changement de coordonnées, que les équations (5) subsistent entièrement, en remplaçant v, θ, ε par v', θ', ε', et supposant la fonction U exprimée à l'aide de ces nouvelles variables (h, σ_1, σ_2 ne sont aucunement modifiées).

Il est facile maintenant de tenir compte de la variabilité de ι et ϑ, il suffit évidemment d'ajouter aux valeurs des dérivées $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$, $\frac{d\varepsilon'}{dt}$, telles que les donnent les nouvelles équations (5), les compléments

qui sont dus a cette variabilite, soit

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial \iota}\frac{d\iota}{dt}+\frac{\partial \varphi'}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt},$$

et les expressions analogues relatives a θ', ε'

Or, le triangle NHH', dont les elements sont

$$\text{NH} = \theta-\vartheta,\qquad \text{NH}'=\theta'-\vartheta,\qquad \text{HH}'=\varphi-\varphi,$$
$$\widehat{\text{H}}'=\varepsilon',\qquad \widehat{\text{H}}=\pi-\varepsilon,\qquad \widehat{\text{N}}=\iota,$$

donne, en y faisant varier φ', θ', ε' avec ι et ϑ,

$$\sin\varepsilon'\,d\varphi' = -\sin(\theta'-\vartheta)\,d\iota+\sin\iota\cos(\theta'-\vartheta)\,d\vartheta,$$
$$\sin\varepsilon'\,d(\theta'-\vartheta)=\cos\varepsilon'\sin(\theta'-\vartheta)\,d\iota-[\sin\varepsilon'\cos\iota+\cos\varepsilon'\sin\iota\cos(\theta'-\vartheta)]\,d\vartheta,$$
$$d\varepsilon'=-\cos(\theta'-\vartheta)\,d\iota-\sin\iota\sin(\theta'-\vartheta)\,d\vartheta$$

Supprimons alors les accents qui affectent φ', θ' ε', c'est-à-dire supposons que les eléments du mouvement φ, θ, ε (et de même u, ω, φ, ψ, qui en résultent) se rapportent reellement a l'écliptique mobile de l'epoque t, $x'y'$ les equations (5) et celles qui les accompagnent subsisteront entierement à la simple condition d'augmenter

la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ de la quantité $\mu\operatorname{cosec}\varepsilon$,

la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ de la quantité $(1-\cos\iota)\frac{d\vartheta}{dt}-\mu\cot\varepsilon$,

la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$ de la quantite $-\lambda$,

en posant

$$\lambda = \cos(\theta-\vartheta)\frac{d\iota}{dt}+\sin\iota\sin(\theta-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt},$$
$$\mu = -\sin(\theta-\vartheta)\frac{d\iota}{dt}+\sin\iota\cos(\theta-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$$

La fonction U se compose ici de deux parties V, V', provenant respectivement de l'action de la Lune S et du Soleil S', d'une façon

générale, nous désignerons par les mêmes lettres les éléments semblables qui correspondent à ces deux astres, en accentuant ceux relatifs au Soleil, et il suffira de raisonner sur V par exemple

Envisageons spécialement la partie de V qui dépend de la différence B — A, et observons que l'on peut échanger A avec B, à la condition d'augmenter en même temps l, v, φ de $\frac{\pi}{2}$ Le coefficient $\frac{fM}{r^3}$ est sensiblement égal à $n^2 \frac{M}{M_0 + M}$, si l'on appelle n le moyen mouvement de S, d'autre part, il est clair que si j désigne la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même, on a sensiblement aussi $h = Cj$ Il résulte de ces observations, de la forme des cosinus α et β sans qu'il soit nécessaire de les calculer explicitement, et de l'inspection des équations (5) et suivantes, que les inégalités des éléments du mouvement $\frac{h}{Cj}$, v, θ, ε, s, φ, ψ, ω, qui sont du premier ordre par rapport à la fonction V et qui contiennent le facteur B — A, sont nécessairement des inégalités périodiques dont la période est très voisine d'un demi-jour sidéral, et dont le coefficient est de l'ordre de grandeur de $\frac{n^2}{j^2} \frac{M}{M + M_0} \frac{B - A}{C}$, il en est de même pour les inégalités analogues de σ_1, σ_2, p, q, avec cette seule différence que leur période est voisine du jour sidéral ou de son tiers Le rapport $\frac{B - A}{C}$ est extrêmement petit, et il en est de même de $\frac{n^2}{j^2} \frac{M}{M + M_0}$, toutes ces inégalités sont donc entièrement insensibles, et comme on peut certainement négliger le carré de $\frac{B - A}{C}$, nous voyons finalement que l'on peut sans aucun inconvénient réduire V à sa première partie

$$-\frac{3fM}{2r^3}\left(C - \frac{A + B}{2}\right)\gamma^2,$$

dans ces conditions, la fonction U est indépendante de φ, et l'on peut ajouter que les inégalités de σ_1, σ_2, p, q, qui sont du premier ordre par rapport à U, sont des inégalités périodiques dont la période est très voisine du jour sidéral

Convenons alors de négliger partout le carré de la très petite quantité σ, ainsi que les quantités de l'ordre de $U\sigma$ la suite justifiera amplement ces conventions Les équations (5) et suivantes se sim-

plifient et deviennent, en remplaçant h par Cr

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = 0,\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{Cr\sin\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial\omega} + (1-\cos i)\frac{d\vartheta}{dt} - \mu\cot\varepsilon,\\
&\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{Cr\sin\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial\psi} - \lambda,\\
&\frac{dv}{dt} = r - \frac{\cot\varepsilon}{Cr}\frac{\partial U}{\partial\omega} + \mu\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon,\\
&\frac{d\sigma_1}{dt} + r\alpha\sigma_2 = \frac{1}{Cr}\left(\cos v\frac{\partial U}{\partial\omega} + \frac{\sin v}{\sin\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial\psi}\right),\\
&\frac{d\sigma_2}{dt} - r\alpha\sigma_1 = \frac{1}{Cr}\left(-\sin v\frac{\partial U}{\partial\omega} + \frac{\cos v}{\sin\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial\psi}\right),\\
&p = \frac{C}{A}r\sigma_1, \qquad q = \frac{C}{B}r\sigma_2, \qquad s = r,\\
&\omega = \varepsilon + \sigma_1\sin v + \sigma_2\cos v,\\
&\psi = \theta - \mathrm{cosec}\,\varepsilon(\sigma_1\cos v - \sigma_2\sin v),\\
&\varphi = v + \cot\varepsilon\,(\sigma_1\cos v - \sigma_2\sin v),
\end{aligned}
\right.
$$

et dans les expressions des dérivées $\frac{\partial U}{\partial\omega}$, $\frac{\partial U}{\partial\psi}$, on pourra remplacer ω et ψ par ε et θ.

La quantité r est donc une constante, et par suite il en est de même de la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même, c'est-à-dire autour de son axe instantané; cette vitesse est en effet précisément égale à r, puisque nous négligeons le carré de σ.

Appelons maintenant a_0 la longueur définie par la relation

$$r(M_0+M) = n^2 a_0^3,$$

ainsi que nous l'avons fait dans la théorie de la Lune au n° **122**, si a est aussi la constante définie au n° **132**, de façon que l'on ait

$$\frac{a}{r} = \rho,$$

la quantité ρ étant celle que nous avons déterminée aux Chapitres XXI et suivants, et si nous faisons

$$k = \frac{3}{2}\frac{n^2}{r^2}\frac{a_0^3}{a^3}\frac{M}{M_0+M}\left(1 - \frac{A+B}{2C}\right),$$

on a

$$V = -Cr^2 k\rho^3\gamma^2$$

Si l'on fait de même

$$f(M' + M_0 + M) = n'^2 a'^3,$$

en appelant M′ et n' la masse et le moyen mouvement du Soleil conformément à notre convention générale, puis

$$\frac{a'}{r'} = \rho',$$

et

$$k' = \frac{3}{2} \frac{n'^2}{j^2} \frac{M'}{M' + M_0 + M} \left(1 - \frac{A + B}{2C}\right),$$

on aura

$$V' = -C j^2 k' \rho'^3 \gamma'^2$$

La fonction U est donc égale à

$$-C j^2 (k \rho^3 \gamma^2 + k' \rho'^3 \gamma'^2)$$

Soient l et b la longitude et la latitude de la Lune, rapportées à l'écliptique mobile $x'y'$ ce sont précisément les coordonnées que nous avons calculées au Livre précédent, ainsi que nous l'avons observé quand nous avons étudié l'influence du mouvement séculaire de l'écliptique On a immédiatement

$$\begin{aligned}\gamma &= \cos b \cos l \sin \psi \sin \omega - \cos b \sin l \cos \psi \sin \omega + \sin b \cos \omega \\ &= \cos \omega \sin b - \sin \omega \cos b \sin (l - \psi),\end{aligned}$$

et par suite, en n'écrivant pas un terme indépendant de ω et ψ,

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \omega [1 - 3 \sin^2 b - \cos^2 b \cos(2l - 2\psi)] - \sin 2\omega \sin b \cos b \sin(l - \psi)$$

Si de même l' est la longitude du Soleil par rapport aux axes $Ox'y'$ la latitude étant entièrement négligeable, on aura plus simplement encore

$$\gamma'^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \omega [1 - \cos(2l' - 2\psi)]$$

Désignons par N, N_1, N_2 les longitudes moyennes de la Lune, de son périgée et de son nœud, ainsi que nous l'avons déjà fait au Livre précédent, par N', N'_1 les longitudes moyennes du Soleil et de son

perigee Toutes ces longitudes sont comptees a partir de Ox', et leurs mouvements sont respectivement n, n_1, n_2, n', n'_1 En negligeant les inegalites secondaires extrêmement petites du mouvement de la Lune, la fonction $\rho^3(1-3\sin^2 b)$ est developpable sous la forme $Q_0 + \Sigma P_0 \cos V_0$, en designant par P_0, Q_0 des constantes, par V_0 des arguments distincts non nuls, de la forme generale $p\,N + p_1 N_1 + p_2 N_2 + p' N' + p'_1 N'_1$, la somme s des entiers p, p_1, p_2, p', p'_1 etant nulle On voit sans peine que si l'argument V_0 est a longue période, le coefficient P_0 correspondant est extrêmement petit

La fonction $\rho^3 \cos^2 b \cos 2l$ est developpable de la même façon sous la forme $\Sigma P_2 \cos V_2$, les arguments V_2 etant semblables aux V_0, mais la somme s etant egale a deux Si l'argument V_2 est a longue periode, le coefficient P_2 est encore petit, toutefois, on pourrait craindre que cette petitesse fut insuffisante a compenser l'effet de l'integration lorsque l'argument V_2 est egal a $2N'_1$, puisque le mouvement de N'_1 est extrêmement lent, mais nous avons deja vu au nº **154** que le coefficient P_2 avait alors pour partie principale $-\frac{9}{32} m\varepsilon'^2\gamma^2$ (d'apres les notations employees dans la theorie de la Lune), et par suite aucun effet sensible n'en peut resulter

Enfin, la fonction $2\rho^3 \sin b \cos b \sin l$ est encore développable sous la forme $\Sigma P_1 \cos V_1$, les arguments V_1 étant tels que la somme s soit egale a un Le seul de ces arguments qui soit à longue période, avec un coefficient sensible, est N_2, nous appellerons spécialement Q_1 son coefficient, lorsque cela sera necessaire

De la même façon, nous poserons

$$\rho'^3 = Q'_0 + \Sigma P'_0 \cos V'_0, \qquad \rho'^3 \cos 2l' = \Sigma P'_2 \cos V'_2,$$

en negligeant les perturbations périodiques du mouvement du Soleil, les arguments V'_0, V'_2 sont ici de la forme $p'N' + p'_1 N'_1$, la somme des entiers p' et p'_1 etant nulle ou egale a deux Les coefficients Q'_0, P'_0, P'_2 dependent uniquement de l'excentricité de l'orbite solaire, et dans Q'_0 on devra tenir compte de la variation séculaire de cette excentricite, pour les P'_0 et P'_2, ce sera inutile Enfin, remarquons que d'après les formules du mouvement keplerien, le coefficient P'_2, qui correspond a $V'_2 = 2N'_1$, est exactement nul

Finalement donc, on a

$$U = -\frac{C\,j^2}{2}\sin^2\omega\,[\lambda Q_0 + \lambda' Q_0 + \lambda\,\Sigma P_0 \cos V_0 + \lambda'\Sigma P'_0 \cos V'_0 - \lambda\,\Sigma P_2 \cos(V_2 - 2\psi) - \lambda'\,\Sigma P'_2 \cos(V'_2 - 2\psi)] + \frac{C\,j^2}{2}\sin 2\omega\,\Sigma\lambda P_1 \cos(V_1 - \psi)$$

Pour le Soleil, on a avec une approximation suffisante, d'après la théorie du mouvement keplérien,

$$Q'_0 + \Sigma P'_0 \cos V'_0 = 1 + \frac{3}{2}e'^2 + 3e' \cos(N' - N'_1),$$

$$\Sigma P'_2 \cos V'_2 = \left(1 - \frac{5}{2}e'^2\right)\cos 2N' - \frac{1}{2}e' \cos(N' + N'_1) + \frac{7}{2}e' \cos(3N' - N'_1),$$

prenons alors pour origine du temps l'époque 1850,0 et pour unité de temps la durée de mille années tropiques, on a

$$e' = 0{,}016772 - 0{,}000417\,t,$$

et par suite, en représentant un nombre par son logarithme décimal placé entre crochets

$$Q'_0 = [0{,}00018] + [\bar{5},322-]\,t,$$

$$\Sigma P'_0 \cos V'_0 = [\bar{2},702]\cos(N' - N'_1),$$

$$\Sigma P'_2 \cos V_2 = [\bar{1},9997]\cos 2N' + [\bar{3},924-]\cos(N' + N'_1) + [\bar{2},769\ \ ]\cos(3N' - N'_1)$$

Pour la Lune, il faut faire de préférence des développements numériques. Partons des données suivantes, qui résultent des calculs exposés au Livre précédent, et des formules définitives de M. Brown

$$\rho = 1 + [\bar{5},38-] + [\bar{2},7364]\cos(N - N_1) + [\bar{2},0011]\cos(N + N_1 - 2N') + [\bar{3},9164]\cos(2N - 2N') + [\bar{3},473]\cos(2N - 2N_1) + [\bar{4},955]\cos(3N - N_1 - 2N') + \ldots,$$

$$l = N + [\bar{1},04044]\sin(N - N_1) + [\bar{2},3470]\sin(N + N_1 - 2N') + [\bar{2},0603]\sin(2N - 2N') + [\bar{3},5715]\sin(2N - 2N_1) + [\bar{3},5110-]\sin(N' - N'_1) + [\bar{3},3001-]\sin(2N - 2N_2) + \ldots,$$

$$b = [\bar{2},95184]\sin(N - N_2) + [\bar{3},6900]\sin(2N - N_1 - N_2) + [\bar{3},6854-]\sin(N_1 - N_2) + [\bar{3},4805]\sin(N + N_2 - 2N') + [\bar{4},985]\sin(2N + N_1 - N_2 - 2N') + [\bar{4},907]\sin(N_1 + N_2 - 2N') + [\bar{4},755]\sin(3N - N_2 - 2N') + \ldots$$

On en déduira, en ne retenant que les termes utiles, c'est-à-dire ceux qui donnent dans l'un au moins des angles θ et ε des inégalités qui dépassent 0",006

$$Q_0 = [\bar{1},99674],$$

$$\Sigma P_0 \cos V_0 = [\bar{1},2107] \cos(N - N_1) + [\bar{2},493] \cos(N + N_1 - 2N') + [\bar{2},430] \cos(2N - 2N'),$$

$$\Sigma P_2 \cos V_2 = [\bar{1},9948] \cos 2N + [\bar{2},446-] \cos(N + N_1) + [\bar{1},277] \cos(3N - N_1) + [\bar{3},608] \cos 2N_2 + [\bar{4},86] \cos 2N',$$

$$\Sigma P_1 \cos V_1 = [\bar{2},9531] \cos N_2 + [\bar{2},948-] \cos(2N - N_2) + [\bar{3},40] \cos(2N' - N_2)$$

159. Nous allons aborder maintenant l'intégration des équations (6), en prenant d'abord celles qui déterminent θ et ε. Remplaçant comme nous l'avons dit ω et ψ par ε et θ dans les dérivées $\frac{\partial U}{\partial \omega}$, $\frac{\partial U}{\partial \psi}$, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = -j \cos\varepsilon [k Q_0 + k' Q'_0 + k \Sigma P_0 \cos V_0 + k' \Sigma P'_0 \cos V'_0 - k \Sigma P_2 \cos(V_2 - 2\theta) - k' \Sigma P'_2 \cos(V'_2 - 2\theta)] + j \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon} \Sigma k P_1 \cos(V_1 - \theta) + (1 - \cos i) \frac{d\vartheta}{dt} - \mu \cot \varepsilon$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -j \sin\varepsilon [k \Sigma P_2 \sin(V_2 - 2\theta) + k' \Sigma P'_2 \sin(V'_2 - 2\theta)] - j \cos\varepsilon \Sigma k P_1 \cos(V_1 - \theta) - \lambda,$$

en se rappelant que

$$\lambda = \cos(\theta - \vartheta) \frac{di}{dt} + \sin i \sin(\theta - \vartheta) \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\mu = -\sin(\theta - \vartheta) \frac{di}{dt} + \sin i \cos(\theta - \vartheta) \frac{d\vartheta}{dt}$$

Laissons de côté dans les équations précédentes tous les termes qui ont un caractère périodique, et faisons

$$j(k Q_0 + k' Q'_0) = S_0 + S_1 t,$$

en mettant en évidence la variation séculaire de Q'_0, due elle-même à la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite solaire. Il reste

$$\frac{d\theta}{dt} = -\cos\varepsilon (S_0 + S_1 t) + (1 - \cos i) \frac{d\vartheta}{dt} - \mu \cot \varepsilon,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\lambda$$

On peut définir le mouvement de l'écliptique par des formules telles que

$$\sin i \sin \Im = p = p^0 t + p' t^2 + p'' t^3 + \dots$$
$$\sin i \cos \Im = q = q^0 t + q' t^2 + q'' t^3 + \dots,$$

il est visible alors que les inconnues θ, ε peuvent être développées elles-mêmes suivant les puissances du temps t. L'angle θ n'aura d'ailleurs pas de partie constante, puisque l'axe Ox est dirigé vers l'équinoxe moyen de l'origine du temps, et le terme constant du développement de ε sera égal, comme nous le verrons plus loin, à l'obliquité moyenne de l'écliptique à l'origine du temps, changée de signe, soit à $-\varepsilon_0$, en faisant

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 31'',68,$$

d'après S. Newcomb, à qui nous empruntons les diverses données numériques fournies par l'observation. Elles sont, outre ε_0,

$$p = 53'',41\, t + 19'',35\, t^2 - 0'',19\, t^3,$$
$$q = -468'',37\, t + 5'',63\, t^2 + 0'',35\, t^3,$$
$$S_0 = 54906'',6,$$

et il en résulte, comme la suite le montrera,

$$S_1 = -0'',366$$

Faisons donc

$$-\theta = h t + h' t^2 + h'' t^3,$$
$$\lambda = \lambda^0 + \lambda' t + \lambda'' t^2,$$
$$\mu = \mu^0 + \mu' t + \mu'' t^2,$$

en écrivant

$$\lambda = \cos\theta \left[\frac{dq}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\Im\frac{di}{dt}\right] + \sin\theta\left[\frac{dp}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\Im\frac{di}{dt}\right],$$
$$\mu = -\sin\theta \left[\frac{dq}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\Im\frac{di}{dt}\right] + \cos\theta\left[\frac{dp}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\Im\frac{di}{dt}\right],$$

on a d'abord immédiatement les relations

$$\lambda^0 = q^0,$$
$$\lambda' = 2q' - p^0 h,$$
$$\lambda'' = 3q'' - (p^0 h' + 2p' h) - \frac{1}{2} q^0 (h^2 - p^0 p^0 - q^0 q^0),$$
$$\mu^0 = p^0,$$
$$\mu' = 2p' + q^0 h,$$
$$\mu'' = 3p'' + (q^0 h' + 2q' h) - \frac{1}{2} p^0 (h^2 - p^0 p^0 - q^0 q^0)$$

Il vient ensuite, d'une façon evidente,

$$-\varepsilon = \varepsilon^0 + \lambda^0 t + \frac{1}{2}\lambda' t^2 + \frac{1}{2}\lambda'' t^3,$$

en même temps que

$$h = S_0 \cos\varepsilon_0 - \mu^0 \cot\varepsilon_0,$$

$$2h' = S_1 \cos\varepsilon_0 - \lambda^0 S_0 \sin\varepsilon_0 - \mu' \cot\varepsilon_0 + \frac{\lambda^0 \mu^0}{\sin^2\varepsilon_0},$$

$$3h'' = -\frac{1}{2}\lambda^0\lambda^0 S_0 \cos\varepsilon_0 - \left(\lambda^0 S_1 + \frac{1}{2}\lambda' S_0\right)\sin\varepsilon_0 - \mu'' \cot\varepsilon_0$$

$$+ \left(\lambda^0 \mu' + \frac{1}{2}\mu^0\lambda'\right)\frac{1}{\sin^2\varepsilon_0} - \lambda^0\lambda^0\mu^0 \frac{\cot\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}(p^0 q' - q^0 p')$$

Effectuant les calculs d'après les données indiquées, il vient donc

$$\lambda = -468'',37 - 1'',75\, t + 5'',49\, t^2,$$

$$\mu = 53'',41 - 75'',39\, t + 0'',34\, t^2,$$

$$-\varepsilon = 23^\circ 27' 31'',68 - 468'',37\, t - 0'',88\, t^2 + 1'',83\, t^3,$$

$$-\theta = 50245'',30\, t + 111'',13\, t^2 + 0'',10\, t^3$$

Il est facile maintenant d'achever l'intégration des équations qui déterminent θ et ε. Comptons les longitudes $N, N_1, N_2, \ldots$ toujours dans l'écliptique mobile, mais à partir du point x'', tel que l'arc $x'x''$ soit égal à la valeur de θ que nous venons d'obtenir, et par suite à partir de l'équinoxe moyen de la date t, ainsi que nous le verrons dans un instant. Ceci revient à remplacer $N, N_1, N_2, \ldots$ par $N+\theta,\ N_1+\theta,\ N_2+\theta, \ldots$, mais nous conserverons les lettres $n, n_1, n_2, \ldots$ pour désigner les mouvements des nouvelles longitudes, et nous appellerons aussi généralement $m_0, m_1, m_2, m'_0, m'_2$ les mouvements des arguments $V_0, V_1, V_2, V'_0, V'_2$. On aura alors, en se bornant à une première approximation plus que suffisante, les expressions suivantes pour compléter les valeurs déjà obtenues pour $-\theta$ et $-\varepsilon$

$$-\Delta\theta = \cos\varepsilon_0 \sum \left(\frac{jk}{m_0} P_0 \sin V_0 + \frac{jk'}{m'_0} P'_0 \sin V'_0 - \frac{jk}{m_2} P_2 \sin V_2 - \frac{jk'}{m'_2} P'_2 \sin V'_2\right)$$

$$+ \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} \sum \frac{jk}{m_1} P_1 \sin V_1,$$

$$-\Delta\varepsilon = \sin\varepsilon_0 \sum \left(\frac{jk}{m_2} P_2 \cos V_2 + \frac{jk'}{m'_2} P'_2 \cos V'_2\right) - \cos\varepsilon_0 \sum \frac{jk}{m_1} P_1 \cos V_1$$

Toutefois, quand il s'agit de l'argument $V_1 = N_2$, pour lequel le coefficient P_1 a la valeur spéciale Q_1, on devra tenir compte, pour plus de précision, de la variation séculaire de l'angle ε, ceci revient, comme on le voit sans peine, en négligeant des termes insensibles, à augmenter $-\Delta\theta$ de

$$-q^0 t\left(2 + \frac{1}{\sin^2 \varepsilon_0}\right) \cos \varepsilon_0 \frac{fk}{n_2} Q_1 \sin N_2,$$

et $-\Delta\varepsilon$ de

$$q^0 t \sin \varepsilon_0 \frac{fk}{n_2} Q_1 \cos N_2.$$

On a, avec les unités choisies,

$$f = [6,36195], \qquad n = [4,92422], \qquad n_1 = [2,8514],$$
$$n_2 = [2,52836 -], \qquad n' = [3,79817],$$

et l'observation donne 9",210 pour le coefficient $-\frac{fk}{n_2} Q_1 \cos \varepsilon_0$ de $\cos N_2$ dans $-\Delta\varepsilon$. Il en résulte, en secondes d'arc,

$$fk = [4,5770],$$

et par suite, d'après la valeur de S_0,

$$fk' = [1,2412],$$

d'où la valeur indiquée plus haut pour S_1.

Finalement donc, on obtiendra, à quelques divergences insignifiantes près dans le dernier chiffre, les valeurs généralement adoptées d'après Newcomb

$$
\begin{aligned}
-\Delta\theta = & + 0'',068 \sin(N - N_1) + 0'',015 \sin(N + N_1 - 2N') + 0'',006 \sin(2N - 2N_1) \\
& + 0'',128 \sin(N' - N'_1) - 0'',204 \sin 2N + 0'',011 \sin(N + N_1) \\
& - 0'',026 \sin(3N - N_1) + 0'',209 \sin 2N_2 - 1'',272 \sin 2N' \\
& + 0'',021 \sin(N' + N'_1) - 0'',050 \sin(3N' - N'_1) \\
& - (17'',235 + 0'',174\, t) \sin N_2 - 0'',034 \sin(2N - N_2) \\
& + 0'',012 \sin(2N' - N_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\Delta\varepsilon = & + 0'',089 \cos 2N - 0'',005 \cos(N + N_1) + 0'',011 \cos(3N - N_1) \\
& - 0'',090 \cos 2N_2 + 0'',551 \cos 2N' - 0'',009 \cos(N' + N'_1) \\
& + 0'',022 \cos(3N' - N'_1) + (9'',210 + 0'',009\, t) \cos N_2 \\
& + 0'',018 \cos(2N - N_2) - 0'',007 \cos(2N' - N_2).
\end{aligned}
$$

Observons encore que des valeurs trouvées ci-dessus pour jk et jk', et en supposant

$$\frac{M'}{M_0+M} = 330000, \qquad \frac{a_0}{a} = \frac{3422'',782}{3419'',596},$$

on tire immédiatement

$$1 - \frac{A+B}{2C} = [\bar{3},5164] = \frac{1}{304,5}, \qquad \frac{M}{M_0+M} = [\bar{2},0823] = \frac{1}{82,74},$$

mais il suffira de changer légèrement les données du calcul pour altérer ces résultats d'une façon assez sensible.

Il nous reste à intégrer les équations (6) qui donnent ψ, σ_1, σ_2.

Considérons d'abord celle dont dépend ψ : on voit immédiatement que la partie périodique de ψ sera précisément égale à $-\Delta\theta\cos\varepsilon_0$; laissons-la de côté un instant, en même temps que les parties périodiques de θ et ε, et posons alors

$$\nu = \frac{d\theta}{dt} - (1-\cos\varepsilon)\frac{d\vartheta}{dt} = \nu^0 + \nu' t + \nu'' t^2,$$

$$m = \mu\sin\varepsilon - \nu\cos\varepsilon = m^0 + m' t + m'' t^2,$$

il viendra

$$\frac{d\psi}{dt} = j + m,$$

et par suite, la valeur complète de ψ sera, en désignant par ψ_0 une constante arbitraire,

$$\psi = \psi_0 + (j+m^0)t + \frac{m'}{2}t^2 - \Delta\theta\cos\varepsilon_0,$$

sans qu'il soit utile d'aller plus loin.

Une grande précision n'est pas nécessaire ici dans le calcul de m, en raison de la grandeur de j par rapport à m^0, mais cette quantité nous sera utile plus loin, en même temps que λ, μ, ν, et aussi

$$n = \mu\cos\varepsilon + \nu\sin\varepsilon = -\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(S_0 + S_1 t) = n^0 + n' t + n'' t^2,$$

aussi allons-nous donner dès maintenant les valeurs exactes de ν, m, n.

On a

$$\nu = \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}(p^0 q' - q^0 p')\,t^2,$$

$$m = -M\cos\varepsilon_0 - N\sin\varepsilon_0, \qquad n = -M\sin\varepsilon_0 + N\cos\varepsilon_0,$$

avec

$$M = \nu^0 + (\nu' + \lambda^0\mu^0)\,t + \left(\nu'' + \lambda^0\mu' + \frac{1}{2}\lambda'\mu^0 - \frac{1}{2}\lambda^0\lambda^0\nu^0\right)t^2,$$

$$N = \mu^0 + (\mu' - \lambda^0\nu^0)\,t + \left(\mu'' - \lambda^0\nu' - \frac{1}{2}\lambda'\nu^0 - \frac{1}{2}\lambda^0\lambda^0\mu^0\right)t^2,$$

ou bien encore

$$n = \frac{1}{2}S_0 \sin 2\varepsilon_0 + \left(\frac{1}{2}S_1 \sin 2\varepsilon_0 + \lambda^0 S_0 \cos 2\varepsilon_0\right)t$$
$$+ \left[\left(\lambda^0 S_1 + \frac{1}{2}\lambda' S_0\right)\cos 2\varepsilon_0 - \lambda^0\lambda^0 S_0 \sin 2\varepsilon_0\right],$$

numériquement

$$\nu = -50245'',30 - 222'',27\,t - 0'',26\,t^2,$$
$$m = 46071'',09 + 279'',14\,t + 0'',12\,t^2,$$
$$n = 20051'',12 - 85'',29\,t - 0'',37\,t^2$$

Comme nous le dirons plus bas, on peut regarder l'angle φ comme étant le temps sidéral, c'est-à-dire l'angle horaire de l'équinoxe vrai, pour le point de la Terre dont la verticale est parallèle à $O\xi$, le temps sidéral ne varie donc pas exactement d'une façon proportionnelle à la durée, mais est affecté d'une très petite accélération séculaire, et de petites inégalités périodiques Le jour sidéral, égal à $\frac{2\pi}{\omega + m^0}$ (pour l'époque origine) est un peu plus court que le temps $\frac{2\pi}{\omega}$ de la révolution de la Terre sur elle-même, de $0^s,008$ environ

Les équations qui déterminent σ_1 et σ_2 peuvent être regardées comme des équations linéaires, non homogènes La solution des équations sans seconds membres est de la forme

$$\sigma_1 = \sigma'_0 \sqrt{\alpha_2}\,\sin(\gamma_0 - \omega\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,t),$$
$$\sigma_2 = \sigma'_0 \sqrt{\alpha_1}\,\cos(\gamma_0 - \omega\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,t),$$

σ'_0, γ_0 désignant deux constantes arbitraires

Mais les coefficients α_1, α_2 peuvent être pris égaux entre eux, et leur valeur commune α_0 ou $\frac{C-A}{A}$ est alors égale à $\frac{1}{303,5}$ d'après ce qui précède, remplaçant aussi σ'_0 par $\frac{\sigma_0}{\sqrt{\alpha_0}}$, on a donc plus simplement

$$\sigma_1 = \sigma_0 \sin(\gamma_0 - \omega\alpha_0 t), \qquad \sigma_2 = \sigma_0 \cos(\gamma_0 - \omega\alpha_0 t),$$

et cette solution a pour période (dite *eulérienne*) 303,5 jours sidé-

raux, quant à la constante σ_0, elle est certainement très petite, notablement inférieure à $0'',5$ en valeur absolue.

Pour compléter cette solution, il suffit, en tenant compte de la petitesse de σ_0, ainsi que de la rapidité du mouvement de l'angle jt, de prendre les expressions approchées

$$\Delta\sigma_1 = \frac{1}{Cj^2}\left(\sin\rho\,\frac{\partial U}{\partial\omega} - \frac{\cos\rho}{\sin\varepsilon}\,\frac{\partial U}{\partial\psi}\right),$$

$$\Delta\sigma_2 = \frac{1}{Cj^2}\left(\cos\rho\,\frac{\partial U}{\partial\omega} + \frac{\sin\rho}{\sin\varepsilon}\,\frac{\partial U}{\partial\psi}\right),$$

en réduisant U à sa partie principale

$$\frac{Cj^2}{2}\sin^2\omega\left(-\frac{S_0}{j} + k\cos(2N - 2\psi) + k'\cos(2N' - 2\psi)\right),$$

il vient ainsi

$$\left.\begin{matrix}\Delta\sigma_1\\ \Delta\sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{S_0}{j}\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0 \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\rho - k\sin\varepsilon_0\cos^2\frac{\varepsilon_0}{2}\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\rho - 2N)$$

$$- k'\sin\varepsilon_0\cos^2\frac{\varepsilon_0}{2}\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\rho - 2N')$$

$$+ k\sin\varepsilon_0\sin^2\frac{\varepsilon_0}{2}\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\rho + 2N)$$

$$+ k'\sin\varepsilon_0\sin^2\frac{\varepsilon_0}{2}\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\rho + 2N'),$$

par suite finalement

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \sigma_0\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\chi_0 - j\alpha_0 t) + 0'',0087\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\rho - 0'',006\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\rho - 2N)$$

$$- 0'',003\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\rho - 2N')$$

On a ensuite

$$p = (1 + \alpha_0)\,j\sigma_1, \qquad q = (1 + \alpha_0)\,j\sigma_2,$$

et par les dernières des équations (6)

$$\omega = \varepsilon + \sigma_0\cos(\rho + j\alpha_0 t - \chi) + 0'',009 - 0'',006\cos 2N - 0'',003\cos 2N',$$

$$\psi = \theta - \operatorname{cosec}\varepsilon_0\,[\sigma_0\sin(\rho + j\alpha_0 t - \chi) - 0'',006\sin 2N - 0'',003\sin 2N'],$$

$$\varphi = \rho + \cot\varepsilon_0\,[\sigma_0\sin(\rho + j\alpha_0 t - \chi) - 0'',006\sin 2N - 0'',003\sin 2N']$$

Pour compléter cet ensemble de formules, il convient encore de chercher à fixer la position du plan de l'équateur terrestre, c'est-

à-dire du plan passant par O, perpendiculaire à l'axe instantané de rotation : c'est en effet à ce plan que se rapportent les observations.

En appelant P' ce plan, déterminons-le comme nous avons déterminé le plan P perpendiculaire au vecteur h, en employant toutes les mêmes lettres accentuées θ', ε', ρ', σ'_1, σ'_2. Les angles ω, φ, ψ s'exprimeront à l'aide de ces nouvelles quantités comme à l'aide des anciennes, de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
\varepsilon' + \sigma'_1 \sin\rho' + \sigma'_2 \cos\rho' &= \varepsilon + \sigma_1 \sin\rho + \sigma_2 \cos\rho,\\
\theta' - \operatorname{cosec}\varepsilon'(\sigma'_1\cos\rho' - \sigma'_2\sin\rho') &= \theta - \operatorname{cosec}\varepsilon(\sigma_1\cos\rho - \sigma_2\sin\rho),\\
\rho' + \cot\varepsilon'(\sigma'_1\cos\rho' - \sigma'_2\sin\rho') &= \rho + \cot\varepsilon(\sigma_1\cos\rho - \sigma_2\sin\rho).
\end{aligned}$$

Mais, la rotation de la Terre étant représentée par le vecteur r normal au plan P', on a ici

$$p = r\sigma'_1, \qquad q = r\sigma'_2,$$

et par suite

$$\sigma'_1 = \frac{C}{A}\sigma_1, \qquad \sigma'_2 = \frac{C}{B}\sigma_2;$$

remplaçant $\frac{C}{A}$, $\frac{C}{B}$ par $1 + \alpha_0$, il vient

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &= \varepsilon - \alpha_0(\omega - \varepsilon),\\
\theta' &= \theta - \alpha_0(\psi - \theta),\\
\rho' &= \rho - \alpha_0(\varphi - \rho),
\end{aligned}$$

donc, en raison de la petitesse de α_0 et de celle des différences $\omega - \varepsilon$, $\psi - \theta$, $\varphi - \rho$, écrites explicitement ci-dessus, on voit que l'on peut confondre absolument les angles ε', θ', ρ' avec ε, θ, ρ, et ceci justifie le choix que nous avons fait de la constante ε_0.

Le problème du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité est ainsi complètement résolu, du moins si l'on se borne au point de vue analytique, le seul qui retienne ici notre attention. Si l'on voulait aller au delà, il serait nécessaire d'examiner dans quelle mesure les observations, en particulier celles de la variation des latitudes, justifient l'hypothèse fondamentale que nous avons faite en assimilant la Terre à un corps solide.

Contentons-nous de l'observation suivante à ce sujet. Supposons qu'à un instant donné la verticale d'un lieu terrestre ait pour cosinus directeurs, par rapport aux axes $O\xi\eta\zeta$, les quantités

$$\cos\beta\cos\alpha, \quad \cos\beta\sin\alpha, \quad \sin\beta$$

L'axe instantané de rotation de la Terre a lui-même pour cosinus directeurs $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$, 1, en négligeant toujours σ^2.

La latitude λ du lieu considéré, c'est-à-dire l'angle de la verticale avec l'équateur, est donc déterminée par l'équation

$$\sin\lambda = \sin\beta + \cos\beta\left(\frac{p}{r}\cos\alpha + \frac{q}{r}\sin\alpha\right),$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda = \beta + \frac{p}{r}\cos\alpha + \frac{q}{r}\sin\alpha,$$

si du moins le point considéré n'est pas dans le voisinage de l'un des pôles.

Le méridien du lieu est parallèle à la verticale et à l'axe de rotation, les cosinus directeurs de la normale à ce méridien, menée dans le sens direct, sont donc proportionnels à

$$\cos\beta\sin\alpha - \frac{q}{r}\sin\beta, \qquad -\cos\beta\cos\alpha + \frac{p}{r}\sin\beta, \qquad \cos\beta\left(\frac{q}{r}\cos\alpha - \frac{p}{r}\sin\alpha\right),$$

et par suite égaux à

$$\sin\left[\alpha + \operatorname{tang}\beta\left(\frac{p}{r}\sin\alpha - \frac{q}{r}\cos\alpha\right)\right],$$
$$-\cos\left[\alpha + \operatorname{tang}\beta\left(\frac{p}{r}\sin\alpha - \frac{q}{r}\cos\alpha\right)\right],$$
$$\frac{q}{r}\cos\alpha - \frac{p}{r}\sin\alpha,$$

ainsi que le montre un calcul simple.

Si nous envisageons alors un second lieu pour lequel la verticale sera définie au même instant par les angles α', β', la différence des longitudes pour ces deux lieux, c'est-à-dire l'angle de leurs méridiens, sera

$$\alpha' - \alpha + \operatorname{tang}\beta'\left(\frac{p}{r}\sin\alpha' - \frac{q}{r}\cos\alpha'\right) - \operatorname{tang}\beta\left(\frac{p}{r}\sin\alpha - \frac{q}{r}\cos\alpha\right).$$

Ces diverses réflexions justifient encore ce que nous avons dit précédemment au sujet de la signification de l'angle σ.

160. La théorie que nous venons de développer et les données sur lesquelles elle s'appuie nous font connaître la position de l'éclip-

tique de l'epoque t par rapport a l'ecliptique de l'origine du temps (1850,0), et celle de l'equateur de l'epoque t par rapport a l'ecliptique de la même epoque En raison des besoins astronomiques, il est encore necessaire de connaître les positions de l'ecliptique et de l'equateur de l'epoque t par rapport a l'ecliptique et l'equateur d'une autre epoque quelconque t_1 Tel est le probleme que nous devons encore resoudre

Resumons d'abord les resultats acquis en changeant legerement les notations, pour les rendre plus conformes aux usages

Soient E_0, γ_0 l'ecliptique et l'equinoxe moyen de l'origine du temps, E, γ, A l'ecliptique, l'equinoxe et l'equateur de l'epoque t,

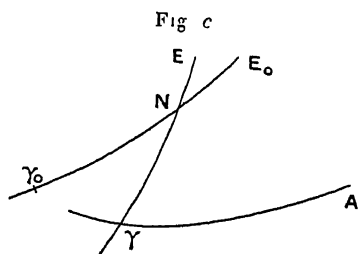



Fig c

l'équinoxe (de printemps) etant par definition le nœud ascendant de l'ecliptique sur l'equateur (*fig* c)

N etant l'un des nœuds de E sur E_0, nous avons fait $\gamma_0 N = \vartheta$, et l'inclinaison correspondante est ι, ces quantites sont definies par les valeurs de

$$p = \sin \iota \sin \vartheta, \qquad q = \sin \iota \cos \vartheta$$

L'arc γN, que nous nommerons maintenant ω, est egal à ce que nous avons appele ci-dessus $\vartheta - \theta$, et par suite, on a

$$\omega - \vartheta = -\theta = ht + h't^2 + h''t^3 + P,$$

en remplaçant $-\Delta\theta$ par P

L'obliquite de l'ecliptique, que nous nommerons ε, est egale a ce que nous avons appele $-\varepsilon$, et par suite,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \lambda^0 t + \frac{1}{2}\lambda' t^2 + \frac{1}{3}\lambda'' t^3 + Q$$

en remplaçant $-\Delta\varepsilon$ par Q

Quand on fait abstraction de la *nutation*, c'est-a-dire des termes

périodiques P et Q, l'équateur et l'équinoxe deviennent *moyens* au lieu de *vrais*, et il en est de même de l'obliquité. P est la nutation en longitude, Q la nutation en obliquité.

Laissant de côté dans ce qui suit la nutation, nous nous occuperons uniquement des mouvements de l'équateur et de l'équinoxe moyens, c'est-à-dire des mouvements de *précession*.

Considérons le mouvement de l'écliptique ; pour le définir, envisageons le trièdre $O\gamma y z$, trirectangle, orienté dans le sens direct, z étant le pôle de E ; il suffit de connaître la rotation instantanée de ce trièdre. Or cette rotation est la résultante des trois rotations $\frac{d\mathfrak{I}}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, $-\frac{d\omega}{dt}$, portées respectivement par les axes Oz_0, ON, Oz, en appelant z_0 le pôle de E_0.

Les projections de la rotation cherchée sur $O\gamma$, Oy, Oz sont donc respectivement

$$\cos\omega \frac{di}{dt} - \sin\omega \sin i \frac{d\mathfrak{I}}{dt},$$

$$\sin\omega \frac{di}{dt} + \cos\omega \sin i \frac{d\mathfrak{I}}{dt},$$

$$-\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\mathfrak{I}}{dt},$$

c'est-à-dire précisément les quantités désignées ci-dessus par λ, μ, ν.

De la même façon, pour définir le mouvement de l'équateur, il suffit de connaître la rotation instantanée du trièdre $O\gamma YZ$, trirectangle, orienté dans le sens direct, Z étant le pôle de A. Or on passe de $O\gamma y z$ à $O\gamma YZ$ en faisant tourner le premier de ces trièdres de l'angle $-\varepsilon$ autour de γ ; par suite les projections de la rotation de $O\gamma YZ$ sur les axes $O\gamma$, OY, OZ sont respectivement

$$\lambda - \frac{d\varepsilon}{dt},$$

$$\mu \cos\varepsilon - \nu \sin\varepsilon,$$

$$\mu \sin\varepsilon + \nu \cos\varepsilon,$$

c'est-à-dire o, n, $-m$, d'après les notations déjà employées.

Ces données suffisent pour résoudre à l'aide de développements en série le problème de la variation des coordonnées d'un point fixe S de la sphère céleste, que l'on rapporte par sa longitude l et sa latitude b à l'écliptique et à l'équinoxe moyen mobiles, ou bien par son ascension

droite α et sa déclinaison δ à l'équateur et à l'équinoxe moyens mobiles Si en effet x, y, z, ou bien X, Y, Z, sont les coordonnées rectangulaires du point S par rapport aux axes $O\gamma yz$ ou bien $O\gamma YZ$, on a, en écrivant que la vitesse absolue de ce point est nulle,

$$\frac{dx}{dt} + \mu z - \nu y = 0, \qquad \frac{dX}{dt} + nZ + mY = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + \nu x - \lambda z = 0, \qquad \frac{dY}{dt} - mX \qquad = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} + \lambda y - \mu x = 0, \qquad \frac{dZ}{dt} - nX \qquad = 0,$$

et l'on tire immédiatement de ces formules

$$\frac{dl}{dt} = -\nu + \operatorname{tang} b\,(\lambda \cos l + \mu \sin l), \qquad \frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tang} \delta \sin \alpha,$$

$$\frac{db}{dt} = \mu \cos l - \lambda \sin l, \qquad \frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha$$

Dérivant ensuite ces expressions par rapport au temps, on aura les coefficients des développements en série cherchés

Les coefficients $-\nu$, m, n, rapportés à l'année, sont les précessions annuelles en longitude, ascension droite et déclinaison

Si l'on fait

$$\lambda = s \cos \theta, \qquad \mu = s \sin \theta,$$

on a plus simplement

$$\frac{dl}{dt} = -\nu + s \operatorname{tang} b \cos(l - \theta),$$

$$\frac{db}{dt} = -s \sin(l - \theta),$$

et si l'on conserve le même mode de notation,

$$s^0 \cos \theta^0 = \lambda^0, \qquad s' = \lambda' \cos \theta^0 + \mu' \sin \theta^0,$$

$$s^0 \sin \theta^0 = \mu^0, \qquad s^0 \theta' = -\lambda' \sin \theta^0 + \mu' \cos \theta^0,$$

$$s'' = \lambda'' \cos \theta^0 + \mu'' \sin \theta^0 + \frac{1}{2} s^0 \theta'^2,$$

$$s^0 \theta'' = -\lambda'' \sin \theta^0 + \mu'' \cos \theta^0 - s'\theta',$$

c'est-à-dire

$$s = 471'',41 \quad - 6'',80 \; t + 0'',57 \; t^2,$$

$$\theta = 173^\circ 29' 40'' + 32863 \quad + 56'' \; t^2$$

Mais, si l'on doit eviter les developpements en series, il faut determiner, comme nous l'avons dit, la position relative des deux ecliptiques ou bien des deux equateurs moyens des deux epoques t et t_1 quelconques

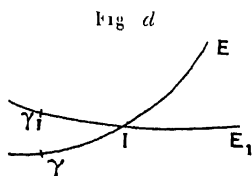



Fig *d*

Marquant de l'indice 1 tous les elements qui se rapportent a l'epoque t_1, sans qu'il soit necessaire de les specifier, soit I l'un des nœuds de E sur E_1, et en appelant j l'inclinaison correspondante, faisons $\gamma I = \sigma$, $\gamma_1 I = \sigma_1$ (*fig d*) Le mouvement du triedre $O\gamma yz$ resulte des trois rotations $\frac{d\sigma_1}{dt}$, $\frac{dj}{dt}$, $-\frac{d\sigma}{dt}$ autour des trois axes Oz_1, OI, Oz, et par suite on a

$$\lambda = \cos\sigma\frac{dj}{dt} - \sin\sigma\sin j\frac{d\sigma_1}{dt},$$

$$\mu = \sin\sigma\frac{dj}{dt} + \cos\sigma\sin j\frac{d\sigma_1}{dt},$$

$$\nu = -\frac{d\sigma}{dt} + \cos j\frac{d\sigma_1}{dt},$$

c'est-a-dire

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\nu + \cos j\frac{d\sigma_1}{dt},$$

$$\frac{dj}{dt} = \lambda\cos\sigma + \mu\sin\sigma = s\cos(\sigma - \theta),$$

$$\sin j\frac{d\sigma_1}{dt} = -\lambda\sin\sigma + \mu\cos\sigma = -s\sin(\sigma - \theta)$$

Ces trois equations differentielles sont propres à determiner les trois inconnues σ, σ_1, j, en observant que pour $t = t_1$, on a $j = 0$, et par suite $\sigma = \sigma_1 = \theta_1$, et appelant, comme nous en avons convenu, θ_1 ce que devient θ pour $t = t_1$ De plus on voit que pour $t = t_1$, on a encore

$$\left(\frac{dj}{dt}\right)_1 = s_1, \qquad \left(\frac{d(\sigma - \sigma_1)}{dt}\right)_1 = -\nu_1,$$

et si l'on remarque alors que les quantités $\frac{j}{t - t_1}$, $\frac{\sigma - \sigma_1}{t - t_1}$ sont, ainsi

que $\sigma + \sigma_1$, nécessairement symétriques par rapport à t et t_1, on pourra clairement écrire les développements qui suivent, en continuant à ne pas dépasser le troisième degré par rapport à t et t_1

$$j = \quad s^0(t - t_1) + \frac{s'}{2}(t^2 - t_1^2) + s'' t t_1 (t - t_1) + \alpha (t - t_1)^3,$$

$$\sigma - \sigma_1 = - \nu^0 (t - t_1) - \frac{\nu'}{2}(t^2 - t_1^2) - \nu'' t t_1 (t - t_1) + \beta (t - t_1)^3,$$

$$\sigma + \sigma_1 = \quad 2\theta^0 + \theta'(t + t_1) + 2\theta'' t t_1 + \gamma (t - t_1)^2,$$

α, β, γ étant trois coefficients à déterminer (le développement de $\sigma + \sigma_1$ ne peut être porté plus loin, comme on le voit immédiatement d'après les données acquises)

L'identification donne sans peine

$$\alpha = \quad \frac{s''}{3} - \frac{1}{24} s^0 (\nu^0 + \theta')^2 = 0'',05,$$

$$\beta = - \frac{\nu''}{3} - \frac{1}{12} s^0 s^0 (\nu^0 + \theta') = 0'',10,$$

$$\gamma = \quad \frac{4\theta'' - \nu'}{6} + \frac{s'(\nu^0 + \theta')}{6 s^0} = 117'',$$

par suite, finalement

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = {} & 173^\circ 29' 40'' + 32862'' t_1 + 56'' t_1^2 \\
& + (- 8691'' - 55'' t_1)(t - t_1) + 3''(t - t_1)^2, \\
\sigma - \sigma_1 = {} & (50245'',30 + 222'',27\, t_1 + 0'',26\, t_1^2)(t - t_1) \\
& + (111'',13 + 0'',26\, t_1)(t - t_1)^2 + 0'',10\,(t - t_1)^3, \\
j = {} & (471'',41 - 6'',80\, t_1 + 0'',57\, t_1^2)(t - t_1) \\
& + (- 3'',40 + 0'',57\, t_1)(t - t_1)^2 \\
& + 0'',05\,(t - t_1)^3
\end{aligned}$$

L'angle $\sigma - \sigma_1$ est la *précession générale* entre les époques t_1 et t

Définissons maintenant de la même façon la position relative des équateurs moyens A et A_1 des deux époques t et t_1, en employant les mêmes lettres Σ, Σ_1, J, au lieu de σ, σ_1, j. On aura cette fois les équations

$$\frac{d\Sigma}{dt} = m + \cos J \frac{d\Sigma_1}{dt},$$

$$\frac{dJ}{dt} = n \sin \Sigma,$$

$$\sin J \frac{d\Sigma_1}{dt} = n \cos \Sigma,$$

et l'on pourra poser

$$J = n^0(t - t_1) + \frac{n'}{2}(t^2 - t_1^2) + n'' t t_1(t - t_1) + \alpha(t - t_1)^3,$$

$$\Sigma - \Sigma_1 = m^0(t - t_1) + \frac{m'}{2}(t^2 - t_1^2) + m'' t t_1(t - t_1) + \beta(t - t_1)^3,$$

$$\Sigma + \Sigma_1 = 180^\circ + \gamma(t - t_1)^2 + \delta(t - t_1)(t^2 - t_1^2),$$

avec

$$\alpha = \frac{n''}{3} - \frac{m^0 m^0 n^0}{24} = -41'',80,$$

$$\beta = \frac{m''}{3} + \frac{m^0 n^0 n^0}{12} = 36'',32,$$

$$\gamma = \frac{n^0 m' - m^0 n'}{6n^0} = 79'',24,$$

$$\delta = \frac{n^0 m'' - m^0 n''}{6n^0} - \frac{n'\gamma}{2n^0} = 0'',33,$$

de sorte que finalement

$$\Sigma + \Sigma_1 = 180^\circ + (79'',24 + 0'',66\, t_1)(t - t_1)^2 + 0'',33\,(t - t_1)^3,$$

$$\begin{aligned}\Sigma - \Sigma_1 = {} & (46071'',09 + 279'',44\, t_1 + 0'',12\, t_1^2)(t - t_1) \\ & + (139'',72 + 0'',12\, t_1)(t - t_1)^2 + 36'',32\,(t - t_1)^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J = {} & (20051'',12 - 85'',29\, t_1 - 0'',37\, t_1^2)(t - t_1) \\ & + (-42'',65 - 0'',37\, t_1)(t - t_1)^2 - 41'',80\,(t - t_1)^3\end{aligned}$$

En rappelant la valeur de l'obliquité moyenne

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 31'',68 - 468'',37\, t - 0'',38\, t^2 + 1'',83\, t^3,$$

nous sommes ainsi en possession de toutes les formules nécessaires pour déterminer les effets de la précession

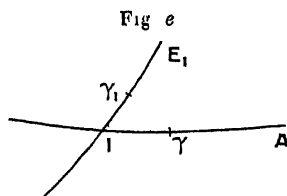



Fig. e

Toutefois on peut se proposer de déterminer encore la position de l'équateur A de l'époque t par rapport à l'écliptique E_1 de l'époque t_1 (*fig.* e), si I est le nœud ascendant de E_1 sur A, et que l'on appelle ψ

l'arc $I\gamma_1$, χ l'arc $I\gamma$, η l'angle I, il est clair que ces quantités seront déterminées par les mêmes équations que Σ, Σ_1, J, à la condition de remplacer Σ par $-\chi$, Σ_1 par $-\psi$, J par $-\eta$, de sorte que l'on a

$$\frac{d\chi}{dt} = -m + \cos\eta \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = n \sin\chi,$$

$$\sin\eta \frac{d\psi}{dt} = n \cos\chi,$$

de plus pour $t = t_1$, on aura $\psi = \chi = 0$, et $\eta = \varepsilon_1$, en désignant comme toujours par ε_1 ce que devient ε pour $t = t_1$

Les arcs ψ et χ sont respectivement la *précession luni-solaire* et la *précession planétaire* entre les époques t_1 et t

Faisons alors

$$m = m_1 + m'_1(t - t_1) + m''_1(t - t_1)^2,$$
$$n = n_1 + n'_1(t - t_1) + n''_1(t - t_1)^2,$$

puis

$$\psi = f(t - t_1) + f'(t - t_1)^2 + f''(t - t_1)^3,$$
$$\chi = k(t - t_1) + k'(t - t_1)^2 + k''(t - t_1)^3,$$
$$\eta = \varepsilon_1 \qquad + \eta'(t - t_1)^2 + \eta''(t - t_1)^3$$

(car le terme en $t - t_1$ manque visiblement dans le développement de η), on aura les relations

$$f \sin\varepsilon_1 = n_1, \qquad 2f' \sin\varepsilon_1 = n'_1, \qquad 3f'' \sin\varepsilon_1 = n''_1 - f\eta' \cos\varepsilon_1 - \frac{1}{2}k^2 n_1,$$
$$k = -m_1 + f\cos\varepsilon_1, \qquad 2k' = -m'_1 + 2f'\cos\varepsilon_1,$$
$$3k'' = -m''_1 + 3f''\cos\varepsilon_1 - f\eta'\sin\varepsilon_1,$$
$$2\eta' = k n_1, \qquad 3\eta'' = k n'_1 + k' n_1,$$

et finalement

$$\psi = (50368'',38 + 49'',30\, t_1 - 0'',04\, t_1^2)(t - t_1)$$
$$+ (-107'',13 - 1'',48\, t_1)(t - t_1)^2 - 1'',53\,(t - t_1)^3,$$

$$\chi = (134'',17 - 188'',69\, t_1 - 0'',14\, t_1^2)(t - t_1)$$
$$+ (-237'',99 - 1'',57\, t_1)(t - t_1)^2 - 1'',66\,(t - t_1)^3,$$

$$\eta = \varepsilon_1 + (6'',52 - 9'',20\, t_1)(t - t_1)^2 - 7'',73\,(t - t_1)^3$$

CHAPITRE XXVII.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE ROTATION DE LA LUNE

161. Supposons actuellement que le corps de centre de gravité O dont on veut étudier le mouvement de rotation soit la Lune.

Comme dans ce cas les angles σ, ε, ω sont fort petits, nous ferons usage des équations (3) du n° 157, dans lesquelles les variables sont

$$\begin{array}{lll} h, & \varepsilon_1 = \sin\varepsilon \sin(u+\chi), & \sigma_1 = \sin\sigma \sin\chi, \\ v = \theta + u + \chi, & \varepsilon_2 = \sin\varepsilon \cos(u+\chi), & \sigma_2 = \sin\sigma \cos\chi, \end{array}$$

toutes les notations précédentes étant généralement conservées, sauf exception spécifiée.

En désignant ici par α_1 et α_2 les rapports très petits, eux aussi, $\frac{C-A}{C}$, $\frac{C-B}{C}$, on a

$$H = \frac{h^2}{2C}\left(1 + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\sigma_1^2 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\sigma_2^2\right) - U,$$

et par suite les équations du problème deviennent, en mettant U en évidence,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial v} + \varepsilon_2 \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_1 \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2}, \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{h}{C} + \frac{h}{C(1+\cos\sigma)}\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\sigma_1^2 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\sigma_2^2\right) \\
&\quad + \frac{\cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\left(\varepsilon_1\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2}\right) + \frac{\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1\frac{\partial U}{\partial \sigma_1} + \sigma_2\frac{\partial U}{\partial \sigma_2}\right), \\
\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{h}{C}\varepsilon_2 + \frac{h\,\varepsilon_2}{C(1+\cos\sigma)}\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\sigma_1^2 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\sigma_2^2\right) \\
&\quad - \frac{\cos^2\varepsilon}{h}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1\cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\varepsilon_2\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1\frac{\partial U}{\partial \sigma_1} + \sigma_2\frac{\partial U}{\partial \sigma_2}\right), \\
\frac{d\varepsilon_2}{dt} &= -\frac{h}{C}\varepsilon_1 - \frac{h\,\varepsilon_1}{C(1+\cos\sigma)}\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\sigma_1^2 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\sigma_2^2\right) \\
&\quad + \frac{\cos^2\varepsilon}{h}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2\cos\varepsilon}{h(1+\cos\varepsilon)}\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\varepsilon_1\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\sigma_1\frac{\partial U}{\partial \sigma_1} + \sigma_2\frac{\partial U}{\partial \sigma_2}\right), \\
\frac{d\sigma_1}{dt} &= -\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\frac{h\cos\sigma}{C}\sigma_2 + \frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial U}{\partial \sigma_2} - \frac{\sigma_1\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\frac{\partial U}{\partial v} + \varepsilon_2\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_1\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2}\right), \\
\frac{d\sigma_2}{dt} &= \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\frac{h\cos\sigma}{C}\sigma_1 - \frac{\cos\sigma}{h}\frac{\partial U}{\partial \sigma_1} - \frac{\sigma_2\cos\sigma}{h(1+\cos\sigma)}\left(\frac{\partial U}{\partial v} + \varepsilon_2\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_1\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les composantes de la rotation instantanée sur les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont toujours

$$p = \frac{h}{A}\sigma_1, \qquad q = \frac{h}{B}\sigma_2, \qquad s = \frac{h\cos\sigma}{C}$$

La fonction de forces U se présente naturellement comme une fonction des angles φ, ψ, ω, et nous ferons

$$\varphi + \psi = \lambda, \qquad \sin\omega\sin\varphi = \omega_1, \qquad \sin\omega\cos\varphi = \omega_2$$

Le triangle GHK (n° 157) donne, comme nous l'avons déjà vu, les relations

$$\sin\omega\sin(\varphi - \chi) = \sin\varepsilon\sin u,$$

$$\sin\omega\cos(\varphi - \chi) = \cos\varepsilon\sin\sigma + \sin\varepsilon\cos\sigma\cos u,$$

et par suite

$$\sin\omega\sin\varphi = \sigma_1\cos\varepsilon + \sin\varepsilon(\sin u\cos\chi + \cos\sigma\cos u\sin\chi),$$

$$\sin\omega\cos\varphi = \sigma_2\cos\varepsilon + \sin\varepsilon(-\sin u\sin\chi + \cos\sigma\cos u\cos\chi)$$

ω_1, ω_2 sont donc développables suivant les puissances de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2$, et en négligeant le troisième ordre par rapport à ces variables, on a simplement

$$\omega_1 = \varepsilon_1 + \sigma_1 + \ldots, \qquad \omega_2 = \varepsilon_2 + \sigma_2 + \ldots$$

Dans un triangle quelconque d'angles A, B, C et de côtés a, b, c on a aussi

$$\sin\frac{b + c - a}{2} = \sin a \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

donc

$$\sin\frac{\lambda - \rho}{2} = \sin u \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\sigma}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

la différence $\lambda - \rho$ est développable comme ω_1, ω_2, et en négligeant les quantités du quatrième ordre,

$$\lambda = \rho + \frac{1}{2}(\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1) + \ldots$$

Pour calculer les dérivées partielles qui figurent dans les équations

précédentes (1), on a donc exactement

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial U}{\partial \lambda},$$

et à des termes près du second ordre,

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial U}{\partial \omega_1} + \frac{1}{2}\sigma_2 \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial U}{\partial \omega_1} - \frac{1}{2}\varepsilon_2 \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \ldots,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} = \frac{\partial U}{\partial \omega_2} - \frac{1}{2}\sigma_1 \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial \sigma_2} = \frac{\partial U}{\partial \omega_2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \ldots$$

Mais, comme au Chapitre précédent, il convient de rapporter directement le mouvement de la Lune sur elle-même au plan de l'écliptique mobile, $x'y'$, l'axe Ox' étant choisi comme nous l'avons fait dans le cas de la Terre : si xy est l'écliptique à l'origine du temps, Ox étant dirigé vers l'équinoxe moyen correspondant, et si N est l'un des nœuds de $x'y'$ sur xy, on a $x\mathrm{N} = x'\mathrm{N} = \vartheta$, et l'inclinaison de $x'y'$ sur xy est ι.

Nous poserons aussi, comme nous l'avons déjà fait,

$$p = \sin\iota \sin\vartheta, \qquad q = \sin\iota \cos\vartheta.$$

Les quantités que nous avons appelées λ et μ au Chapitre précédent peuvent s'écrire, en négligeant le carré de ι,

$$\sin\theta \frac{dp}{dt} + \cos\theta \frac{dq}{dt},$$

$$\cos\theta \frac{dp}{dt} - \sin\theta \frac{dq}{dt},$$

en tenant compte du changement de signification de l'angle ν, et continuant à négliger ι^2, on voit alors immédiatement que l'on peut regarder ν, θ, ε, φ, ψ, ω, λ comme se rapportant à l'écliptique mobile $x'y'$, et conserver les équations (1) et les suivantes, à la seule condition d'augmenter

la valeur de $\frac{d\nu}{dt}$ de la quantité $\tang\frac{\varepsilon}{2}\left(\cos\theta \frac{dp}{dt} - \sin\theta \frac{dq}{dt}\right)$,

» $\frac{du}{dt}$ » $\frac{1}{\sin\varepsilon}\left(\cos\theta \frac{dp}{dt} - \sin\theta \frac{dq}{dt}\right)$,

» $\frac{d\varepsilon}{dt}$ » $-\sin\theta \frac{dp}{dt} - \cos\theta \frac{dq}{dt}$

Négligeant encore des quantités d'ordre supérieur, ceci revient à donner aux expressions de $\frac{d\nu}{dt}, \frac{d\varepsilon_1}{dt}, \frac{d\varepsilon_2}{dt}$ les accroissements respectifs

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \sin\nu + \varepsilon_2 \cos\nu)\frac{dp}{dt} + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cos\nu - \varepsilon_2 \sin\nu)\frac{dq}{dt},$$

$$\cos\nu\frac{dp}{dt} - \sin\nu\frac{dq}{dt},$$

$$-\sin\nu\frac{dp}{dt} - \cos\nu\frac{dq}{dt}$$

On peut réduire les développements de p et q à leurs premiers termes que nous avons appelés $p^0 t$ et $q^0 t$, posant alors

$$p^0 = \iota_0 \cos\vartheta_0, \qquad q_0 = -\iota_0 \sin\vartheta_0,$$

les quantités précédentes sont

$$\frac{1}{2}\varepsilon_1 \iota_0 \sin(\nu - \vartheta_0) + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \iota_0 \cos(\nu - \vartheta_0),$$

$$\iota_0 \cos(\nu - \vartheta_0),$$

$$-\iota_0 \sin(\nu - \vartheta_0)$$

La fonction U provient de l'action de la Terre T, désignons toujours sa masse par M_0, tandis que M sera celle de la Lune, par r la distance TO, par α, β, γ les cosinus directeurs de TO par rapport aux axes $O\xi\eta\zeta$, nous prendrons U sous la forme équivalente à celle donnée précédemment

$$U = \frac{3fM_0}{2r^3}[(C-A)\alpha^2 + (C-B)\beta^2]$$

$$= \frac{3fM_0 C}{2r^3}(\alpha_1\alpha^2 + \beta_1\beta^2)$$

Soient l et b la longitude et la latitude de la Lune par rapport aux axes menés par T parallèlement à $Ox'y'z'$, on a

$$\begin{aligned}\alpha = {} & \cos b \cos l(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\omega) \\ & + \cos b \sin l(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\omega) \\ & + \sin b \sin\varphi \sin\omega,\end{aligned}$$

et l'expression de β s'en déduit en augmentant φ de $\frac{\pi}{2}$. Négligeant ω^3,

$$\alpha = \cos b \cos(l-\lambda) + \omega_1 \sin b - \frac{1}{2}\omega_1 \sin\omega \cos b \sin(l-\lambda+\varphi),$$

$$\begin{aligned}2\alpha^2 = {} & \cos^2 b + \cos^2 b \cos(2l-2\lambda) + 4\omega_1 \sin b \cos b \cos(l-\lambda) \\ & - \omega_1^2(1-3\sin^2 b) - \omega_1^2 \cos^2 b \cos(2l-2\lambda) - \omega_1\omega_2 \cos^2 b \sin(2l-2\lambda),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\beta^2 = {} & \cos^2 b - \cos^2 b \cos(2l-2\lambda) + 4\omega_2 \sin b \cos b \sin(l-\lambda) \\ & - \omega_2^2(1-3\sin^2 b) + \omega_2^2 \cos^2 b \cos(2l-2\lambda) - \omega_1\omega_2 \cos^2 b \sin(2l-2\lambda).\end{aligned}$$

Donc, en laissant de côte les termes indépendants de λ, ω_1, ω_2,

$$\begin{aligned}U = \frac{3fM_0C}{4r^3}[& (\alpha_1-\alpha_2)\cos^2 b \cos(2l-2\lambda) + 4\alpha_1\omega_1 \sin b \cos b \cos(l-\lambda) \\ & + 4\alpha_2\omega_2 \sin b \cos b \sin(l-\lambda) - (\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2)(1-3\sin^2 b) \\ & - (\alpha_1\omega_1^2 - \alpha_2\omega_2^2)\cos^2 b \cos(2l-2\lambda) \\ & - (\alpha_1+\alpha_2)\omega_1\omega_2 \cos^2 b \sin(2l-2\lambda)]\end{aligned}$$

Désignons comme au Chapitre précédent par N, N_1, N_2, N', N'_1 les longitudes moyennes de la Lune, de son périgée et de son nœud, du Soleil et de son périgée, toutes ces longitudes sont comptées dans le plan de l'écliptique mobile à partir de Ox', et leurs mouvements respectifs sont n, n_1, n_2, n', n'_1

Posons

$$k = \frac{3}{2}\frac{M_0}{M_0+M}\frac{a_0^3}{a^3}, \qquad \frac{a}{r} = \rho,$$

les constantes a et a_0 étant définies comme précédemment ce nombre k est voisin de $\frac{3}{2}$, égal à $1,486$

Faisons encore, toujours avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned}\rho^3(1-3\sin^2 b) &= Q_0 + \Sigma P_0 \cos V_0, \\ \rho^3 \cos^2 b \cos 2l &= \Sigma P_2 \cos V_2, \\ 2\rho^3 \sin b \cos b \sin l &= \Sigma P_1 \cos V_1,\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}U = \frac{1}{2}Cn^2k[& (\alpha_1-\alpha_2)\Sigma P_2 \cos(V_2-2\lambda) - 2\alpha_1\omega_1 \Sigma P_1 \sin(V_1-\lambda) \\ & + 2\alpha_2\omega_2 \Sigma P_1 \cos(V_1-\lambda) - (\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2)(Q_0 + \Sigma P_0 \cos V_0) \\ & - (\alpha_1\omega_1^2 - \alpha_2\omega_2^2)\Sigma P_2 \cos(V_2-2\lambda) \\ & - (\alpha_1+\alpha_2)\omega_1\omega_2 \Sigma P_2 \sin(V_2-2\lambda)]\end{aligned}$$

Si l'on transcrit alors les équations (1) en tenant compte des additions dues au mouvement de l'écliptique, et négligeant tous les termes du troisième ordre par rapport à l'ensemble des petites quantités ω, σ, i_0, α_1, α_2, on obtiendra, en substituant λ, ω_1, ω_2 à φ, ε_1, ε_2, et faisant $h = Cj$

$$
(2)\quad
\begin{cases}
\dfrac{dj}{dt} = n^2 k\big[(\alpha_1-\alpha_2)\Sigma P_2 \sin(V_2 - 2\lambda) \\
\qquad + \{(\alpha_1-\alpha_2)\omega_1 + \alpha_2\sigma_1\}\Sigma P_1 \cos(V_1-\lambda) \\
\qquad + \{(\alpha_2-\alpha_1)\omega_2 + \alpha_1\sigma_2\}\Sigma P_1 \sin(V_1-\lambda)\big], \\
\dfrac{d\lambda}{dt} = j + \dfrac{1}{2}\omega_1 i_0 \sin(\lambda-\vartheta_0) + \dfrac{1}{2}\omega_2 i_0 \cos(\lambda-\vartheta_0) \\
\qquad + \dfrac{1}{2} j\sigma_1(\omega_1-\sigma_1) + \dfrac{1}{2} j\sigma_2(\omega_2-\sigma_2), \\
\dfrac{d\omega_1}{dt} = j\omega_2 - j(1+\alpha_2)\sigma_2 + i_0\cos(\lambda-\vartheta_0), \\
\dfrac{d\omega_2}{dt} = -j\omega_1 + j(1+\alpha_1)\sigma_1 - i_0\sin(\lambda-\vartheta_0), \\
\dfrac{d\sigma_1}{dt} = -j\alpha_2\sigma_2 + \dfrac{n^2 k}{j}\big[\alpha_2\Sigma P_1\cos(V_1-\lambda) - \alpha_2\omega_2(Q_0 + \Sigma P_0\cos V_0) \\
\qquad + \alpha_2\omega_2\Sigma P_2\cos(V_2-2\lambda) \\
\qquad - \{\alpha_2\omega_1 + (\alpha_1-\alpha_2)\sigma_1\}\Sigma P_2\sin(V_2-2\lambda)\big], \\
\dfrac{d\sigma_2}{dt} = j\alpha_1\sigma_1 + \dfrac{n^2 k}{j}\big[\alpha_1\Sigma P_1\sin(V_1-\lambda) + \alpha_1\omega_1(Q_0 + \Sigma P_0\cos V_0) \\
\qquad + \alpha_1\omega_1\Sigma P_2\cos(V_2-2\lambda) \\
\qquad + \{\alpha_1\omega_2 + (\alpha_2-\alpha_1)\sigma_2\}\Sigma P_2\sin(V_2-2\lambda)\big]
\end{cases}
$$

De plus,

$$
p = j(1+\alpha_1)\sigma_1, \qquad q = j(1+\alpha_2)\sigma_2, \qquad s = j\cos\sigma
$$

162 L'observation nous apprend que l'angle λ a très exactement le même mouvement que la longitude moyenne N, puisque la Lune tourne toujours vers la Terre le même hémisphère, à des variations périodiques près On doit d'ailleurs supposer ici que cette longitude N est affectée du terme en t^2, qui correspond à son accélération séculaire, et dont le coefficient est extrêmement petit

Si donc nous posons $\lambda = N + x$, x étant une quantité périodique

a très faible variation, les deux premières équations (2) deviennent

$$j = \frac{dN}{dt} + \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}\omega_1 i_0 \sin(N - \vartheta_0 + x) - \frac{1}{2}\omega_2 i_0 \cos(N - \vartheta_0 + x)$$
$$- \frac{1}{2} j\sigma_1(\omega_1 - \sigma_1) - \frac{1}{2} j\sigma_2(\omega_2 - \sigma_2),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d^2N}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\omega_1 i_0 \sin(N - \vartheta_0 + x) + \omega_2 i_0 \cos(N - \vartheta_0 + x) + \quad]$$
$$+ n^2\lambda[(\alpha_1 - \alpha_2)\Sigma P_2 \sin(V_2 - 2N - 2x) + \quad]$$

Mettons en évidence dans le développement de $\rho^3\cos^2 b \cos 2l$ le terme $Q_2 \cos 2N$, qui correspond à l'hypothèse $V_2 = 2N$, d'après le Chapitre précédent, on a $Q_2 = 0,988$. En excluant dorénavant ce terme de la somme $\Sigma P_2 \cos V_2$, et faisant

$$f^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)\lambda Q_2 = 2,93\,(\alpha_1 - \alpha_2),$$

de sorte que

$$f = 1,71\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2},$$

nous pourrons écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2} f^2 n^2 \sin 2x = -\frac{d^2N}{dt^2} + \quad$$

La fonction $\sin 2x$ est périodique, et d'après cette équation même, en raison de la petitesse de x, ω, σ, i_0, ne saurait avoir qu'une partie constante extrêmement petite, il faut en conclure, puisque x ne varie qu'entre des limites très étroites, que sa partie constante diffère extrêmement peu d'un multiple de $\frac{\pi}{2}$, que nous pouvons prendre nul ce qui revient à dire que l'axe $O\xi$ sera très sensiblement dans le prolongement de la direction moyenne du vecteur TO qui va de la Terre à la Lune. Dans ces conditions, nous pouvons encore, l'angle x étant très petit, remplacer $\sin 2x$ par $2x$, et supprimer x dans le second membre de l'équation précédente, qui devient

$$(3)\quad \frac{d^2x}{dt^2} + f^2 n^2 x = -\frac{d^2N}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\omega_1 i_0 \sin(N - \vartheta_0) + \omega_2 i_0 \cos(N - \vartheta_0)$$
$$+ j\sigma_1(\omega_1 - \sigma_1) + j\sigma_2(\omega_2 - \sigma_2)]$$
$$+ n^2\lambda[(\alpha_1 - \alpha_2)\Sigma P_2 \sin(V_2 - 2N)$$
$$+ \{(\alpha_1 - \alpha_2)\omega_1 + \alpha_2\sigma_1\}\Sigma P_1 \cos(V_1 - N)$$
$$+ \{(\alpha_2 - \alpha_1)\omega_2 + \alpha_1\sigma_2\}\Sigma P_1 \sin(V_1 - N)]$$

C'est une équation linéaire en x, dont il est facile d'obtenir la solution générale, l'intégrale de l'équation sans second membre est d'abord

$$x = \mathrm{F} \sin(fnt + f_0),$$

en désignant par F et f_0 deux constantes arbitraires. Pour que cette solution soit réellement périodique, il faut que la quantité f^2 soit positive, ce qui exige $\alpha_1 > \alpha_2$, ou $A < B$ des deux axes $O\xi$, $O\eta$, c'est donc à celui qui est dirigé suivant TO que correspond le plus petit moment d'inertie. Pour compléter cette solution, supposons le second membre de l'équation (3) mis sous la forme $n^2 k \Sigma \mathrm{S} \sin \mathrm{V}$, le mouvement de l'argument connu V étant mn. Il est clair que pour obtenir la valeur complète de x, on devra prendre

$$x = \mathrm{F} \sin(fnt + f_0) + \Sigma \frac{k \mathrm{S} \sin \mathrm{V}}{f^2 - m^2},$$

et par suite, il faut s'arrêter aux arguments V pour lesquels le coefficient S est grand ou bien le rapport m petit. Nous y reviendrons un peu plus loin, mais nous pouvons répéter dès maintenant que la quantité x est très petite, et qu'il en est de même par suite de la constante F, que les observations ne permettent pas de déterminer. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que l'observation terrestre d'un angle à la surface de la Lune le réduit dans le rapport, inférieur à $\frac{1}{200}$, du rayon linéaire de la Lune à sa distance de la Terre.

En raison de la petitesse de x, on peut sans inconvénient prendre $j = n$ dans les dernières équations (2), et y remplacer λ par N. On obtient ainsi, pour déterminer ω_1, ω_2, σ_1, σ_2,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\omega_1}{dt} - n\omega_2 + n(1+\alpha_2)\sigma_2 = \iota_0 \cos(\mathrm{N} - \vartheta_0), \\ & \frac{d\omega_2}{dt} + n\omega_1 - n(1+\alpha_1)\sigma_1 = -\iota_0 \sin(\mathrm{N} - \vartheta_0), \\ & \frac{d\sigma_1}{dt} + nk\alpha_2(\mathrm{Q}_0 - \mathrm{Q}_2)\omega_2 + n\alpha_2\sigma_2 \\ & \quad = nk[\alpha_2 \Sigma \mathrm{P}_1 \cos(\mathrm{V}_1 - \mathrm{N}) - \alpha_2\omega_2 \Sigma \mathrm{P}_0 \cos \mathrm{V}_0 + \sigma_2\omega_2 \Sigma \mathrm{P}_2 \cos(\mathrm{V}_2 - 2\mathrm{N}) \\ & \qquad - \{\alpha_2\omega_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\sigma_1\} \Sigma \mathrm{P}_2 \sin(\mathrm{V}_2 - 2\mathrm{N})], \\ & \frac{d\sigma_2}{dt} - nk\alpha_1(\mathrm{Q}_0 + \mathrm{Q}_2)\omega_1 - n\alpha_1\sigma_1 \\ & \quad = nk[\alpha_1 \Sigma \mathrm{P}_1 \sin(\mathrm{V}_1 - \mathrm{N}) + \alpha_1\omega_1 \Sigma \mathrm{P}_0 \cos \mathrm{V}_0 + \alpha_1\omega_1 \Sigma \mathrm{P}_2 \cos(\mathrm{V}_2 - 2\mathrm{N}) \\ & \qquad + \{\alpha_1\omega_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\sigma_2\} \Sigma \mathrm{P}_2 \sin(\mathrm{V}_2 - 2\mathrm{N})] \end{aligned} \right.$$

Il est facile d'intégrer ces équations par approximations successives. Si nous laissons d'abord de côté les seconds membres, nous avons des équations linéaires homogènes pour lesquelles nous pouvons chercher des solutions de la forme

$$\omega_1 = F_1 \sin(fnt + f_0), \qquad \sigma_1 = G_1 \sin(fnt + f_0),$$
$$\omega_2 = F_2 \cos(fnt + f_0), \qquad \sigma_2 = G_2 \cos(fnt + f_0),$$

en prenant pour f_0 une constante arbitraire et déterminant f ainsi que les rapports des coefficients F_1, F_2, G_1, G_2 par les relations

$$\begin{aligned} &f F_1 - F_2 + (1 + \alpha_2) G_2 = 0, \\ &f F_2 - F_1 + (1 + \alpha_1) G_1 = 0, \\ &f G_1 + \lambda \alpha_2 (Q_0 - Q_2) F_2 + \alpha_2 G_2 = 0, \\ &f G_2 + \lambda \alpha_1 (Q_0 + Q_2) F_1 + \alpha_1 G_1 = 0 \end{aligned}$$

rappelons d'ailleurs que l'on a $Q_0 = 0,9925$

On en déduit l'équation en f^2

$$\begin{aligned} f^4 - f^2[1 + \alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_1(1 + \alpha_2)(Q_0 + Q_2) + \lambda\alpha_2(1 + \alpha_1)(Q_0 - Q_2)] \\ + \alpha_1\alpha_2[1 + \lambda(1 + \alpha_1)(Q_0 + Q_2)][1 + \lambda(1 + \alpha_2)(Q_0 - Q_2)] = 0, \end{aligned}$$

qui admet une racine voisine de l'unité

$$f'^2 = 1 + \lambda\alpha_1(Q_0 + Q_2) + \lambda\alpha_2(Q_0 - Q_2) + \ldots,$$

et une autre, de l'ordre $\alpha_1\alpha_2$,

$$f''^2 = \alpha_1\alpha_2[1 + \lambda(Q_0 + Q_2)][1 + \lambda(Q_0 - Q_2)] \ldots,$$

dans ces expressions, nous avons négligé les puissances supérieures des très petites quantités α_1 et α_2. Pour que la solution considérée soit d'ailleurs réellement périodique, il faut que le produit $\alpha_1\alpha_2$ soit positif, c'est-à-dire que C soit le plus grand ou le plus petit des trois moments principaux A, B, C.

Numériquement, on a d'une façon suffisamment exacte

$$f'^2 = 1 + 2,94\alpha_1 + \ldots, \qquad f' = 1 + 1,47\alpha_1 + \ldots,$$
$$f''^2 = \alpha_1\alpha_2(3,92 + \ldots), \qquad f'' = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}(1,98 + \ldots)$$

Si l'on nomme encore F' et F'', f'_0 et f''_0 quatre constantes arbitraires, on trouve ainsi pour la solution des équations (4) privées de

seconds membres, en négligeant α_1 et α_2,

$$\omega_1 = F'\sin(f'nt + f'_0) + F''\sin(f''nt + f''_0),$$
$$\omega_2 = F'\cos(f'nt + f'_0) - 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}F''\cos(f''nt + f''_0),$$
$$\sigma_1 = \qquad + F''\sin(f''nt + f''_0),$$
$$\sigma_2 = \qquad - 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}F''\cos(f''nt + f''_0)$$

De même que F, les constantes F′ et F″ paraissent très petites, et l'observation ne permet pas de déterminer leurs valeurs

Pour achever l'intégration, supposons en premier lieu que les approximations successives donnent pour les seconds membres des deux dernières équations (4) des développements de la forme $nk\Sigma S_1 \cos V$, $nk\Sigma S_2 \sin V$, les arguments distincts V étant connus, ainsi que leurs coefficients En appelant mn le mouvement de V, faisons

$$M = (m^2 - f'^2)(m^2 - f''^2),$$

si l'on néglige la quantité $k\alpha_2(Q_0 - Q_2)$, et que l'on remplace

$$k\alpha_1(Q_0 + Q_2)$$

par $3\alpha_1$, on voit sans peine que l'on devra prendre, pour compléter la solution précédente, à des quantités insensibles près

$$\omega_1 = \sum \frac{k}{M}[-mS_1 + (m^2 + \alpha_2 m^2 - \alpha_2)S_2]\sin V,$$
$$\omega_2 = \sum \frac{k}{M}[-(m^2 + \alpha_1 m^2 - 4\alpha_1)S_1 + mS_2]\cos V,$$
$$\sigma_1 = \sum \frac{k}{M}[(m^2 - 1 - 3\alpha_1)mS_1 + \alpha_2(m^2 - 1)S_2]\sin V,$$
$$\sigma_2 = \sum \frac{k}{M}[-\alpha_1(m^2 - 4)S_1 - m(m^2 - 1)S_2]\cos V,$$

l'attention devra donc se porter surtout sur les arguments V pour lesquels les coefficients S_1, S_2 sont notables, en même temps que leur mouvement mn est voisin de n ou bien très petit

Les termes principaux du développement $\Sigma P_1 \cos V_1$ sont

$$0{,}08977\cos N_2 - 0{,}08875\cos(2N - N_2),$$

et nous allons d'abord nous borner à leur considération Il en résulte,

pour $V = N - N_2$,

$$S_1 = 0,00102\,\alpha_2, \qquad S_2 = -0,17852\,\alpha_1,$$

prenons alors, avec F. Hayn, $\alpha_2 = \frac{3}{4}\alpha_1$, comme on a ici

$$m = 1,004019,$$

il vient

$$M = 0,008119(1 - 365\,\alpha_1),$$

et par suite

$$\omega_1 = -33,08\,\frac{\alpha_1}{1 - 365\,\alpha_1}\sin(N - N_2),$$

$$\omega_2 = -32,95\,\frac{\alpha_1}{1 - 365\,\alpha_1}\cos(N - N_2),$$

$$\sigma_1 =$$

$$\sigma_2 = +0,264\,\frac{\alpha_1}{1 - 365\,\alpha_1}\cos(N - N_2),$$

et ces résultats seraient très peu changés si l'on adoptait une autre valeur pour le rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Supposons que les valeurs complètes de ω_1, ω_2 soient les précédentes, augmentées de $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, en désignant ainsi des accroissements périodiques fort petits, qui ne contiennent aucun terme sensible dépendant encore de l'argument $N - N_2$, on aura

$$\omega_1 \sin(N - N_2) + \omega_2 \cos(N - N_2) = \sin\omega\cos(\lambda - \psi - N + N_2)$$
$$= -33,015\,\frac{\alpha_1}{1 - 365\,\alpha_1} + \ldots,$$

les termes non écrits étant périodiques, très petits.

Or l'observation nous apprend non seulement que la différence $\lambda - N$ reste extrêmement petite, mais qu'il en est de même de la différence $\psi - N_2$, en prenant pour le point G, défini au n° 157, le nœud descendant du grand cercle $\xi\eta$ par rapport à xy ou plutôt $x'y'$. L'inclinaison ω reste donc toujours voisine d'une valeur moyenne ω_0 telle que

$$\sin\omega_0 = -33,015\,\frac{\alpha_1}{1 - 365\,\alpha_1},$$

prenant encore avec F. Hayn

$$\omega_0 = -1^\circ 32' 6'',$$

on en déduit

$$\alpha_1 = 0{,}000626, \qquad \alpha_2 = 0{,}000470,$$

et

$$\omega_1 = -5536'' \sin(N - N_2), \qquad \omega_2 = -5514'' \cos(N - N_2),$$
$$\sigma_1 = \qquad\qquad \sigma_2 = \quad 44'' \cos(N - N_2)$$

Les quantités α_1, α_2 étant positives, C est le plus grand des trois moments d'inertie principaux de la Lune

En examinant les équations (4), on voit que le seul argument V dont il soit nécessaire de tenir compte encore est l'argument $N_1 - N_2$, pour lequel $m = 0{,}01247$

En prenant les termes (l'exactitude du dernier chiffre n'étant pas absolue)

$$\Sigma P_1 \cos V_1 = \quad +0{,}00246 \cos(N + N_1 - N_2) + 0{,}00744 \cos(N - N_1 + N_2) + \quad ,$$
$$\Sigma P_0 \cos V_0 = \quad +0{,}1624 \cos(N - N_1) + \quad ,$$
$$\Sigma P_2 \cos V_2 = \quad -0{,}0279 \cos(N + N_1) + 0{,}1892 \cos(3N - N_1) + \quad ,$$

et se servant des valeurs déjà trouvées pour ω_1, ω_2, σ_1, σ_2, on trouve, relativement à l'argument $N_1 - N_2$,

$$S_1 = 0{,}01283\,\alpha_2 = 0{,}00962\,\alpha_1, \qquad S_2 = -\ 0{,}00641\,\alpha_1,$$

et, par suite, les compléments suivants pour les valeurs des inconnues

$$\omega_1 = +146'' \sin(N_1 - N_2), \qquad \omega_2 = +71'' \cos(N_1 - N_2),$$
$$\sigma_1 = +145'' \sin(N_1 - N_2), \qquad \sigma_2 = +69'' \cos(N_1 - N_2)$$

Il nous reste encore à tenir compte des seconds membres des deux premières équations (4) on verra sans peine qu'il en résulte les seuls nouveaux compléments peut-être sensibles

$$\omega_1 = -\frac{2}{3}\frac{\iota_0}{n\alpha_1} \sin(N - \vartheta_0), \qquad \omega_2 = -\frac{2}{3}\frac{\iota_0}{n\alpha_1} \cos(N - \vartheta_0),$$

mais le coefficient $\frac{2}{3}\frac{\iota_0}{n\alpha_1}$ ne dépasse pas 6'', et par suite ces termes ne sauraient avoir aucune influence sur les observations, de sorte que nous pouvons encore les négliger

Revenons maintenant à l'équation (3), pour calculer effectivement la valeur de x Faisons d'abord $V = N - N_1$, d'où $m = 0{,}9915$ En prenant les termes

$$\Sigma P_2 \cos V_2 = \quad -0{,}0279 \cos(N + N_1) + 0{,}1892 \cos(3N - N_1) + \quad ,$$

on a $S = 0,2171\ (\alpha_1 - \alpha_2)$, et par suite le terme correspondant de x est

$$-11'' \sin(N - N_1)$$

Faisons encore $V = N' - N'_1$, d'où $m = 0,0748$, en prenant les termes

$$\Sigma P_2 \cos V_2 = \begin{array}{l} -0,00344 \cos(2N + N' - N'_1) \\ +0,00304 \cos(2N - N' + N'_1) + \quad , \end{array}$$

on a $S = -0,00648\ (\alpha_1 - \alpha_2)$, et le terme correspondant de x est

$$+60'' \sin(N' - N'_1)$$

Un autre argument V à longue période serait $2N_1 - 2N_2$, mais le coefficient S correspondant, provenant soit de la somme $\Sigma P_2 \sin(V_2 - 2N)$, soit des produits tels que $\omega_1 \Sigma P_1 \cos(V_1 - N)$, $\omega_2 \Sigma P_1 \sin(V_1 - N)$, est extrêmement petit, et difficile à calculer exactement, d'autre part, comme on a pour cet argument $m^2 = 0,000622$, tandis que $f^2 = 0,00183\dot{4} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, on voit que l'incertitude qui règne en réalité sur la valeur du rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ne permet d'obtenir aucun résultat digne de la moindre confiance On vérifiera encore qu'il n'y a pas lieu de considérer d'autres arguments V, ni de tenir compte du mouvement de l'écliptique, et il faut ajouter, d'une façon générale, que tous les coefficients que nous avons déterminés, sauf ceux qui se rapportent à l'argument $N - N_2$, sont très notablement modifiés quand on vient à changer la valeur adoptée pour $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Rassemblant les divers résultats obtenus, sans qu'il y ait lieu de chercher une plus grande exactitude, nous avons l'ensemble de formules suivantes pour déterminer effectivement le mouvement de la Lune sur elle-même, rapporté à l'écliptique mobile, ou en d'autres termes la *libration physique* (ou *réelle*) de la Lune

$$\varphi + \psi = N - 11'' \sin(N - N_1) + 60'' \sin(N' - N'_1),$$

$$\sin\omega \sin\varphi = -5536'' \sin(N - N_2) + 146'' \sin(N_1 - N_2),$$

$$\sin\omega \cos\varphi = -5514'' \cos(N - N_2) + \ 71'' \cos(N_1 - N_2),$$

et il serait facile d'ajouter les valeurs des autres éléments que l'on peut considérer, en joignant aussi les termes qui dépendent des constantes F, F′, F″, inaccessibles à l'observation, et qui constituent

la libration *arbitraire*. On a en particulier, pour définir la libration de l'inclinaison et de la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire,

$$\omega = \omega_0 + 108'',5 \cos(N - N_1) - 37'',5 \cos(N + N_1 - 2N_2) + 11'' \cos(2N - 2N_2),$$

$$(\psi - N_2) \sin \omega_0 = 108'',5 \sin(N - N_1) - 37'',5 \sin(N + N_1 - 2N_2) + 11'' \sin(2N - 2N_2),$$

avec

$$\omega_0 = -1^\circ 32' 6''.$$

Nous avons tenu compte dans ce qui précède de la seule action de la Terre ; il n'est pas difficile de constater que celle du Soleil ne saurait donner en effet que des résultats inappréciables. L'expression de U donnée ci-dessus convient encore au Soleil à la condition d'y remplacer M_0 par la masse du Soleil, et les coordonnées r, l, b par les coordonnées r', l', b' du Soleil, rapportées au centre de la Lune comme origine. Or la valeur moyenne de r' est très sensiblement égale au demi-grand axe a' de l'orbite du Soleil autour de la Terre, et l'on a d'une façon très approchée

$$fM = n'^2 a'^3,$$

n' désignant toujours le mouvement de la longitude N'.

Il en résulte que le coefficient k que nous avons introduit précédemment dans l'expression de U doit être remplacé ici par

$$k' = \frac{3}{2} \frac{n'^2}{n^2},$$

et comme ce nouveau coefficient est 179 fois plus petit que k, il est clair qu'il n'y a pas lieu d'étudier plus attentivement l'action du Soleil.

———

LIVRE VI.

THEORIE DES ANCIENS SATELLITES DE JUPITER

CHAPITRE XXVIII.

EQUATIONS GÉNÉRALES DU PROBLEME

163 L'étude du mouvement des quatre anciens satellites de Jupiter constitue un probleme nettement défini, mais d'une grande complexité, surtout au point de vue numerique, car il dépend d'un grand nombre de constantes qu'il est fort difficile de déterminer d'une façon précise

Sans remonter aux nos 5 et 6, nous pouvons en former les premieres equations de la façon la plus simple et la plus rapide comme il suit.

Soit S le centre de gravité de la planète Jupiter, dont la masse sera m la lettre S designera aussi la planete elle-même, sans confusion possible

Soient dans les mêmes conditions S_1, S_2, S_3, S_4 les quatre satellites dont nous cherchons le mouvement, rangés par ordre de distance croissante à S, m_1, m_2, m_3, m_4 leurs masses, soit aussi S_0 le Soleil, de masse m_0, et généralement S_p des corps quelconques de masse m_p

Appelons toujours f le coefficient d'attraction, $fmm_p V_p$ le potentiel d'attraction entre S et S_p, $fm_p m_q V_{pq}$ le potentiel entre S_p et S_q, les indices p, q étant distincts quelconques, tant qu'ils ne sont pas spécifiés Si x_p, y_p, z_p sont les coordonnées rectangulaires de S_p par rapport à des axes de directions fixes d'origine S, on a généralement,

t etant le temps,

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = f(m + m_p)\frac{\partial V_p}{\partial x_p} + \sum_q f m_q \frac{\partial}{\partial x_p}\left(V_{pq} + x_p \frac{\partial V_q}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial V_q}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial V_q}{\partial z_q}\right),$$

avec les equations analogues, relatives a y_p et z_p

En raison de la petitesse de certaines masses ou de la grandeur de certaines distances, aussi bien que de la petitesse des dimensions de certains corps, nous pouvons alors réduire le probleme envisagé au suivant

Le mouvement d'un satellite S_p ($p = 1, 2, 3, 4$) est celui d'un point materiel de masse egale a l'unite sous l'action d'une fonction de forces U_p, egale à

$$f(m + mp)V_p + \sum_q f m_q \left(V_{pq} + x_p \frac{\partial V_q}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial V_q}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial V_q}{\partial z_q}\right),$$

l'indice q prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, sauf p

De plus, on néglige les dimensions des satellites S_p et du Soleil S_0, de sorte que, si r_{pq} designe la distance $S_p S_q$, on a

$$V_{pq} = \frac{1}{r_{pq}},$$

et dans la seconde partie de U_p, on reduit de même V_q a sa partie principale $\frac{1}{r_q}$, inverse de la distance SS_q, par suite

$$U_p = f(m + m_p)V_p + \sum_q f m_q \left(\frac{1}{r_{pq}} - \frac{x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q}{r_q^3}\right),$$

et les coordonnées x_0, y_0, z_0 du Soleil sont supposées parfaitement connues par ailleurs Nous le répetons une fois pour toutes p prend l'une des valeurs 1, 2, 3, 4 et q prend celles de ces valeurs qui sont differentes de p, et en outre zero

Examinons de plus pres la fonction V_p qui figure dans U_p Assimilons Jupiter a un corps solide de revolution autour d'un axe $S\zeta$, tant au point de vue de la forme qu'a celui de la distribution de la matiere, appelons alors C le moment d'inertie par rapport a $S\zeta$, A celui par rapport a un axe quelconque $S\xi$ perpendiculaire a $S\zeta$, soit de plus β_p l'angle que fait le vecteur SS_p, de longueur r_p, avec le plan de l'equateur de Jupiter, c'est-à-dire le plan des axes $S\xi$, nous savons d'apres

le n° 2 que l'on peut prendre

$$V_p = \frac{1}{r_p} + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{mr_p^3}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\beta_p\right),$$

et cette expression est très généralement suffisante

Toutefois, on peut craindre, en se bornant ainsi, de laisser de côté des termes d'influence quelque peu sensible, en raison de la grandeur de l'aplatissement de Jupiter, que M. Sampson prend egal à $\frac{1}{15}$

Si l'on se reporte au n° 2, on voit alors que le terme suivant du developpement de la fonction V_p est egal a

$$\frac{1}{mr_p^5}\,\Sigma\, dm\left[\frac{3}{8}\rho^4 - \frac{15}{4}\sigma^2\rho^2 + \frac{35}{8}\sigma^4\right],$$

la sommation s'etendant aux diverses molecules dm de S, dont la distance à S est ρ, et pour lesquelles σ est la projection de ρ sur SS_p

Si l'on rapporte S à trois axes rectangulaires $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$, le plan $S\xi\zeta$ contenant SS_p, les coordonnees de dm seront ξ, η, ζ et l'on aura

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad \sigma = \xi\cos\beta_p + \zeta\sin\beta_p$$

Faisons

$$\Sigma\xi^4\,dm = \Sigma\eta^4\,dm = P, \qquad \Sigma\zeta^4\,dm = R, \qquad \Sigma\xi^2\zeta^2\,dm = \Sigma\eta^2\zeta^2\,dm = Q,$$

et observons que

$$\Sigma\xi^2\eta^2\,dm = \frac{1}{3}P,$$

ainsi qu'on le voit en faisant tourner l'axe $O\xi$ d'un angle quelconque, le terme considéré du développement de V_p se trouve sans peine egal à

$$\frac{15(P-6Q+R)}{8mr_p^5}\left(\frac{1}{5} - 2\sin^2\beta_p + \frac{7}{3}\sin^4\beta_p\right)$$

Appelons a le rayon équatorial de Jupiter, nous ferons

$$J = \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{ma^2}, \qquad J' = \frac{15}{8}\,\frac{P-6Q+R}{ma^4},$$

et par suite, nous aurons

$$V_p = \frac{1}{r_p} + \frac{Ja^2}{r_p^3}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\beta_p\right) + \frac{J'a^4}{r_p^5}\left(\frac{1}{5} - 2\sin^2\beta_p + \frac{7}{3}\sin^4\beta_p\right)$$

Si Jupiter était un ellipsoïde homogène de révolution, d'axe polaire c, les formules du n° 3 donneraient immédiatement

$$J = \frac{3}{10}\,\frac{a^2 - c^2}{a^2}, \qquad J' = \frac{9}{56}\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)^2,$$

et en supposant

$$\frac{a - c}{a} = \frac{1}{15}$$

comme nous l'avons dit, on aurait $J = 0{,}0387$, $J' = 0{,}00267$.

La comparaison de la théorie aux observations conduit à prendre

$$J = 0{,}022\,?\,73,$$

et en réduisant J' sensiblement dans le même rapport, on a, avec M. Sampson, dont nous adopterons toutes les données numériques,

$$J' = 0{,}001\,?\,2$$

Finalement, la fonction de forces U_p qui définit le mouvement de S_p est

$$U_p = f(m + m_p)\left[\frac{1}{r_p} + \frac{Ja^2}{r_p^3}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\beta_p\right) + \frac{J'a^4}{r_p^5}\left(\frac{1}{5} - 2\sin^2\beta_p + \frac{7}{3}\sin^4\beta_p\right)\right]$$
$$+ \sum f m_q\left(\frac{1}{r_{pq}} - \frac{x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q}{r_q^3}\right)$$

L'angle β_p dépend des paramètres qui déterminent le mouvement de Jupiter sur lui-même. l'étude de ce mouvement doit donc nécessairement être jointe à celle du mouvement des satellites, puisqu'il dépend de leur action. On ne peut le supposer connu à l'avance, comme nous avons fait pour le mouvement du Soleil autour de Jupiter, sur lequel l'action des satellites et celle de la forme de Jupiter n'ont pas d'effet sensible.

La fonction de forces U qui définit le mouvement de Jupiter sur lui-même est la somme des potentiels $fmm_q V_q$ $(q = 0, 1, 2, 3, 4)$, et par suite, en supprimant les termes indépendants des variables qui fixent à chaque instant l'orientation de la planète, on a, avec une précision suffisante,

$$U = -\Sigma f m m_q \frac{Ja^2}{r_q^3}\sin^2\beta_q,$$

l'angle β_0 étant défini comme ci-dessus β_p.

Il convient d'écrire dès maintenant les équations très simples dont dépend le mouvement de Jupiter.

Choisissons pour plan de référence Sxy le plan moyen de l'orbite de Jupiter à l'origine du temps, qui sera 1900 janvier 0,0 (temps moyen de Greenwich).

Reportons-nous alors au n° 157, et adoptons-en pour un instant toutes les notations. L'observation montre que les angles ε, σ, ω sont ici tous petits, et par suite nous ferons usage des équations (4) dans lesquelles les variables sont

$$h, \qquad \varepsilon_1 = \sin\varepsilon\cos\theta, \qquad \sigma_1 = \sin\sigma\sin\chi,$$
$$v = \theta + u + \chi, \qquad \varepsilon_2 = \sin\varepsilon\cos\theta, \qquad \sigma_2 = \sin\sigma\sin\chi.$$

Faisons

$$\lambda = \varphi + \psi, \qquad \omega_1 = \sin\omega\sin\psi, \qquad \omega_2 = \sin\omega\cos\psi,$$

il en résulte sans peine

$$\omega_1 = \varepsilon_1 - \sigma_1\cos v + \sigma_2\sin v + \cdots,$$
$$\omega_2 = \varepsilon_2 + \sigma_1\sin v + \sigma_2\cos v + \cdots,$$
$$\lambda = v - \frac{1}{2}\sin v\,(\varepsilon_1\sigma_1 - \varepsilon_2\sigma_2) - \frac{1}{2}\cos v\,(\varepsilon_1\sigma_2 + \varepsilon_2\sigma_1) + \cdots$$

Par suite, la fonction U se présentant naturellement comme dépendante des seules quantités ω_1, ω_2 (λ n'y figure pas en raison de l'hypothèse faite sur la constitution de Jupiter), on a pour calculer les dérivées partielles de U qui figurent dans les équations (4), à des quantités près de l'ordre de $U\sigma$ au moins,

$$\frac{\partial U}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial U}{\partial \omega_1}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} = \frac{\partial U}{\partial \omega_2}.$$

La quantité h est donc une constante Cj, et en confondant ε_1, ε_2 avec ω_1, ω_2 à cause de l'extrême petitesse de σ, on a simplement, à des termes négligeables près,

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{Cj}\frac{\partial U}{\partial \omega_2}, \qquad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{1}{Cj}\frac{\partial U}{\partial \omega_1}.$$

Ces équations sont celles qui définissent le mouvement de Jupiter sur lui-même.

En faisant

$$K = \frac{3}{2}\,\frac{C - A}{C}$$

et

$$V = k \sum \frac{f m_q}{j_q'^3} \sin^2 \beta_q,$$

nous pouvons écrire encore

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \omega_2}, \qquad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \omega_1},$$

dans l'hypothèse déjà indiquée d'une figure ellipsoïdale homogène pour Jupiter, on aurait

$$k = \frac{3}{4} \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 0,0967,$$

nous prendrons, avec M. Sampson, et d'après Laplace, $K = 0,111$, et aussi $j = 874°,2$, avec le jour moyen comme unité de temps.

Pour compléter ces données numériques et celles déjà indiquées, nous transcrirons encore dès maintenant les suivantes

$$m_0 = 1047,35\, m,$$
$$m_1 = 4497 \times 10^{-8} m,$$
$$m_2 = 2536 \times 10^{-8} m,$$
$$m_3 = 7988 \times 10^{-8} m,$$
$$m_4 = 4504 \times 10^{-8} m$$

De plus, les moyens mouvements sidéraux de S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, tels que l'observation les fait connaître, sont, en prenant d'une façon définitive le jour moyen comme unité de temps

$$n_0^0 = 0°,0830912,$$
$$n_1^0 = 203°,488951208,$$
$$n_2^0 = 101°,374723445,$$
$$n_3^0 = 50°,317608063,$$
$$n_4^0 = 21°,571071403$$

Il faut ajouter enfin que le rayon équatorial a de Jupiter valant $18'',927$ à la distance moyenne de Jupiter au Soleil qui correspond au moyen mouvement n_0^0, on a exactement

$$a^3 (n_0^0)^2 = f(m + m_0) \times (18'',927)^3,$$

de sorte que, si l'on fait plutôt

$$n^2 a^3 = fm,$$

on a

$$n = 2919°,56$$

164. Nous appliquerons la méthode générale de la variation des constantes à l'étude du mouvement des satellites S_p. Nous regarderons donc le mouvement de S_p, et aussi celui de S_0, comme un mouvement keplérien dont les éléments seront les suivants, en modifiant quelque peu les notations générales qui nous ont servi antérieurement au Livre III.

Le demi-grand axe de l'orbite sera a_p, et nous lui adjoindrons un moyen mouvement équivalent n_p, qui lui sera lié par la relation

$$n_p^2 a_p^3 = \frac{f(m+m_p)}{1+\gamma_p},$$

γ_p étant une constante très petite, que nous nous réservons de définir, en appelant a_p^0 la longueur constante liée elle-même au moyen mouvement sidéral observé n_p^0 rapporté ci-dessus par la formule

$$(n_p^0)^2 (a_p^0)^3 = n_p^2 a_p^3,$$

nous ferons

$$a_p = a_p^0 e^{\alpha_p},$$

de sorte que

$$n_p = n_p^0 e^{-\frac{3}{2}\alpha_p},$$

e désignant toujours la base des logarithmes hyperboliques.

La longitude moyenne de S_p sera l_p. Appelons N_p l'argument

$$N_p = n_p^0 t + l_p^0,$$

n_p^0 étant le mouvement sidéral observé, l_p^0 étant une constante, nous ferons

$$l_p = N_p + \frac{\sigma_p}{i},$$

en désignant toujours par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$. Nous poserons aussi

$$\lambda_p = e^{il_p} = e^{iN_p+\sigma_p}.$$

La quantité σ_p ne doit contenir aucune partie constante ou simplement proportionnelle au temps.

Si l'excentricité de l'orbite est e_p et la longitude du périjove ϖ_p, on fera

$$\varepsilon_p = \frac{e_p}{2} e^{-i\varpi_p}, \qquad \varepsilon'_p = \frac{e_p}{2} e^{i\varpi_p}.$$

aux excentricités et aux inclinaisons, en tenant compte du fait bien connu que les fonctions V_p, comme V d'ailleurs, ne contiennent que des termes de degré pair par rapport à l'ensemble des inclinaisons, nous aurons

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\alpha_p}{d\tau} &= 4\lambda_p \frac{\partial V_p}{\partial \lambda_p},\\
\frac{d\sigma_p}{d\tau} &= n_p - n_p^0 - \left(2V_p + 4a_p\frac{\partial V_p}{\partial a_p}\right) + \varepsilon_p\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon_p} + \varepsilon'_p\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon'_p} + \gamma_p\frac{\partial V_p}{\partial \gamma_p} + \gamma'_p\frac{\partial V_p}{\partial \gamma'_p},\\
\frac{d\varepsilon_p}{d\tau} &= -(1 - 2\varepsilon_p\varepsilon'_p)\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon'_p} - \varepsilon_p\lambda_p\frac{\partial V_p}{\partial \lambda_p},\\
\frac{d\varepsilon'_p}{d\tau} &= (1 - 2\varepsilon_p\varepsilon'_p)\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon_p} - \varepsilon'_p\lambda_p\frac{\partial V_p}{\partial \lambda_p},\\
\frac{d\gamma_p}{d\tau} &= -\frac{\partial V_p}{\partial \gamma'_p} - \gamma_p\lambda_p\frac{\partial V_p}{\partial \lambda_p} + \gamma_p\varepsilon_p\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon_p} - \gamma_p\varepsilon'_p\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon'_p},\\
\frac{d\gamma'_p}{d\tau} &= \frac{\partial V_p}{\partial \gamma_p} - \gamma'_p\lambda_p\frac{\partial V_p}{\partial \lambda_p} + \gamma'_p\varepsilon_p\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon_p} - \gamma'_p\varepsilon'_p\frac{\partial V_p}{\partial \varepsilon'_p}
\end{aligned}
\right.
$$

Le problème que nous avons à résoudre dépend des 26 équations (1) et (2), dont les seconds membres renferment les fonctions V et V_p définies par les formules (1 *bis*) et (2 *bis*).

Rappelons encore que les coordonnées s'expriment de la façon suivante. On a d'abord

$$
\begin{aligned}
\log r_p = \log a_p &- (\varepsilon_p\lambda_p + \varepsilon'_p\lambda_p^{-1}) - \frac{3}{2}(\varepsilon_p^2\lambda_p^2 + \varepsilon'^2_p\lambda_p^{-2}) + \varepsilon_p\varepsilon'_p\\
&- \frac{17}{6}(\varepsilon_p^3\lambda_p^3 + \varepsilon'^3_p\lambda_p^{-3}) + \frac{3}{2}(\varepsilon_p^2\varepsilon'_p\lambda_p + \varepsilon_p\varepsilon'^2_p\lambda_p^{-1}) + \ldots,
\end{aligned}
$$

puis, si v_p est la longitude dans l'orbite,

$$
\begin{aligned}
i v_p = i l_p &+ 2(\varepsilon_p\lambda_p - \varepsilon'_p\lambda_p^{-1}) + \frac{5}{2}(\varepsilon_p^2\lambda_p^2 - \varepsilon'^2_p\lambda_p^{-2})\\
&+ \frac{13}{3}(\varepsilon_p^3\lambda_p^3 - \varepsilon'^3_p\lambda_p^{-3}) - (\varepsilon_p^2\varepsilon'_p\lambda_p - \varepsilon_p\varepsilon'^2_p\lambda_p^{-1}) + \ldots,
\end{aligned}
$$

enfin, la latitude b_p résulte le plus simplement de la formule

$$
\sin b_p = \sin j_p \sin(v_p - \theta_p),
$$

sans qu'il y ait avantage à la développer analytiquement.

Il faut calculer maintenant les fonctions V et V_p, sans dépasser le troisième degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, si nous devons continuer à négliger les termes de ce degré dans les seconds membres des équations (1) et (2).

Dans ces conditions, il suffit de prendre d'abord

$$\sin \beta_q = \sin b_q - \sin \omega \sin (v_q - \psi),$$

c'est-à-dire

$$i \sin \beta_q = (\gamma_q - \gamma)\, e^{i v_q} - (\gamma'_q - \gamma')\, e^{-i v_q},$$

d'où

$$\sin^2 \beta_q = 2(\gamma - \gamma_q)(\gamma' - \gamma'_q) - (\gamma - \gamma_q)^2 e^{2 i v_q} - (\gamma' - \gamma'_q)^2 e^{-2 i v_q}$$

Par suite, comme on a

$$\left(\frac{a_q}{r_q}\right)^3 = 1 + 3(\varepsilon_q \lambda_q + \varepsilon'_q \lambda_q^{-1}) + \dots,$$

$$\left(\frac{a_q}{r_q}\right)^3 e^{2 i v_q} = \lambda_q^2 (1 + 7 \varepsilon_q \lambda_q - \varepsilon'_q \lambda_q^{-1}) + \dots,$$

il vient

$$V = \sum \frac{K m_q n_q^2 (1 + \nu_q)}{2 J (m + m_q)} \Big[2(\gamma - \gamma_q)(\gamma' - \gamma'_q)(1 + 3 \varepsilon_q \lambda_q + 3 \varepsilon'_q \lambda_q^{-1}) - (\gamma - \gamma_q)^2 (\lambda_q^2 + 7 \varepsilon_q \lambda_q^3 - \varepsilon'_q \lambda_q) - (\gamma' - \gamma'_q)^2 (\lambda_q^{-2} - \varepsilon_q \lambda_q^{-1} + 7 \varepsilon'_q \lambda_q^{-3}) \Big]$$

En nous servant de même des developpements des fonctions $\frac{a_p}{r_p}$, $\left(\frac{a_p}{r_p}\right)^3$, $\left(\frac{a_p}{r_p}\right)^5$, ..., nous avons immediatement pour la première partie de la fonction V_p, soit V_{pp},

$$\begin{aligned}
V_{pp} = \frac{\mu_p n_p}{2} \Big[& 1 + \varepsilon_p \lambda_p + \varepsilon'_p \lambda_p^{-1} + 2(\varepsilon_p^2 \lambda_p^2 + \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-2}) \\
& + \frac{9}{2}(\varepsilon_p^3 \lambda_p^3 + \varepsilon_p'^3 \lambda_p^{-3}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_p^2 \varepsilon'_p \lambda_p + \varepsilon_p \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-1}) \Big] \\
+ \frac{J(1 + \nu_p) n_p a^2}{6 a_p^2} \Big[& 1 + 3(\varepsilon_p \lambda_p + \varepsilon'_p \lambda_p^{-1}) + 9(\varepsilon_p^2 \lambda_p^2 + \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-2}) \\
& + 6 \varepsilon_p \varepsilon'_p + \frac{53}{2}(\varepsilon_p^3 \lambda_p^3 + \varepsilon_p'^3 \lambda_p^{-3}) \\
& + \frac{27}{2}(\varepsilon_p^2 \varepsilon'_p \lambda_p + \varepsilon_p \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-1}) \\
& - 6(\gamma - \gamma_p)(\gamma' - \gamma'_p)(1 + 3 \varepsilon_p \lambda_p + 3 \varepsilon'_p \lambda_p^{-1}) \\
& + 3(\gamma - \gamma_p)^2 (\lambda_p^2 + 7 \varepsilon_p \lambda_p^3 - \varepsilon'_p \lambda_p) \\
& + 3(\gamma' - \gamma'_p)^2 (\lambda_p^{-2} - \varepsilon_p \lambda_p^{-1} + 7 \varepsilon'_p \lambda_p^{-3}) \Big] \\
+ \frac{J'(1 + \nu_p) n_p a^4}{10 a_p^4} \Big[& 1 + 5(\varepsilon_p \lambda_p + \varepsilon'_p \lambda_p^{-1}) + 20(\varepsilon_p^2 \lambda_p^2 + \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-2}) \\
& + 20 \varepsilon_p \varepsilon'_p + \frac{145}{2}(\varepsilon_p^3 \lambda_p^3 + \varepsilon_p'^3 \lambda_p^{-3}) \\
& + \frac{135}{2}(\varepsilon_p^2 \varepsilon'_p \lambda_p + \varepsilon_p \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-1}) \\
& - 20(\gamma - \gamma_p)(\gamma' - \gamma'_p)(1 + 5 \varepsilon_p \lambda_p + 5 \varepsilon'_p \lambda_p^{-1}) \\
& + 10(\gamma - \gamma_p)^2 (\lambda_p^2 + 9 \varepsilon_p \lambda_p^3 + \varepsilon'_p \lambda_p) \\
& + 10(\gamma' - \gamma'_p)^2 (\lambda_p^{-2} + \varepsilon_p \lambda_p^{-1} + 9 \varepsilon'_p \lambda_p^{-3}) \Big],
\end{aligned}$$

il faut observer en outre que l'opération

$$-\left(2 + 4 a_p \frac{\partial}{\partial a_p}\right)$$

équivaut simplement à une multiplication par 4, 12 ou 20, suivant qu'elle est appliquée à la première, la seconde ou la troisième partie de cette expression la première est celle qui contient ν_p en facteur, la seconde celle qui contient J, la troisième celle qui contient J'

Posons maintenant

$$\frac{m_q n_p (1+\nu_p)}{2(m+m_p)} \sqrt{\frac{a_p}{a_q}} = \mu_{pq}$$

et

$$R_{pq} = \frac{\sqrt{a_p a_q}}{r_{pq}} - \frac{(x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q)\sqrt{a_p a_q}}{r_q^3},$$

la fonction V comprend encore la somme des parties $\mu_{pq} R_{pq}$, ou V_{pq}

Les formules du n° 91 vont nous permettre d'écrire le développement de V_{pq} Sans qu'il soit nécessaire de multiplier les indices, puisque la présence du facteur μ_{pq} suffira pour éviter toute ambiguïté, désignons par $b_s^{\frac{1}{2}}$, $b_s^{\frac{3}{2}}$, les coefficients de Laplace qui correspondent à la valeur $\frac{a_p}{a_q}$ ou $\frac{a_q}{a_p}$ de la variable α, suivant que l'on a $a_p < a_q$ ou $a_q < a_p$, et soit ici D la caractéristique de dérivation par rapport à $\log a_p$, de sorte que cette caractéristique équivaut à celle désignée précédemment de la même façon, multipliée par ± 1, suivant que l'on a $a_p < a_q$, ou $a_q < a_p$

Convenons alors, comme au n° 90, afin de tenir compte du second terme de R_{pq}, de diminuer les coefficients $2 D^k b_{\pm 1}^{\frac{1}{2}}$ et $D^k b_0^{\frac{3}{2}}$ de la quantité $\left(\frac{3}{2}\right)^k \left(\frac{a_p}{a_q}\right)^{\frac{3}{2}}$

Dans ces conditions, on a, d'une façon entièrement explicite, quoique partiellement abrégée, en désignant par s un entier quelconque, et

entendant que le symbole D s'applique exclusivement aux b_s^n

$$\ldots_{pq} = \Sigma A_{pq} \lambda_p^s \lambda_q^{-s} b_s^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \Big[1 + \varepsilon_p \lambda_p \left(2s + \frac{1}{2} - D \right)$$

$$+ \varepsilon'_p \lambda_p^{-1} \left(-2s + \frac{1}{2} - D \right)$$

$$+ \varepsilon_q \lambda_q \left(-2s + \frac{1}{2} + D \right)$$

$$+ \varepsilon'_q \lambda_q^{-1} \left(2s + \frac{1}{2} + D \right)$$

$$+ \varepsilon_p^2 \lambda_p^2 \left(+2s^2 + \frac{7}{2} s + \frac{7}{8} - 2sD - 2D + \frac{1}{2} D^2 \right)$$

$$+ \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-2} \left(+ \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad \right)$$

$$+ \varepsilon_q^2 \lambda_q^2 \left(+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad \right)$$

$$+ \varepsilon_q'^2 \lambda_q^{-2} \left(+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad \right)$$

$$+ (\varepsilon_p \varepsilon'_p + \varepsilon_q \varepsilon'_q) \left(-4s^2 - \frac{1}{4} + D^2 \right)$$

$$+ \varepsilon_p \varepsilon_q \lambda_p \lambda_q \left(-4s^2 + \frac{1}{4} + 4sD - D^2 \right)$$

$$+ \varepsilon'_p \varepsilon'_q \lambda_p^{-1} \lambda_q^{-1} \left(-4s^2 + \frac{1}{4} - 4sD - D^2 \right)$$

$$+ \varepsilon_p \varepsilon'_q \lambda_p \lambda_q^{-1} \left(4s^2 + 2s + \frac{1}{4} - D^2 \right)$$

$$+ \varepsilon'_p \varepsilon_q \lambda_p^{-1} \lambda_q \left(4s^2 - 2s + \frac{1}{4} - D^2 \right)$$

$$+ \varepsilon_p^3 \lambda_p^3 \left(+\frac{4}{3} s^3 + 6s^2 + \frac{22}{3} s + \frac{29}{16} - 2s^2 D - \frac{13}{2} sD - \frac{107}{24} D + sD^2 + \frac{7}{4} D^2 - \frac{1}{6} D^3 \right)$$

$$+ \varepsilon_p'^3 \lambda_p^{-3} \left(- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad \ldots \right)$$

$$+ \varepsilon_q^3 \lambda_q^3 \left(- \quad + \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \right)$$

$$+ \varepsilon_q'^3 \lambda_q^{-3} \left(+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \right)$$

$$+ \varepsilon_p^2 \varepsilon'_p \lambda_p \left(-4s^3 - 6s^2 - 2s - \frac{9}{16} + 2s^2 D + \frac{3}{2} sD + \frac{5}{8} D + sD^2 + \frac{5}{4} D^2 \ldots \frac{1}{2} D^3 \right)$$

$$+ \varepsilon_p \varepsilon_p'^2 \lambda_p^{-1} \left(+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad \ldots \right)$$

$$+ \varepsilon_q^2 \varepsilon'_q \lambda_q \left(+ \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \right)$$

$$+ \varepsilon_q \varepsilon_q'^2 \lambda_q^{-1} \left(- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \right)$$

$$+\varepsilon_p^2\varepsilon_q\lambda_p^2\lambda_q\left(-4s^3-6s^2+\frac{7}{16}+6s^2D+\frac{13}{2}sD-\frac{1}{8}D-3sD^2-\frac{7}{4}D^2+\frac{1}{2}D^3\right)$$

$$+\varepsilon_p'^2\varepsilon_q'\lambda_p^{-2}\lambda_q^{-1}\quad(+\;-\;+\;+\;-\;-\;+\;-\;+)$$

$$+\varepsilon_p\varepsilon_q^2\lambda_p\lambda_q^2\quad(+\;-\;+\;-\;+\;+\;+\;-\;-)$$

$$+\varepsilon_p'\varepsilon_q'^2\lambda_p^{-1}\lambda_q^{-2}\quad(-\;-\;+\;-\;-\;+\;-\;-\;-)$$

$$+\varepsilon_p^2\varepsilon_q'\lambda_p^2\lambda_q^{-1}\left(+4s^3+8s^2+\frac{7}{2}s+\frac{7}{16}-2s^2D-\frac{3}{2}sD-\frac{1}{8}D-sD^2-\frac{7}{4}D^2+\frac{1}{2}D^3\right)$$

$$+\varepsilon_p'^2\varepsilon_q\lambda_p^{-2}\lambda_q\quad(-\;+\;-\;+\;-\;-\;-\;+\;-\;+)$$

$$+\varepsilon_p'\varepsilon_q^2\lambda_p^{-1}\lambda_q^2\quad(-\;+\;+\;+\;+\;+\;-\;-)$$

$$+\varepsilon_p\varepsilon_q'^2\lambda_p\lambda_q^{-2}\quad(+\;+\;+\;+\;+\;+\;+\;-\;-\;-)$$

$$+\varepsilon_p\varepsilon_p'\varepsilon_q\lambda_q\left(+8s^3-2s^2+\frac{1}{2}s-\frac{1}{8}-4s^2D-\frac{1}{4}D-2sD^2+\frac{1}{2}D^2+D^3\right)$$

$$+\varepsilon_p\varepsilon_p'\varepsilon_q'\lambda_q^{-1}\quad(-\;-\;-\;-\;-\;-\;+\;+\;+)$$

$$+\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_q'\lambda_p\quad(-\;-\;-\;-\;+\;+\;+\;-)$$

$$+\varepsilon_p'\varepsilon_q\varepsilon_q'\lambda_p^{-1}\quad(+\;-\;+\;-\;+\;-\;+\;-)\quad\Bigg]$$

$$+\sum\frac{1}{2}\mu_{pq}\lambda_p^s\lambda_q^s b_{s+1}^{\frac{3}{2}}(2\gamma_p\gamma_q'-\gamma_p\gamma_p'-\gamma_q\gamma_q')$$

$$\times\Big[1+\varepsilon_p\lambda_p\left(2s+\frac{1}{2}-D\right)+\varepsilon_p'\lambda_p^{-1}\left(-2s+\frac{1}{2}-D\right)$$
$$+\varepsilon_q\lambda_q\left(-2s+\frac{1}{2}+D\right)+\varepsilon_q'\lambda_q^{-1}\left(2s+\frac{1}{2}+D\right)\Big]$$

$$+\sum\frac{1}{2}\mu_{pq}\lambda_p^s\lambda_q^s b_{s+1}^{\frac{3}{2}}(2\gamma_p'\gamma_q-\gamma_p\gamma_p'-\gamma_q\gamma_q')$$

$$\times\Big[1+\varepsilon_p\lambda_p\left(2s+\frac{1}{2}-D\right)+\varepsilon_p'\lambda_p^{-1}\left(-2s+\frac{1}{2}-D\right)$$
$$+\varepsilon_q\lambda_q\left(-2s+\frac{1}{2}+D\right)+\varepsilon_q'\lambda_q^{-1}\left(2s+\frac{1}{2}+D\right)\Big]$$

$$+\sum\frac{1}{2}\mu_{pq}\lambda_p^{s+1}\lambda_q^{s+1}b_s^{\frac{3}{2}}(\gamma_p-\gamma_q)^2$$

$$\times\Big[1+\varepsilon_p\lambda_p\left(2s+\frac{5}{2}-D\right)+\varepsilon_p'\lambda_p^{-1}\left(-2s-\frac{3}{2}-D\right)$$
$$+\varepsilon_q\lambda_q\left(-2s+\frac{5}{2}+D\right)+\varepsilon_q'\lambda_q^{-1}\left(2s-\frac{3}{2}+D\right)\Big]$$

$$+\sum\frac{1}{2}\mu_{pq}\lambda_p^{s-1}\lambda_q^{s-1}b_s^{\frac{3}{2}}(\gamma_p'-\gamma_q')^2$$

$$\times\Big[1+\varepsilon_p\lambda_p\left(2s-\frac{3}{2}-D\right)+\varepsilon_p'\lambda_p^{-1}\left(-2s+\frac{5}{2}-D\right)$$
$$+\varepsilon_q\lambda_q\left(-2s-\frac{3}{2}+D\right)+\varepsilon_q'\lambda_q^{-1}\left(2s+\frac{5}{2}+D\right)\Big]$$

L'opération

$$-\left(2+4\alpha_p \frac{\partial}{\partial \alpha_p}\right),$$

appliquée a la fonction V_{pq}, equivaut d'ailleurs évidemment à l'opération

$$2-4D,$$

d'apres la façon dont μ_{pq} depend des α_p

Dans les formules precedentes, les variables ε_p, γ_p, , qui sont de petites quantites, sont en evidence mais il n'en est pas de même des σ_p, α_p Il est aisé de faire apparaître les σ_p, puisqu'on a

$$\begin{aligned}\lambda_p &= e^{iN_p+\sigma_p} \\ &= e^{iN_p}\left(1+\sigma_p+\frac{\sigma_p^2}{2}+\quad\right)\end{aligned}$$

Relativement aux α_p, on observera les règles évidentes suivantes les coefficients des seconds membres des équations (1) et (2) étant supposes calcules avee les valeurs α_p^0, n_p^0 attribuees a α_p, n_p, on aura leurs vraies valeurs en les multipliant par les facteurs suivants, d'apres le cas pour la partie de V qui contient m_q, le facteur sera $e^{-3\alpha_q}$, pour les trois parties successives de V_{pp}, les facteurs seront respectivement

$$e^{-\frac{3}{2}\alpha_p}, \qquad e^{-\frac{7}{2}\alpha_p}, \qquad e^{-\frac{11}{2}\alpha_p},$$

enfin, pour V_{pq}, le facteur sera

$$e^{-\alpha_p(1-D)-\alpha_q\left(\frac{1}{2}+D\right)}$$

165 Recrivons maintenant les equations du probleme d'une façon plus explicite, en laissant de côte celles qui correspondent à ε'_p, γ'_p, γ', puisque ces quantités sont respectivement conjuguées de ε_p, γ_p, γ, et en negligeant tous les termes qui depassent le second degre par rapport aux excentricités et inclinaisons

Nous partagerons les seconds membres en plusieurs parties En premier lieu, nous ecrirons leurs parties séculaires, c'est-a-dire independantes des λ_q En se souvenant des relations

$$\left(D^2-\frac{1}{4}\right)b_0^{\frac{1}{2}}=b_1^{\frac{3}{2}}, \qquad \left(D^2-\frac{9}{4}\right)b_1^{\frac{1}{2}}=b_2^{\frac{3}{2}},$$

la partie seculaire de V_p est

$$\begin{aligned}
&\frac{x_p n_p}{2} + \frac{J(1+x_p)\,n_p a^2}{6 a_p^2}\left[1 + 6\varepsilon_p\varepsilon'_p - 6(\gamma_p-\gamma)(\gamma'_p-\gamma')\right] \\
&\quad + \frac{J'(1+x_p)\,n_p a^4}{10 a_p^4}\left[1 + 20\varepsilon_p\varepsilon'_p - 20(\gamma_p-\gamma)(\gamma'_p-\gamma')\right] \\
&\quad + \Sigma\,\mu_{pq} b_0^{\frac{1}{2}} + \Sigma\,\mu_{pq} b_1^{\frac{3}{2}}\left[\varepsilon_p\varepsilon'_p + \varepsilon_q\varepsilon'_q - (\gamma_p-\gamma_q)(\gamma'_p-\gamma'_q)\right] \\
&\qquad\qquad - \Sigma\,\mu_{pq} b_2^{\frac{3}{2}}(\varepsilon_p\varepsilon'_q + \varepsilon'_p\varepsilon_q),
\end{aligned}$$

et celle de V est

$$\sum \frac{K m_q n_q^2(1+x_q)}{J(m+m_q)}(\gamma-\gamma_q)(\gamma'-\gamma'_q)$$

Posons alors

$$\begin{aligned}
A_p &= 2x_p n_p + \frac{2J(1+x_p)\,n_p a^2}{a_p^2} + \frac{2J'(1+x_p)\,n_p a^4}{a_p^4} + \Sigma\,\mu_{pq}(2-4D)\,b_0^{\frac{1}{2}}, \\
B_{pq} &= \mu_{pq} b_2^{\frac{3}{2}}, \qquad B'_{pq} = \mu_{pq} b_1^{\frac{3}{2}}, \\
B'_p &= \frac{J(1+x_p)\,n_p a^2}{a_p^2} + \frac{2J'(1+x_p)\,n_p a^4}{a_p^4}, \\
B_p &= B'_p + \Sigma\,B'_{pq}, \\
\Delta B'_p &= \frac{12J(1+x_p)\,n_p a^2}{a_p^2} + \frac{40J'(1+x_p)\,n_p a^4}{a_p^4}, \\
\Delta B_p &= \Delta B'_p + \Sigma(2-4D)\,B'_{pq}, \\
K_q &= \frac{K m_q n_q^2(1+x_q)}{J(m+m_q)}, \qquad K' = \Sigma\,K_q,
\end{aligned}$$

on entend ici par DB'_{pq} la quantité $\mu_{pq} D b_1^{\frac{3}{2}}$, et il en sera de même dans les cas analogues

Dans ces conditions, on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha_p}{d\tau} &= 0, \\
\frac{d\sigma_p}{d\tau} &= -\frac{3}{2} n_p^0\alpha_p + \frac{9}{8} n_p^0\alpha_p^2 + \cdots + A_p + (2B_p + \Delta B_p)(\varepsilon_p\varepsilon'_p - \gamma_p\gamma'_p) \\
&\quad - \Sigma(3-4D)B_{pq}(\varepsilon_p\varepsilon'_q + \varepsilon'_p\varepsilon_q) + \Sigma(3-4D)B'_{pq}(\gamma_p\gamma'_q + \gamma'_p\gamma_q) \\
&\quad + \Sigma(2-4D)B'_{pq}(\varepsilon_q\varepsilon'_q - \gamma_q\gamma'_q) \\
&\quad + (B'_p + \Delta B'_p)(\gamma_p\gamma' + \gamma'_p\gamma) - \Delta B'_p\,\gamma\gamma' + \cdots, \\
\frac{d\varepsilon_p}{d\tau} &= -B_p\varepsilon_p + \Sigma\,B_{pq}\varepsilon_q + \cdots, \\
\frac{d\gamma_p}{d\tau} &= B_p\gamma_p - \Sigma\,B'_{pq}\gamma_q - B'_p\gamma + \cdots, \\
\frac{d\gamma}{d\tau} &= K'\gamma - \Sigma\,K_q\gamma_q + \cdots
\end{aligned}\right.$$

En second lieu, nous allons écrire dans les seconds membres des équations (1) et (2) les termes qui dépendent uniquement des combinaisons $\lambda_1\lambda_2^{-2}$, $\lambda_2\lambda_3^{-2}$, ainsi que de leurs puissances positives ou négatives et de leurs produits.

En prenant les termes de cette nature, on a

$$\begin{aligned} V_{12} = {} & \lambda_1^{-1}\lambda_2^2 \Big[C_{12}\varepsilon_1 + C'_{12}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}H_{12}\varepsilon_1^2\varepsilon'_1 + \frac{1}{2}H'_{12}\varepsilon_2^2\varepsilon'_2 \\ & + \frac{1}{2}I_{12}\varepsilon_1^2\varepsilon'_2 + \frac{1}{2}I'_{12}\varepsilon_2^2\varepsilon'_1 + J_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon'_1 + J'_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon'_2 \\ & + \frac{1}{2}N_{12}\varepsilon'_1(\gamma_1-\gamma_2)^2 + \frac{1}{2}N'_{12}\varepsilon'_2(\gamma_1-\gamma_2)^2 \\ & + P_{12}\varepsilon_1(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma'_1-\gamma'_2) + P'_{12}\varepsilon_2(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma'_1-\gamma'_2) \\ & + Q_{12}\varepsilon_1(\gamma_1\gamma'_2-\gamma_2\gamma'_1) + Q'_{12}\varepsilon_2(\gamma_2\gamma'_1-\gamma_1\gamma'_2) \Big] \\ & + \lambda_1^{-2}\lambda_2^4 \Big[\frac{1}{2}D_{12}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}D'_{12}\varepsilon_2^2 + E_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}B''_{12}(\gamma_1-\gamma_2)^2 \Big] \\ & + \lambda_1^{-3}\lambda_2^6 \Big[\frac{1}{6}F_{12}\varepsilon_1^3 + \frac{1}{6}F'_{12}\varepsilon_2^3 + \frac{1}{2}G_{12}\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}G'_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2^2 \\ & + \frac{1}{2}M_{12}\varepsilon_1(\gamma_1-\gamma_2)^2 + \frac{1}{2}M'_{12}\varepsilon_2(\gamma_1-\gamma_2)^2 \Big] + \ldots, \end{aligned}$$

les termes manquants étant conjugués de ceux qui sont écrits.

Pour la fonction V_{21}, on aura le même développement, en changeant C_{12}, C'_{12}, … en C_{21}, C'_{21}, … ; pour V_{23} et V_{32}, on aura encore les mêmes développements, en remplaçant partout les indices 1 et 2 par 2 et 3 respectivement.

De la même façon

$$\begin{aligned} V_{13} = {} & \lambda_1^{-1}\lambda_3^4 \Big[\frac{1}{6}K_{13}\varepsilon_1^3 + \frac{1}{6}K'_{13}\varepsilon_3^3 + \frac{1}{2}L_{13}\varepsilon_1^2\varepsilon_3 + \frac{1}{2}L'_{13}\varepsilon_1\varepsilon_3^2 \\ & + \frac{1}{2}R_{13}\varepsilon_1(\gamma_1-\gamma_3)^2 + \frac{1}{2}R'_{13}\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_3)^2 \Big] + \ldots, \end{aligned}$$

et pour V_{31} on a le même développement en changeant K_{13}, K'_{13}, … en K_{31}, K'_{31}, …

Les differents coefficients de ces formules ont pour valeurs

$$C_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{7}{2} - D\right)b_{2}^{\frac{1}{2}}, \qquad C'_{12} = \mu_{12}\left(\frac{5}{2} + D\right)b_{1}^{\frac{1}{2}},$$

$$D_{12} = \mu_{12}\left(\frac{151}{4} + 12D + D^2\right)b_{4}^{\frac{1}{2}}, \qquad D'_{12} = \mu_{12}\left(\frac{127}{4} + 12D + D^2\right)b_{2}^{\frac{1}{2}},$$

$$E_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{143}{4} - 12D - D^2\right)b_{3}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{5481}{8} - \frac{899}{4}D - \frac{51}{2}D^2 - D^3\right)b_{6}^{\frac{1}{2}}, \qquad F'_{12} = \mu_{12}\left(\frac{5463}{8} + \frac{1007}{4}D + \frac{57}{2}D^2 + D^3\right)$$

$$G_{12} = \mu_{12}\left(\frac{5607}{8} + \frac{939}{4}D + \frac{53}{2}D^2 + D^3\right)b_{5}^{\frac{1}{2}}, \qquad G'_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{5625}{8} - \frac{975}{4}D - \frac{55}{2}D^2 - D^3\right)$$

$$H_{12} = \mu_{12}\left(\frac{183}{8} + \frac{45}{4}D - \frac{3}{2}D^2 - D^3\right)b_{2}^{\frac{1}{2}}, \qquad H'_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{201}{8} - \frac{33}{4}D + \frac{9}{2}D^2 + D^3\right)$$

$$I_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{737}{8} - \frac{109}{4}D + \frac{5}{2}D^2 + D^3\right)b_{3}^{\frac{1}{2}}, \qquad I'_{12} = \mu_{12}\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{4}D - \frac{7}{2}D^2 - D^3\right)$$

$$J_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{85}{8} - \frac{17}{4}D + \frac{5}{2}D^2 + D^3\right)b_{1}^{\frac{1}{2}}, \qquad J'_{12} = \mu_{12}\left(\frac{155}{8} + \frac{65}{4}D - \frac{7}{2}D^2 - D^3\right)$$

$$K_{13} = \mu_{13}\left(-\frac{809}{8} - \frac{251}{4}D - \frac{27}{2}D^2 - D^3\right)b_{4}^{\frac{1}{2}}, \qquad K'_{13} = \mu_{13}\left(\frac{791}{8} + \frac{311}{4}D + \frac{33}{2}D^2 + D^3\right)$$

$$L_{13} = \mu_{13}\left(\frac{871}{8} + \frac{275}{4}D + \frac{29}{2}D^2 + D^3\right)b_{3}^{\frac{1}{2}}, \qquad L'_{13} = \mu_{13}\left(-\frac{889}{8} - \frac{295}{4}D - \frac{31}{2}D^2 - D^3\right)$$

$$B''_{12} = \mu_{12}b_{1}^{\frac{3}{2}},$$

$$M_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{15}{2} - D\right)b_{5}^{\frac{3}{2}}, \qquad M'_{12} = \mu_{12}\left(\frac{21}{2} + D\right)b_{4}^{\frac{3}{2}},$$

$$N_{12} = \mu_{12}\left(\frac{1}{2} - D\right)b_{1}^{\frac{3}{2}}, \qquad N'_{12} = \mu_{12}\left(-\frac{11}{2} + D\right)b_{2}^{\frac{3}{2}},$$

$$P_{12} = \frac{1}{2}\mu_{12}\left(\frac{7}{2} + D\right)\left(b_{1}^{\frac{3}{2}} + b_{3}^{\frac{3}{2}}\right), \qquad P'_{12} = \frac{1}{2}\mu_{12}\left(-\frac{5}{2} - D\right)\left(b_{2}^{\frac{3}{2}} + b_{0}^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$Q_{12} = \frac{1}{2}\mu_{12}\left(\frac{7}{2} + D\right)\left(b_{1}^{\frac{3}{2}} - b_{3}^{\frac{3}{2}}\right), \qquad Q'_{12} = \frac{1}{2}\mu_{12}\left(-\frac{5}{2} - D\right)\left(b_{2}^{\frac{3}{2}} - b_{0}^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$R_{13} = \mu_{13}\left(-\frac{7}{2} - D\right)b_{3}^{\frac{3}{2}}, \qquad R'_{13} = \mu_{13}\left(\frac{13}{2} + D\right)b_{2}^{\frac{3}{2}}$$

Les C_{23}, C'_{23}, se deduisent des C_{12}, C'_{12}, par le simple chan-

gement de μ_{12} en μ_{23}, de même les coefficients C_{21}, C'_{21}, ... ou C_{32}, C'_{32}, ... se déduisent des C_{12}, C'_{12}, ... ou C_{23}, C'_{23}, ... par le changement de μ_{12} ou μ_{23} en μ_{21} ou μ_{32}, et en outre de D en $-$D, enfin les K_{31}, K'_{31}, ... se déduisent des K_{13}, K'_{13}, ... par le changement de μ_{13} en μ_{31}, et D en $-$D. Ceci résulte clairement des propriétés du développement de V_{pq}, et en réalité, on a généralement les relations telles que

$$\frac{C_{pq}}{\mu_{pq}} = \frac{C_{qp}}{\mu_{qp}},$$

(sauf pour les coefficients qui dépendent de $b_1^{\frac{1}{2}}$ ou $b_0^{\frac{3}{2}}$), puisque les fonctions V_{pq} et V_{qp} ne diffèrent que par les facteurs μ_{pq} et μ_{qp} (sauf pour les termes exceptionnels que nous venons de dire).

En revenant maintenant aux équations (3), on voit qu'on devra les compléter de la façon suivante

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_1}{d\tau} = +U_{12}, && \frac{d\alpha_2}{d\tau} = +U_{21}+U_{23}, && \frac{d\alpha_3}{d\tau} = +U_{32},\\
&\frac{d\sigma_1}{d\tau} = +X_{12}, && \frac{d\sigma_2}{d\tau} = +X_{21}+X_{23}, && \frac{d\sigma_3}{d\tau} = +X_{32},\\
&\frac{d\varepsilon_1}{d\tau} = +Y_{12}+Y_{13}, && \frac{d\varepsilon_2}{d\tau} = +Y_{21}+Y_{23}, && \frac{d\varepsilon_3}{d\tau} = +Y_{32}+Y_{31},\\
&\frac{d\gamma_1}{d\tau} = +Z_{12}+Z_{13}, && \frac{d\gamma_2}{d\tau} = +Z_{21}+Z_{23}, && \frac{d\gamma_3}{d\tau} = +Z_{32}+Z_{31},
\end{aligned}\right.$$

en faisant

$$\begin{aligned}
U_{12} = &-4\lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}(C_{12}\varepsilon_1 + C'_{12}\varepsilon_2) + 4\lambda_1\lambda_2^{-2}(C_{12}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2)\\
&-4\lambda_1^{-2}\lambda_2^{4}[D_{12}\varepsilon_1^2 + 2E_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + D'_{12}\varepsilon_2^2 + B''_{12}(\gamma_1-\gamma_2)^2]\\
&+4\lambda_1^{2}\lambda_2^{-4}[D_{12}\varepsilon_1'^2 + 2E_{12}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + D'_{12}\varepsilon_2'^2 + B''_{12}(\gamma'_1-\gamma'_2)^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{21} = &8\lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}(C_{21}\varepsilon_1 + C'_{21}\varepsilon_2) - 8\lambda_1\lambda_2^{-2}(C_{21}\varepsilon'_1 + C'_{21}\varepsilon'_2)\\
&+8\lambda_1^{-2}\lambda_2^{4}[D_{21}\varepsilon_1^2 + 2E_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + D'_{21}\varepsilon_2^2 + B''_{21}(\gamma_1-\gamma_2)^2]\\
&-8\lambda_1^{2}\lambda_2^{-4}[D_{21}\varepsilon_1'^2 + 2E_{21}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + D'_{21}\varepsilon_2'^2 + B''_{21}(\gamma'_1-\gamma'_2)^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{12} = &\lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}[(3-4D)C_{12}\varepsilon_1 + (2-4D)C'_{12}\varepsilon_2]\\
&+\lambda_1\lambda_2^{-2}[(3-4D)C_{12}\varepsilon'_1 + (2-4D)C'_{12}\varepsilon'_2]\\
&+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{4}[(2-2D)D_{12}\varepsilon_1^2 + (3-4D)E_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + (1-2D)D'_{12}\varepsilon_2^2\\
&\qquad + (2-2D)B''_{12}\gamma_1^2 - (3-4D)B''_{12}\gamma_1\gamma_2 + (1-2D)B''_{12}\gamma_2^2]\\
&+\lambda_1^{2}\lambda_2^{-4}[(2-2D)D_{12}\varepsilon_1'^2 + (3-4D)E_{12}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + (1-2D)D'_{12}\varepsilon_2'^2\\
&\qquad + (2-2D)B''_{12}\gamma_1'^2 - (3-4D)B''_{12}\gamma'_1\gamma'_2 + (1-2D)B''_{12}\gamma_2'^2],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_{21} = \quad & \lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}\left[\ (2 - \tfrac{1}{2}D)C_{21}\varepsilon_1 \ + (3 - \tfrac{1}{2}D)C'_{21}\varepsilon_2\right] \\
+ \ & \lambda_1\lambda_2^{-2}\left[\ (2 - \tfrac{1}{2}D)C_{21}\varepsilon'_1 \ + (3 - \tfrac{1}{2}D)C'_{21}\varepsilon'_2\right] \\
+ \ & \lambda_1^{-2}\lambda_2^{4}\left[\ (1 - 2D)D_{21}\varepsilon_1^2 + (3 - \tfrac{1}{2}D)F_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + (2 - 2D)D'_{21}\varepsilon_2^2 \right. \\
& \left. \qquad + (1 - 2D)B''_{21}\gamma_1^2 - (3 - \tfrac{1}{2}D)B''_{21}\gamma_1\gamma_2 + (2 - 2D)B''_{21}\gamma_2^2\right] \\
+ \ & \lambda_1^{2}\lambda_2^{-4}\left[\ (1 - 2D)D_{21}\varepsilon_1'^2 \ + (3 - \tfrac{1}{2}D)E_{21}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + (2 - 2D)D'_{21}\varepsilon_2'^2 \right. \\
& \left. \qquad + (1 - 2D)B''_{21}\gamma_1'^2 - (3 - \tfrac{1}{2}D)B''_{21}\gamma'_1\gamma'_2 + (2 - 2D)B''_{21}\gamma_2'^2\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{12} = - \ & \lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}\left[\left(\frac{1}{2}H_{12} - C_{12}\right)\varepsilon_1^2 + (J_{12} - C'_{12})\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}I'_{12}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}N_{12}(\gamma_1 - \gamma_2)^2\right] \\
- \ & \lambda_1\lambda_2^{-2}\left[C_{12} + (H_{12} - C_{12})\varepsilon_1\varepsilon'_1 + (J_{12} + C'_{12})\varepsilon_1\varepsilon'_2 + I_{12}\varepsilon_2\varepsilon'_1 + J'_{12}\varepsilon_2\varepsilon'_2 \right. \\
& \left. \qquad + P_{12}(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma'_1 - \gamma'_2) + Q_{12}(\gamma_2\gamma'_1 - \gamma_1\gamma'_2)\right] \\
- \ & \lambda_1^{2}\lambda_2^{-4}\left[D_{12}\varepsilon'_1 + E_{12}\varepsilon'_2\right] \\
- \ & \lambda_1^{3}\lambda_2^{-6}\left[\frac{1}{2}F_{12}\varepsilon_1'^2 + G_{12}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + \frac{1}{2}G'_{12}\varepsilon_2'^2 + \frac{1}{2}M_{12}(\gamma'_1 - \gamma'_2)^2\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{21} = - \ & \lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}\left[\frac{1}{2}I_{21}\varepsilon_1^2 + (J'_{21} + 2C_{21})\varepsilon_1\varepsilon_2 \right. \\
& \left. \qquad + \left(\frac{1}{2}H'_{21} + 2C'_{21}\right)\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}N'_{21}(\gamma_1 - \gamma_2)^2\right] \\
- \ & \lambda_1\lambda_2^{-2}\left[C'_{21} + J_{21}\varepsilon_1\varepsilon'_1 + I'_{21}\varepsilon_1\varepsilon'_2 + (J'_{21} - 2C_{21})\varepsilon_2\varepsilon'_1 \right. \\
& \qquad + (H'_{21} - 4C'_{21})\varepsilon_2\varepsilon'_2 \\
& \left. \qquad\qquad + P'_{21}(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma'_1 - \gamma'_2) + Q'_{21}(\gamma_1\gamma'_2 - \gamma_2\gamma'_1)\right] \\
- \ & \lambda_1^{2}\lambda_2^{-4}\left[E_{21}\varepsilon'_1 + D'_{21}\varepsilon'_2\right] \\
- \ & \lambda_1^{3}\lambda_2^{-6}\left[\frac{1}{2}G_{21}\varepsilon_1'^2 + G'_{21}\varepsilon'_1\varepsilon'_2 + \frac{1}{2}F'_{21}\varepsilon_2'^2 + \frac{1}{2}M'_{21}(\gamma'_1 - \gamma'_2)^2\right],
\end{aligned}
$$

$$
Y_{13} = - \ \lambda_1\lambda_3^{-4}\left[\frac{1}{2}K_{13}\varepsilon_1'^2 + L_{13}\varepsilon'_1\varepsilon'_3 + \frac{1}{2}L'_{13}\varepsilon_3'^2 + \frac{1}{2}R_{13}(\gamma'_1 - \gamma'_3)^2\right],
$$

$$
Y_{31} = - \ \lambda_1\lambda_3^{-4}\left[\frac{1}{2}L_{31}\varepsilon_1'^2 + L'_{31}\varepsilon'_1\varepsilon'_3 + \frac{1}{2}K'_{31}\varepsilon_3'^2 + \frac{1}{2}R'_{31}(\gamma'_1 - \gamma'_3)^2\right],
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{12} = - \ & \lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}\left[(P_{12} - 2C_{12})\varepsilon_1\gamma_1 + (P'_{12} - C'_{12})\varepsilon_2\gamma_1 - (P_{12} + Q_{12})\varepsilon_1\gamma_2 \right. \\
& \left. \qquad - (P'_{12} - Q'_{12})\varepsilon_2\gamma_2\right] \\
- \ & \lambda_1\lambda_2^{-2}\left[N_{12}\varepsilon_1(\gamma'_1 - \gamma'_2) + N'_{12}\varepsilon_2(\gamma'_1 - \gamma'_2) + (P_{12} + 2C_{12})\varepsilon'_1\gamma_1 \right. \\
& \left. \qquad + (P'_{12} + C'_{12})\varepsilon'_2\gamma_1 - (P_{12} - Q_{12})\varepsilon'_1\gamma_2 - (P'_{12} + Q'_{12})\varepsilon'_2\gamma_2\right] \\
- \ & \lambda_1^{2}\lambda_2^{-4}B''_{12}(\gamma'_1 - \gamma'_2) - \lambda_1^{3}\lambda_2^{-6}\left[M_{12}\varepsilon'_1(\gamma'_1 - \gamma'_2) + M'_{12}\varepsilon'_2(\gamma'_1 - \gamma'_2)\right],
\end{aligned}
$$

$$Z_{21} = -\lambda_1^{-1}\lambda_2^{2}[-(P_{21} - Q_{21})\varepsilon_1\gamma_1 - (P'_{21} + Q'_{21})\varepsilon_2\gamma_1 + (P_{21} + 2C_{21})\varepsilon_1\gamma_2 + (P'_{21} + C'_{21})\varepsilon_2\gamma_2]$$

$$- \lambda_1\lambda_2^{-2}[N_{21}\varepsilon_1(\gamma'_2 - \gamma'_1) + N'_{21}\varepsilon_2(\gamma'_2 - \gamma'_1) - (P_{21} + Q_{21})\varepsilon'_1\gamma_1 - (P'_{21} - Q'_{21})\varepsilon'_2\gamma_1 + (P_{21} - 2C_{21})\varepsilon'_1\gamma_2 + (P'_{21} - C'_{21})\varepsilon'_2\gamma_2]$$

$$- \lambda_1^2\lambda_2^{-4}B''_{21}(\gamma'_2 - \gamma'_1) - \lambda_1^3\lambda_2^{-6}[M_{21}\varepsilon'_1(\gamma'_2 - \gamma'_1) + M'_{21}\varepsilon'_2(\gamma'_2 - \gamma'_1)],$$

$$Z_{13} = -\lambda_1\lambda_3^{-1}[R_{13}\varepsilon'_1(\gamma'_1 - \gamma'_3) + R'_{13}\varepsilon'_3(\gamma'_1 - \gamma'_3)],$$

$$Z_{31} = -\lambda_1\lambda_3^{-4}[R_{31}\varepsilon'_1(\gamma'_3 - \gamma'_1) + R'_{31}\varepsilon'_3(\gamma'_3 - \gamma'_1)].$$

quant aux fonctions U_{23}, U_{32}, , elles se déduisent de U_{12}, U_{21}, en remplaçant partout les indices 1 et 2 par 2 et 3, respectivement.

En troisième lieu, nous écrirons encore dans les seconds membres des équations (1) et (2) les termes qui sont indépendants des λ_p ($p = 1, 2, 3, 4$), mais contiennent effectivement λ_0, ou qui, en d'autres termes, ne dépendent que de la longitude moyenne du Soleil.

Il convient alors d'observer qu'en raison de la petitesse des quantités $\frac{a_p}{a_0}$, on peut négliger, dans les coefficients $b_s^{\frac{1}{2}}$, $b_s^{\frac{3}{2}}$, tous les termes de degré supérieur à $\frac{5}{2}$ par rapport à ces quantités, de telle façon que l'on ne doit retenir que les coefficients

$$b_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a_p}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a_p}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}}, \qquad b_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\left(\frac{a_p}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}}, \qquad b_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{a_p}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}},$$

on peut d'ailleurs supprimer le premier terme de $b_0^{\frac{1}{2}}$, car il ne correspond dans la fonction de forces U_p qu'à un terme indépendant des coordonnées de S_p, et au surplus, on vérifie immédiatement que le coefficient $b_0^{\frac{1}{2}}$ ne figure dans les équations (2) que multiplié par $D - \frac{1}{2}$, ce qui fait disparaître son premier terme.

Par suite, modifiant un peu la définition des μ_{p0}, en prenant maintenant

$$\mu_{p0} = \frac{m_0 n_p(1 + \nu_p)}{2(m + m_p)}\left(\frac{a_p}{a_0}\right)^3,$$

nous aurons simplement

$$b_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \qquad b_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}, \qquad b_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2},$$

et l'opération D appliquée à l'un quelconque de ces coefficients sera équivalente à une multiplication par $\frac{5}{2}$.

La partie actuellement utile de V_p se réduit alors à

$$\mu_{p0}\varepsilon_0\lambda_0\left[\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\varepsilon_0\lambda_0 + \frac{9}{2}\varepsilon_p\varepsilon'_p - \frac{9}{2}(\gamma_p - \gamma_0)(\gamma'_p - \gamma'_0)\right]$$
$$+ \mu_{p0}(\lambda_0^2 + 7\varepsilon_0\lambda_0^3 - \varepsilon'_0\lambda_0)\left[\frac{15}{4}\varepsilon_p^2 + \frac{3}{4}(\gamma_p - \gamma_0)^2\right] + \ldots,$$

les termes qui manquent étant les conjugués de ceux qui sont écrits.

De même, pour la fonction V, la partie utile est

$$3K_0\varepsilon_0\lambda_0(\gamma - \gamma_0)(\gamma' - \gamma'_0) - \frac{1}{2}K_0(\lambda_0^2 + 7\varepsilon_0\lambda_0^3 - \varepsilon'_0\lambda_0)(\gamma - \gamma_0)^2 + \ldots$$

Il en résulte que les équations (3) et (4) sont à compléter comme il suit

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_p}{d\tau} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\sigma_p}{d\tau} = -6\mu_{p0}(\varepsilon_0\lambda_0 + \varepsilon'_0\lambda_0^{-1}) - 18\mu_{p0}(\varepsilon_0^2\lambda_0^2 + \varepsilon_0'^2\lambda_0^{-2}) \\ \qquad - \dfrac{45}{2}\mu_{p0}(\varepsilon_p^2\lambda_0^2 + \varepsilon_p'^2\lambda_0^{-2}) \\ \qquad - 6\mu_{p0}(\gamma_0^2\lambda_0^2 + \gamma_0'^2\lambda_0^2) + \dfrac{21}{2}\mu_{p0}(\gamma_p\gamma_0\lambda_0^2 + \gamma'_p\gamma'_0\lambda_0^{-2}) \\ \qquad - \dfrac{9}{2}\mu_{p0}(\gamma_p^2\lambda_0^2 + \gamma_p'^2\lambda_0^{-2}), \\[2ex] \dfrac{d\varepsilon_p}{d\tau} = -\dfrac{9}{2}\mu_{p0}\varepsilon_p(\varepsilon_0\lambda_0 + \varepsilon'_0\lambda_0^{-1}) - \dfrac{15}{2}\mu_{p0}\varepsilon'_p(\lambda_0^{-2} - \varepsilon_0\lambda_0^{-1} + 7\varepsilon'_0\lambda_0^{-3}), \\[2ex] \dfrac{d\gamma_p}{d\tau} = +\dfrac{9}{2}\mu_{p0}(\gamma_p - \gamma_0)(\varepsilon_0\lambda_0 + \varepsilon'_0\lambda_0^{-1}) \\ \qquad - \dfrac{3}{2}\mu_{p0}(\gamma'_p - \gamma'_0)(\lambda_0^{-2} - \varepsilon_0\lambda_0^{-1} + 7\varepsilon'_0\lambda_0^{-3}), \\[2ex] \dfrac{d\gamma}{d\tau} = +3K_0(\gamma - \gamma_0)(\varepsilon_0\lambda_0 + \varepsilon'_0\lambda_0^{-1}) - K_0(\gamma' - \gamma'_0)(\lambda_0^{-2} - \varepsilon_0\lambda_0^{-1} + 7\varepsilon'_0\lambda_0^{-3}) \end{cases}$$

En quatrième et dernier lieu, enfin, il nous reste à écrire les termes généraux des seconds membres des équations (2), qui ne rentrent pas dans les classes que nous venons de distinguer, mais alors nous ne dépasserons pas le premier degré par rapport aux excentricités et inclinaisons. On a ainsi, pour compléter définitivement les équations (3), (4), (5) les nouveaux résultats suivants, d'où l'on devra naturellement exclure, si ce n'est déjà fait, les termes qui figurent dans les équations précédentes

$$
(6)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_p}{d\tau} = {} & A_p(\varepsilon_p \lambda_p - \varepsilon'_p \lambda_{\bar p}^{1}) \\
& + \Sigma\, 4\mu_{pq} s b_s^{\frac12} \lambda_p^{s} \lambda_{\bar q}^{s} \\
& + \Sigma\, 4\mu_{pq}(s+1)\left(2s + \frac{1}{2} - D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon_p \lambda_p^{s+1} \lambda_{\bar q}^{s} \qquad (s \neq 0) \\
& + \Sigma\, 4\mu_{pq}(s-1)\left(-2s + \frac{1}{2} - D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon'_p \lambda_p^{s-1} \lambda_{\bar q}^{s} \qquad (s \neq 0) \\
& + \Sigma\, 4\mu_{pq} s \left(-2s + \frac{1}{2} + D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon_q \lambda_p^{s} \lambda_{\bar q}^{s+1} \\
& + \Sigma\, 4\mu_{pq} s \left(2s + \frac{1}{2} + D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon'_q \lambda_p^{s} \lambda_{\bar q}^{s-1} + \ldots, \\
\frac{dq_p}{d\tau} = {} & + \left(\frac{5}{4} A_p + 4 B_p\right)(\varepsilon_p \lambda_p + \varepsilon'_p \lambda_{\bar p}^{1}) \\
& + \Sigma\, \mu_{pq}(2 - 4D) b_s^{\frac12} \lambda_p^{s} \lambda_{\bar q}^{s} \qquad (s \neq 0) \\
& + \Sigma\, \mu_{pq}(3 - 4D)\left(2s + \frac{1}{2} - D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon_p \lambda_p^{s+1} \lambda_{\bar q}^{s} \qquad (s \neq 0) \\
& + \Sigma\, \mu_{pq}(3 - 4D)\left(-2s + \frac{1}{2} - D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon'_p \lambda_p^{s-1} \lambda_{\bar q}^{s} \qquad (s \neq 0) \\
& + \Sigma\, \mu_{pq}(2 - 4D)\left(-2s + \frac{1}{2} + D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon_q \lambda_p^{s} \lambda_{\bar q}^{s+1} \\
& + \Sigma\, \mu_{pq}(2 - 4D)\left(2s + \frac{1}{2} + D\right) b_s^{\frac12} \varepsilon'_q \lambda_p^{s} \lambda_{\bar q}^{s-1} + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

(6) (suite)

$$\frac{d\varepsilon_p}{d\tau} = -\frac{A_p}{4}\eta_p^{-1} - (A_p + B_p)\varepsilon'_p\eta_p^{-2}$$

$$+ \Sigma\mu_{pq}\left(2s - \frac{1}{2} + D\right)b_s^{\frac{1}{2}}\eta_p^{s-1}\eta_q^{-s} \qquad (s \neq 0)$$

$$+ \Sigma\mu_{pq}\left(4s^2 - s + \frac{1}{4} - D^2\right)b_s^{\frac{1}{2}}\varepsilon_p\eta_p^{s}\eta_q^{-s} \qquad (s \neq 0)$$

$$+ \Sigma\mu_{pq}\left(-4s^2 + 7s - \frac{7}{4} - 4sD + 4D - D^2\right)b_s^{\frac{1}{2}}\varepsilon'_p\eta_p^{s-2}\eta_q^{-s} \qquad (s \neq 0)$$

$$+ \Sigma\mu_{pq}\left(-4s^2 + 2s - \frac{1}{4} + D^2\right)b_s^{\frac{1}{2}}\varepsilon_q\eta_p^{s-1}\eta_q^{-s+1} \qquad (s \neq 1)$$

$$+ \Sigma\mu_{pq}\left(4s^2 - \frac{1}{4} + 4sD + D^2\right)b_s^{\frac{1}{2}}\varepsilon'_q\eta_p^{s-1}\eta_q^{-s-1} + \dots,$$

$$\frac{d\gamma_p}{d\tau} = + (B'_p\gamma' - B_p\gamma'_p)\eta_p^{2}$$

$$+ \Sigma\mu_{pq}\left(\frac{1}{2}b_{s-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}b_{s+1}^{\frac{3}{2}} - s b_s^{\frac{1}{2}}\right)\gamma_p\eta_p^{s}\eta_q^{-s} \qquad (s \neq 0)$$

$$- \Sigma\mu_{pq}b_{s-1}^{\frac{3}{2}}\gamma'_p\eta_p^{s-2}\eta_q^{s} \qquad (s \neq 0)$$

$$- \Sigma\mu_{pq}b_{s+1}^{\frac{3}{2}}\gamma_q\eta_p^{s}\eta_q^{s} \qquad (s \neq 0)$$

$$+ \Sigma\mu_{pq}b_{s-1}^{\frac{3}{2}}\gamma'_q\eta_p^{s-2}\eta_q^{-s} + \dots,$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = + \Sigma K_q(\gamma'_q - \gamma')\eta_q^{2} + \dots$$

Nous avons déjà dit comment, dans les divers termes des équations que nous venons d'écrire, on faisait apparaître les inconnues σ_p et α_p. On vérifiera en particulier que les coefficients A_p, B_p, B'_p étant supposés calculés avec les valeurs a_p^0, n_p^0 attribuées à a_p, n_p, leurs véritables valeurs seront

$$A_p - \left(\frac{3}{2}A_p + 4B_p\right)\sigma_p + \Sigma 4B'_{pq}\alpha_q + \dots,$$

$$B_p - \left(\frac{1}{2}B_p + \frac{1}{4}\Delta B_p\right)\sigma_p - \sum\left(\frac{1}{2} + D\right)B'_{pq}\alpha_q + \dots,$$

$$B'_p - \left(\frac{1}{2}B'_p + \frac{1}{4}\Delta B'_p\right)\alpha_p + \dots,$$

quant aux coefficients généraux $\mu_{pq} b_s^n$, ils sont, dans les mêmes conditions, à multiplier par

$$1 - (1 - D)\alpha_p - \left(\frac{1}{2} + D\right)\alpha_q + \ldots,$$

et les K_q sont de même à multiplier par $1 - 3\alpha_q + \ldots$

166. La partie constante de la dérivée $\frac{d\sigma_p}{d\tau}$ doit être nulle, et cette condition détermine la partie constante de σ_p, pour faire en sorte que cette partie constante soit extrêmement petite, et nous procurer en même temps d'autres avantages que la lecture des équations suffit à mettre en évidence, nous choisirons les indéterminées x_p $(p \gtrless 0)$ de façon que les quantités A_p soient nulles, du moins quand on y remplace les a_p par les a_p^0, et nous prendrons en outre $x_0 = 0$.

Pour résoudre les équations

$$A_p = 0,$$

ou

$$x_p + \frac{J(1 + x_p)a^2}{a_p^3} + \frac{J'(1 + x_p)a^4}{a_p^5} + \sum \frac{m_q(1 + x_p)}{2(m + m_p)} \sqrt{\frac{a_p}{a_q}}(1 - 2D)\, b_0^{\frac{1}{2}} = 0,$$

on peut procéder par approximations successives très convergentes, en prenant d'abord pour les a_p et a_q les valeurs déterminées par les relations telles que

$$(n_p^0)^2 a_p^3 = f(m + m_p),$$

et l'on trouve ainsi

$$x_1 = -0{,}00063062,$$
$$x_2 = -0{,}00030000,$$
$$x_3 = -0{,}00017980,$$
$$x_4 = -0{,}00020730,$$

et par suite, il vient d'une façon définitive

$$a_1^0 = a\,[0{,}7712822],$$
$$a_2^0 = a\,[0{,}9729723],$$
$$a_3^0 = a\,[1{,}1757692],$$
$$a_4^0 = a\,[1{,}4210003],$$
$$a_0^0 = a\,[4{,}0373437]$$

Voici alors les valeurs des différents nombres nécessaires pour former effectivement et intégrer les équations du numéro précédent

On a d'abord en radians

$$n_1^0 = 3,5515522 = [0,550418],$$
$$n_2^0 = 1,7693227 = [0,247007],$$
$$n_3^0 = 0,8782079 = [\bar{1},943597],$$
$$n_4^0 = 0,3764862 = [\bar{1},575749]$$
$$n_0^0 = 0,0014502 = [\bar{3},161432],$$

et l'on doit remarquer la relation suivante, rigoureusement vérifiée par l'observation,

$$n_1^0 - 2n_2^0 = n_2^0 - 2n_3^0 = 0,0129068 = [\bar{2},110820],$$

c'est en raison de la petitesse de cette quantité que nous avons distingué spécialement les termes des équations (4), qui, comme ceux des équations (5), sont à longue période, comparés à ceux des équations (6)

En faisant pour un instant

$$\frac{J(1+\nu_p)n_p a^2}{a_p^2} = I_p, \qquad \frac{J'(1+\nu_p)n_p a^4}{a_p^4} = I'_p,$$

on a ensuite

$$I_1 = [\bar{3},35536], \quad I_2 = [\bar{4},64951], \quad I_3 = [\bar{5},93976] \quad I_4 = [\bar{5},08144],$$
$$I'_1 = [\bar{6},6469], \quad I'_2 = [\bar{7},5376], \quad I'_3 = [\bar{8},4223], \quad I'_4 = [\bar{9},0735],$$

puis

$$K_0 = [\bar{8},18428], \quad K_1 = [\bar{6},61530], \quad K_2 = [\bar{7},76145] \quad K_3 = [\bar{7},65135],$$
$$K_4 = [\bar{8},66682], \quad K' = [\bar{6},71692]$$

On a aussi

$$\mu_{10} = [\bar{7},47101], \quad \mu_{20} = [\bar{7},77362], \quad \mu_{30} = [\bar{6},07784], \quad \mu_{40} = [\bar{6},44568],$$

en prenant simplement comme nous l'avons dit, pour les coefficients b_s^n correspondants,

$$b_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \qquad b_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}, \qquad b_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}, \qquad D = \frac{5}{2}$$

Pour les autres coefficients b_s^n et leurs dérivées, afin d'éviter toute confusion, nous reproduirons, avec plus d'extension d'ailleurs qu'il n'est nécessaire, ceux qui correspondent à chacune des valeurs

des μ_{pq}, au nombre de douze (puisque l'on a ici $q \neq 0$). Nous représenterons ces nombres par leurs logarithmes, et il va sans dire que la dernière décimale n'est pas assurée d'une façon absolue.

$$\mu_{12} = \bar{5},552398,$$

$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},952009$	$D b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},858362$	$D^2 b_0^{\frac{1}{2}} = 0,158466$	$D^3 b_0^{\frac{1}{2}} = 0,796338$
$b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{2},697755$	$D b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},325877$	$D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = 0,005930$	$D^3 b_1^{\frac{1}{2}} = 0,760129$
$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},158268$	$D b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},637395$	$D^2 b_2^{\frac{1}{2}} = 0,187641$	$D^3 b_2^{\frac{1}{2}} = 0,848341$
$b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},882196$	$D b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},489002$	$D^2 b_3^{\frac{1}{2}} = 0,139272$	$D^3 b_3^{\frac{1}{2}} = 0,857730$
$b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},625479$	$D b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{1},329886$	$D^2 b_4^{\frac{1}{2}} = 0,063622$	$D^3 b_4^{\frac{1}{2}} = 0,842538$
$b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{2},380052$	$D b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{1},163687$	$D^2 b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{1},968449$	$D^3 b_5^{\frac{1}{2}} = 0,804931$
$b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{2},142041$	$D b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{2},992445$	$D^2 b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},858793$	$D^3 b_6^{\frac{1}{2}} = 0,748426$

$b_0^{\frac{3}{2}} = 0,000556$	$D b_0^{\frac{3}{2}} = 0,756114$
$b_1^{\frac{3}{2}} = 0,085111$	$D b_1^{\frac{3}{2}} = 0,783630$
$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{1},924995$	$D b_2^{\frac{3}{2}} = 0,722600$
$b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{1},806602$	$D b_3^{\frac{3}{2}} = 0,637544$
$b_4^{\frac{3}{2}} = \bar{1},647486$	$D b_4^{\frac{3}{2}} = 0,535251$
$b_5^{\frac{3}{2}} = \bar{1},481287$	$D b_5^{\frac{3}{2}} = 0,420059$
$b_6^{\frac{3}{2}} = \bar{1},310045$	$D b_6^{\frac{3}{2}} = 0,294884$

$$\mu_{13} = \bar{5},949289,$$

$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},815882$	$D b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},586699$	$D^2 b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},561578$	$D^3 b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},867941$
$b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{3},902465$	$D b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{2},473378$	$D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},060119$	$D^3 b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},671117$
$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{2},593072$	$D b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},016384$	$D^2 b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},460810$	$D^3 b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},941973$
$b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},110962$	$D b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},674248$	$D^2 b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},249360$	$D^3 b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},843373$
$b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{3},649426$	$D b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},318113$	$D^2 b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},994353$	$D^3 b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{1},681901$

$$b_0^{\frac{3}{2}} = \bar{1},052496 \qquad D\,b_0^{\frac{3}{2}} = \bar{1},664174$$
$$b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{1},302731 \qquad D\,b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{1},807047$$
$$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{2},986198 \qquad D\,b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{1},604246$$
$$b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{2},644062 \qquad D\,b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{1},353917$$

$$\mu_{14} = \bar{5},577833,$$

$$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},680713 \qquad D\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},401903 \qquad D^2 b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},201633 \qquad D^3 b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},227818$$
$$b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{3},01285 \qquad D\,b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{3},56502 \qquad D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{2},12179 \qquad D^3 b_1^{\frac{1}{2}} = 2,68579$$
$$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{3},959028 \qquad D\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{2},364508 \qquad D^2 b_2^{\frac{1}{2}} = 2,776103 \qquad D^3 b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},198609$$

$$b_0^{\frac{3}{2}} = \bar{2},11324 \qquad D\,b_0^{\frac{3}{2}} = \bar{2},67749$$
$$b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{2},593766 \qquad D\,b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{1},024897$$
$$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{2},038180 \qquad D\,b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{2},604679$$

$$\mu_{21} = \bar{5},700404,$$

$$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},952009 \qquad D\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},858362- \qquad D^2 b_0^{\frac{1}{2}} = 0,158466 \qquad D^3 b_0^{\frac{1}{2}} = 0,796338-$$
$$b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},847866- \qquad D\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,320288- \qquad D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},834743- \qquad D^3 b_1^{\frac{1}{2}} = 0,999290-$$
$$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},158268 \qquad D\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},637395- \qquad D^2 b_2^{\frac{1}{2}} = 0,187641 \qquad D^3 b_2^{\frac{1}{2}} = 0,848344-$$
$$b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},882196 \qquad D\,b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},489002- \qquad D^2 b_3^{\frac{1}{2}} = 0,139272 \qquad D^3 b_3^{\frac{1}{2}} = 0,857730-$$
$$b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},625479 \qquad D\,b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{1},329886- \qquad D^2 b_4^{\frac{1}{2}} = 0,063622 \qquad D^3 b_4^{\frac{1}{2}} = 0,842538-$$
$$b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{2},380052 \qquad D\,b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{1},163687- \qquad D^2 b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{1},968449 \qquad D^3 b_5^{\frac{1}{2}} = 0,804931-$$
$$b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{2},142041 \qquad D\,b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{2},992445- \qquad D^2 b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{1},828793 \qquad D^3 b_6^{\frac{1}{2}} = 0,748456-$$

$$b_0^{\frac{3}{2}} = \bar{1},705341- \qquad D\,b_0^{\frac{3}{2}} = 0,972932-$$
$$b_1^{\frac{3}{2}} = 0,085111 \qquad D\,b_1^{\frac{3}{2}} = 0,783630-$$
$$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{1},954995 \qquad D\,b_2^{\frac{3}{2}} = 0,722600-$$
$$b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{1},806002 \qquad D\,b_3^{\frac{3}{2}} = 0,637244-$$
$$b_4^{\frac{3}{2}} = \bar{1},647486 \qquad D\,b_4^{\frac{3}{2}} = 0,532251$$
$$b_5^{\frac{3}{2}} = \bar{1},481287 \qquad D\,b_5^{\frac{3}{2}} = 0,420059-$$
$$b_6^{\frac{3}{2}} = \bar{1},310045 \qquad D\,b_6^{\frac{3}{2}} = 0,294884-$$

$$\mu_{23} = \bar{5},747676,$$

$b_0^{\frac12} = \bar{1},951118$ $\quad$ $D\,b_0^{\frac12} = \bar{1},856159$ $\quad$ $D^2 b_0^{\frac12} = 0,153670$ $\quad$ $D^3 b_0^{\frac12} = 0,789125$

$b_1^{\frac12} = \bar{2},693060$ $\quad$ $D\,b_1^{\frac12} = \bar{1},320580$ $\quad$ $D^2 b_1^{\frac12} = \bar{1},999656$ $\quad$ $D^3 b_1^{\frac12} = \bar{1},752377$

$b_2^{\frac12} = \bar{1},154934$ $\quad$ $D\,b_2^{\frac12} = \bar{1},633470$ $\quad$ $D^2 b_2^{\frac12} = 0,182583$ $\quad$ $D^3 b_2^{\frac12} = 0,841455$

$b_3^{\frac12} = \bar{2},877723$ $\quad$ $D\,b_3^{\frac12} = \bar{1},484058$ $\quad$ $D^2 b_3^{\frac12} = 0,133494$ $\quad$ $D^3 b_3^{\frac12} = 0,850570$

$b_4^{\frac12} = \bar{2},619877$ $\quad$ $D\,b_4^{\frac12} = \bar{1},323896$ $\quad$ $D^2 b_4^{\frac12} = 0,056976$ $\quad$ $D^3 b_4^{\frac12} = 0,834833$

$b_5^{\frac12} = \bar{2},373327$ $\quad$ $D\,b_5^{\frac12} = \bar{1},156629$ $\quad$ $D^2 b_5^{\frac12} = \bar{1},960859$ $\quad$ $D^3 b_5^{\frac12} = 0,796502$

$b_6^{\frac12} = \bar{2},134199$ $\quad$ $D\,b_6^{\frac12} = \bar{2},984310$ $\quad$ $D^2 b_6^{\frac12} = \bar{1},850212$ $\quad$ $D^3 b_6^{\frac12} = 0,739192$

$b_0^{\frac32} = \bar{1},994262$ $\quad$ $D\,b_0^{\frac32} = 0,748341$

$b_1^{\frac32} = 0,079592$ $\quad$ $D\,b_1^{\frac32} = 0,776267$

$b_2^{\frac32} = \bar{1},948523$ $\quad$ $D\,b_2^{\frac32} = 0,714627$

$b_3^{\frac32} = \bar{1},799111$ $\quad$ $D\,b_3^{\frac32} = 0,628800$

$b_4^{\frac32} = \bar{1},638949$ $\quad$ $D\,b_4^{\frac32} = 0,525638$

$b_5^{\frac32} = \bar{1},471682$ $\quad$ $D\,b_5^{\frac32} = 0,409515$

$b_6^{\frac32} = \bar{1},299363$ $\quad$ $D\,b_6^{\frac32} = 0,283370$

$$\mu_{24} = \bar{5},376220,$$

$b_0^{\frac12} = \bar{1},790611$ $\quad$ $D\,b_0^{\frac12} = \bar{1},547650$ $\quad$ $D^2 b_0^{\frac12} = \bar{1},478921$ $\quad$ $D^3 b_0^{\frac12} = \bar{1},729186$

$b_1^{\frac12} = \bar{3},741315$ $\quad$ $D\,b_1^{\frac12} = \bar{2},306939$ $\quad$ $D^2 b_1^{\frac12} = \bar{2},885138$ $\quad$ $D^3 b_1^{\frac12} = \bar{1},482769$

$b_2^{\frac12} = \bar{2},478369$ $\quad$ $D\,b_2^{\frac12} = \bar{2},896591$ $\quad$ $D^2 b_2^{\frac12} = \bar{1},331578$ $\quad$ $D^3 b_2^{\frac12} = \bar{2},795969$

$b_0^{\frac32} = \bar{2},877272$ $\quad$ $D\,b_0^{\frac32} = \bar{1},475467$

$b_1^{\frac32} = \bar{1},166964$ $\quad$ $D\,b_1^{\frac32} = \bar{1},601085$

$b_2^{\frac32} = \bar{2},808599$ $\quad$ $D\,b_2^{\frac32} = \bar{1},412142$

$$\mu_{31} = 5,497620$$

$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},815882$	$D\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},586699$—	$D^2 b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},561578$	$D^3 b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},869741$—
$b_1^{\frac{1}{2}} = 0,276455$—	$D\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,511572$—	$D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = 0,618129$—	$D^3 b_1^{\frac{1}{2}} = 0,887014$—
$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{2},593072$	$D\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},016384$—	$D^2 b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},460810$	$D^3 b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},941973$—
$b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},110962$	$D\,b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},674248$—	$D^2 b_3^{\frac{1}{2}} = 1,249360$	$D^3 b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},843373$—
$b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{3},649426$	$D\,b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},318113$—	$D^2 b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},994323$	$D^3 b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{1},681901$—

$b_0^{\frac{3}{2}} = 0,566210$—	$D\,b_0^{\frac{3}{2}} = 0,838683$—
$b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{1},302731$	$D\,b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{1},807047$—
$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{2},986198$	$D\,b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{1},604246$—
$b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{2},644062$	$D\,b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{1},323917$—

$$\mu_{32} = 5,148001,$$

$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},951118$	$D\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},826159$—	$D^2 b_0^{\frac{1}{2}} - 0,153670$	$D^3 b_0^{\frac{1}{2}} = 0,789125$—
$b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},851139$—	$D\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,320656$—	$D^2 b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},850545$—	$D^3 b_1^{\frac{1}{2}} = 0,995266$—
$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},154934$	$D\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},633470$—	$D^2 b_2^{\frac{1}{2}} = 0,182583$	$D^3 b_2^{\frac{1}{2}} = 0,841455$—
$b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},877723$	$D\,b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},484058$—	$D^2 b_3^{\frac{1}{2}} = 0,133494$	$D^3 b_3^{\frac{1}{2}} = 0,850570$—
$b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},619877$	$D\,b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{1},323896$—	$D^2 b_4^{\frac{1}{2}} = 0,056976$	$D^3 b_4^{\frac{1}{2}} = 0,834833$—
$b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{2},373327$	$D\,b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{1},156629$—	$D^2 b_5^{\frac{1}{2}} = \bar{1},960859$	$D^3 b_5^{\frac{1}{2}} = 0,796502$—
$b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{2},134199$	$D\,b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{2},984310$—	$D^2 b_6^{\frac{1}{2}} = \bar{1},850212$	$D^3 b_6^{\frac{1}{2}} = 0,739192$—

$b_0^{\frac{3}{2}} = \bar{1},725412$—	$D\,b_0^{\frac{3}{2}} = 0,971669$—
$b_1^{\frac{3}{2}} = 0,079592$	$D\,b_1^{\frac{3}{2}} = 0,776267$—
$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{1},948523$	$D\,b_2^{\frac{3}{2}} = 0,714627$—
$b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{1},799111$	$D\,b_3^{\frac{3}{2}} = 0,628800$—
$b_4^{\frac{3}{2}} = \bar{1},638949$	$D\,b_4^{\frac{3}{2}} = 0,525638$—
$b_5^{\frac{3}{2}} - \bar{1},471682$	$D\,b_5^{\frac{3}{2}} = 0,409515$—
$b_6^{\frac{3}{2}} = \bar{1},299363$	$D\,b_6^{\frac{3}{2}} = 0,283370$—

$$\mu_{34} = \bar{5},173436,$$

$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},918743$ $\quad D\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},780392$ $\quad D^2\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},987624$ $\quad D^3\,b_0^{\frac{1}{2}} = 0,538104$

$b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{2},517196$ $\quad D\,b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},122516$ $\quad D^2\,b_1^{\frac{1}{2}} = \bar{1},772968$ $\quad D^3\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,477812$

$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},030121$ $\quad D\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},489674$ $\quad D^2\,b_2^{\frac{1}{2}} = 0,002479$ $\quad D^3\,b_2^{\frac{1}{2}} = 0,601606$

$b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{2},709399$ $\quad D\,b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},300727$ $\quad D^2\,b_3^{\frac{1}{2}} = \bar{1},923736$ $\quad D^3\,b_3^{\frac{1}{2}} = 0,596990$

$b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{2},408439$ $\quad D\,b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{1},100068$ $\quad D^2\,b_4^{\frac{1}{2}} = \bar{1},812632$ $\quad D^3\,b_4^{\frac{1}{2}} = 0,557323$

$b_0^{\frac{3}{2}} = \bar{1},766901$ $\quad D\,b_0^{\frac{3}{2}} = 0,472961$

$b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{1},883415$ $\quad D\,b_1^{\frac{3}{2}} = 0,518710$

$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{1},715044$ $\quad D\,b_2^{\frac{3}{2}} = 0,432065$

$b_3^{\frac{3}{2}} = \bar{1},526127$ $\quad D\,b_3^{\frac{3}{2}} = 0,315192$

$b_4^{\frac{3}{2}} = \bar{1},325438$ $\quad D\,b_4^{\frac{3}{2}} = 0,177569$

$$\mu_{41} = \bar{5},222391,$$

$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},680713$ $\quad D\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},401903-$ $\quad D^2\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},201663$ $\quad D^3\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},227818-$

$b_1^{\frac{1}{2}} = 0,668241-$ $\quad D\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,854716-$ $\quad D^2\,b_1^{\frac{1}{2}} = 1,020271-$ $\quad D^3\,b_1^{\frac{1}{2}} = 1,207983-$

$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{3},959028$ $\quad D\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{2},364508-$ $\quad D^2\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{2},776103$ $\quad D^3\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},198609-$

$b_0^{\frac{3}{2}} = 0,969062-$ $\quad D\,b_0^{\frac{3}{2}} = 1,156965-$

$b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{2},593766$ $\quad D\,b_1^{\frac{3}{2}} = \bar{1},024897-$

$b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{2},038180$ $\quad D\,b_2^{\frac{3}{2}} = \bar{2},604679-$

$$\mu_{42} = \bar{6},902772,$$

$b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},790611$ $\quad D\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},547650-$ $\quad D^2\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},478921$ $\quad D^3\,b_0^{\frac{1}{2}} = \bar{1},729186-$

$b_1^{\frac{1}{2}} = 0,349819-$ $\quad D\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,568720-$ $\quad D^2\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,696414-$ $\quad D^3\,b_1^{\frac{1}{2}} = 0,934156-$

$b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{2},478369$ $\quad D\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{2},896291-$ $\quad D^2\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},331578$ $\quad D^3\,b_2^{\frac{1}{2}} = \bar{1},795969-$

$$b^{\frac{3}{2}}_{0} = 0,649259— \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{0} = 0,884633—$$

$$b^{\frac{3}{2}}_{1} = \bar{1},166964 \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{1} = \bar{1},651082—$$

$$b^{\frac{3}{2}}_{2} = \bar{2},808299 \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{2} = \bar{1},412142—$$

$$\mu_{13} = 2,299663,$$

$$b^{\frac{1}{2}}_{0} = \bar{1},918743 \qquad D\,b^{\frac{1}{2}}_{0} = \bar{1},780392— \qquad D^2 b^{\frac{1}{2}}_{0} = \bar{1},987624 \qquad D^3 b^{\frac{1}{2}}_{0} = 0,538104—$$

$$b^{\frac{1}{2}}_{1} = \bar{1},963348— \qquad D\,b^{\frac{1}{2}}_{1} = 0,343312— \qquad D^2 b^{\frac{1}{2}}_{1} = 0,190064— \qquad D^3 b^{\frac{1}{2}}_{1} = 0,884482—$$

$$b^{\frac{1}{2}}_{2} = \bar{1},030121 \qquad D\,b^{\frac{1}{2}}_{2} = \bar{1},489674— \qquad D^2 b^{\frac{1}{2}}_{2} = 0,002179 \qquad D^3 b^{\frac{1}{2}}_{2} = 0,601626—$$

$$b^{\frac{1}{2}}_{3} = \bar{2},709399 \qquad D\,b^{\frac{1}{2}}_{3} = \bar{1},300757— \qquad D^2 b^{\frac{1}{2}}_{3} = \bar{1},923736 \qquad D^3 b^{\frac{1}{2}}_{3} = 0,596990—$$

$$b^{\frac{1}{2}}_{4} = \bar{2},408439 \qquad D\,b^{\frac{1}{2}}_{4} = \bar{1},100068— \qquad D^2 b^{\frac{1}{2}}_{4} = \bar{1},812632 \qquad D^3 b^{\frac{1}{2}}_{4} = 0,227353—$$

$$b^{\frac{3}{2}}_{0} = 0,120337— \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{0} = 0,822077—$$

$$b^{\frac{3}{2}}_{1} = \bar{1},883415 \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{1} = 0,518710—$$

$$b^{\frac{3}{2}}_{2} = \bar{1},715044 \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{2} = 0,432062—$$

$$b^{\frac{3}{2}}_{3} = \bar{1},226127 \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{3} = 0,315192$$

$$b^{\frac{3}{2}}_{4} = \bar{1},325438 \qquad D\,b^{\frac{3}{2}}_{4} = 0,177269—$$

De ces résultats, on conclut enfin

$$B_1 = 0,0023386 = [\bar{3},36892], \qquad B'_1 = [\bar{3},35705],$$
$$B_2 = 0,00057946 = [\bar{4},76302], \qquad B'_2 = [\bar{4},65018],$$
$$B_3 = 0,00012350 = [\bar{4},09166], \qquad B'_3 = [\bar{5},9400],$$
$$B_4 = 0,00003337 = [\bar{5},52336], \qquad B'_4 = [\bar{5},0812],$$

$$B_{12} = [\bar{5},507393], \qquad B_{13} = [\bar{6},935487], \qquad B_{14} = [\bar{7},616013],$$
$$B_{21} = [\bar{5},655399], \qquad B_{23} = [\bar{5},696199], \qquad B_{24} = [\bar{6},184819],$$
$$B_{31} = [\bar{6},483818], \qquad B_{32} = [\bar{5},096524], \qquad B_{34} = [\bar{6},888480],$$
$$B_{41} = [\bar{7},290571], \qquad B_{42} = [\bar{7},711371], \qquad B_{43} = [\bar{5},014707],$$

$$B_{p0} = 0, \qquad B'_{p0} = \frac{3}{2}\mu_{p0},$$

$$B'_{12} = [\bar{5},637509] \quad B'_{13} = [\bar{5},252020], \quad B'_{14} = [\bar{6},171599],$$
$$B'_{21} = [\bar{5},785515], \quad B'_{23} = [\bar{5},827268], \quad B'_{24} = [\bar{6},543184],$$
$$B'_{31} = [\bar{6},800351], \quad B'_{32} = [\bar{5},227593], \quad B'_{34} = [\bar{5},056851],$$
$$B'_{41} = [\bar{7},846157], \quad B'_{42} = [\bar{6},069736], \quad B'_{43} = [\bar{5},183078],$$

$$C_{12} = [\bar{5},524506-], \quad C'_{12} = [\bar{5},079289], \quad C_{21} = [\bar{5},672512-], \quad C'_{21} = [\bar{5},21825\ ],$$
$$C_{23} = [\bar{5},716177-], \quad C'_{23} = [\bar{5},269493], \quad C_{32} = [\bar{5},116502-], \quad C'_{32} = [\bar{6},65035\ ],$$

$$D_{12} = [\bar{4},278008\ ], \quad D'_{12} = [\bar{4},606179], \quad D_{21} = [\bar{4},426014\ ], \quad D'_{21} = [\bar{4},754185],$$
$$D_{23} = [\bar{4},467270\ ], \quad D'_{23} = [\bar{4},797617], \quad D_{32} = [\bar{5},867595\ ], \quad D'_{32} = [\bar{4},107942],$$

$$E_{12} = [\bar{4},444691-], \quad E_{21} = [\bar{4},592697-],$$
$$E_{23} = [\bar{4},635043-], \quad E_{32} = [\bar{4},035368-],$$

sans qu'il soit utile ici d'aller plus loin

CHAPITRE XXIX.

DÉTERMINATION APPROCHÉE DU MOUVEMENT DES SATELLITES DE JUPITER

167. La théorie des satellites de Jupiter est dominée par les faits particuliers suivants, que l'observation suffit à mettre en évidence :

1° Les inconnues ε_p, ε'_p, γ_p, γ'_p, γ, γ' sont toutes fort petites ;

2° Les différences $n_1^0 - 2n_2^0$, $n_2^0 - 2n_3^0$ sont petites par rapport aux moyens mouvements eux-mêmes n_1^0, n_2^0, n_3^0 ;

3° De plus, ces deux différences sont rigoureusement égales, et comme nous l'avons déjà dit, leur valeur commune est

$$d = 0,0129068 = [\bar{2},110820],$$

4° Enfin, on a encore avec la même exactitude l'égalité

$$l_1^0 - 2l_2^0 = l_2^0 - 2l_3^0 + \pi,$$

de sorte que les arguments N_1, N_2, N_3 vérifient constamment la relation

$$N_1 - 2N_2 = N_2 - 2N_3 + \pi,$$

ou

$$N_1 - 3N_2 + 2N_3 = \pi.$$

Dans ces conditions, il est clair que, procédant par approximations successives, et nous inspirant des principes généraux développés au Chapitre XVIII, nous pouvons limiter d'abord le problème à l'intégration du système formé par les équations (3) et (4), en réservant la considération des termes complémentaires fournis par les équations (5) et (6) pour une approximation ultérieure : d'une part en effet, la petitesse de la différence d ne permet pas de se contenter d'une solution des équations (3) comme première approximation, et il faut leur adjoindre les termes des équations (4) qui dépendent des

arguments à longue période $N_1 - 2N_2$, $N_2 - 2N_3$, et, d'autre part, la petitesse des coefficients des termes des équations (5) permet de les laisser d'abord de côté, bien qu'ils dépendent de l'argument à longue période N_0, tout aussi bien que les termes des équations (6) qui ne dépendent que d'arguments à courte période. Il va sans dire que la longueur des périodes est estimée ici par rapport à celles des arguments primordiaux N_p.

Nous supposons de plus que, négligeant les perturbations du mouvement du Soleil, on prenne $\gamma_0 = \gamma'_0 = 0$, d'après la façon dont on a choisi le plan de référence.

La méthode étant ainsi fixée, et le problème réduit d'abord à la considération du système (3), (4), nous remplacerons les variables ε_p, ε'_p, γ_p, γ'_p par

$$\varepsilon_p\left(\quad i\lambda_1^{\frac{1}{2}}\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\lambda_3^{-1}\right),\quad \gamma_p\left(\quad i\lambda_1^{\frac{1}{2}}\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\lambda_3^{-1}\right),$$

$$\varepsilon'_p\left(-i\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_2^{\frac{1}{2}}\lambda_3\quad\right),\quad \gamma'_p\left(-i\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_2^{\frac{1}{2}}\lambda_3\quad\right),$$

ou encore

$$\varepsilon_p e^{i(N_1-2N_2)+\psi},\quad \gamma_p e^{i(N_1-2N_2)+\psi},$$

$$\varepsilon'_p e^{-i(N_1-2N_2)-\psi},\quad \gamma'_p e^{-i(N_1-2N_2)-\psi},$$

en faisant

$$\psi = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2 - 2\sigma_3),$$

on se souviendra d'ailleurs, toutes les fois qu'il sera nécessaire, que l'on a

$$e^{i(N_1-2N_2)} = -e^{i(N_2-2N_3)},$$

d'après les hypothèses faites. La même transformation s'applique aussi à γ et γ'.

En posant encore

$$\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_1 - 3\sigma_2 + 2\sigma_3),$$

on vérifie immédiatement que les équations (3) et (4), où l'on considère les ε_p, ε'_p, γ_p, γ'_p comme ayant leurs nouvelles valeurs, subsistent entièrement aux simples conditions suivantes :

1° Il faut augmenter $\frac{d\varepsilon_p}{d\tau}$, $\frac{d\varepsilon'_p}{d\tau}$, $\frac{d\gamma_p}{d\tau}$, $\frac{d\gamma'_p}{d\tau}$, respectivement des quantités $\left(d + \frac{d\psi}{d\tau}\right)\varepsilon_p$, $-\left(d + \frac{d\psi}{d\tau}\right)\varepsilon'_p$, $\left(d + \frac{d\psi}{d\tau}\right)\gamma_p$, $-\left(d + \frac{d\psi}{d\tau}\right)\gamma'_p$;

2° Il faut remplacer $\lambda_1\lambda_2^{-2}$, $\lambda_2\lambda_3^{-2}$ respectivement par e^{φ}, $-e^{\varphi}$.

En tenant compte des vraies valeurs des coefficients qui dépendent des a_p, les nouvelles équations, aux 26 variables α_p, σ_p, ε_p, ε'_p, γ_p, γ'_p, γ, γ', seront à coefficients purement numériques, et par suite, bien faciles à intégrer par approximations successives, puisque ces variables ne prennent toutes que de petites valeurs.

Il est manifeste tout d'abord que ces équations admettent une première solution, indépendante de toute constante arbitraire nouvelle, dans laquelle les inconnues σ_p, γ_p, γ'_p, γ, γ' sont nulles, tandis que les α_p prennent des valeurs constantes β_p, et que les ε_p, ε'_p prennent de même des valeurs constantes respectivement égales, que nous appellerons η_p.

Si l'on néglige l'effet des constantes extrêmement petites β_p, on a immédiatement les équations suivantes pour déterminer les η_p :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
(d+B_1)\eta_1 = {} & B_{12}\eta_2 + B_{13}\eta_3 + B_{14}\eta_4 - C_{12} - D_{12}\eta_1 - E_{12}\eta_2 \\
& - \tfrac{1}{2}(F_{12} + 3H_{12} - 4C_{12})\eta_1^2 - (G_{12} + I_{12} + 2J_{12})\eta_1\eta_2 \\
& - \tfrac{1}{2}(G'_{12} + I'_{12} + 2J'_{12})\eta_2^2 - \tfrac{1}{2}K_{13}\eta_1^2 - L_{13}\eta_1\eta_3 \\
& - \tfrac{1}{2}L'_{13}\eta_3^2 + \ldots, \\
(d+B_2)\eta_2 = {} & B_{21}\eta_1 + B_{23}\eta_3 + B_{24}\eta_4 - C'_{21} + C_{23} - E_{21}\eta_1 - (D'_{21} + D_{23})\eta_2 \\
& - E_{23}\eta_3 - \tfrac{1}{2}(G_{21} + I_{21} + 2J_{21})\eta_1^2 - (G'_{21} + I'_{21} + 2J'_{21})\eta_1\eta_2 \\
& - \tfrac{1}{2}(F'_{21} + 3H'_{21} - 4C'_{21})\eta_2^2 + \tfrac{1}{2}(F_{23} + 3H_{23} - 4C_{23})\eta_2^2 \\
& + (G_{23} + I_{23} + 2J_{23})\eta_2\eta_3 \\
& + \tfrac{1}{2}(G'_{23} + I'_{23} + 2J'_{23})\eta_3^2 + \ldots, \\
(d+B_3)\eta_3 = {} & B_{31}\eta_1 + B_{32}\eta_2 + B_{34}\eta_4 + C'_{32} - E'_{32}\eta_2 - D'_{32}\eta_3 \\
& + \tfrac{1}{2}(G_{32} + I_{32} + 2J_{32})\eta_2^2 + (G'_{32} + I'_{32} + 2J'_{32})\eta_2\eta_3 \\
& + \tfrac{1}{2}(F'_{32} + 3H'_{32} - 4C'_{32})\eta_3^2 - \tfrac{1}{2}L_{31}\eta_1^2 - L'_{31}\eta_1\eta_3 \\
& - \tfrac{1}{2}K'_{31}\eta_3^2 + \ldots, \\
(d+B_4)\eta_4 = {} & B_{41}\eta_1 + B_{42}\eta_2 + B_{43}\eta_3 + \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Il est aisé de résoudre ces équations par approximations succes-

sives, et la solution purement numérique sera préférable. On trouve ainsi, en négligeant les termes du second degré par rapport aux η_p, avec une approximation suffisante pour le but que nous pouvons atteindre ici,

$$\eta_1 = [\bar{3},317], \qquad \eta_2 = [\bar{3},673 -], \qquad \eta_3 = [\bar{4},472],$$

la valeur de η_4 étant entièrement négligeable.

Il en résulte dans les longitudes v_1, v_2, v_3, respectivement, les grandes inégalités

$$0°,475 \sin(2N_1 - 2N_2), \quad 1°,080 \sin(2N_2 - 2N_3), \quad -0°,068 \sin(N_2 - N_3),$$

mais ces expressions approchées sont légèrement modifiées quand on tient compte de tous les termes qui concourent à la formation des coefficients.

Il convient encore, en vue de la suite, d'écrire les premiers termes du développement analytique de la solution. Considérons la quantité d, et aussi les coefficients B_p, comme de l'ordre $\frac{1}{2}$ par rapport à la force perturbatrice, elle-même de l'ordre des coefficients μ_{pq} : cette façon de voir est sensiblement conforme à la réalité en général, mais est surtout commode pour le langage, en permettant une appréciation sommaire de l'ordre de grandeur des résultats.

Une première approximation, insuffisante, donnerait

$$\eta_1 = -\frac{C_{12}}{d + B_1} = [\bar{3},341], \qquad \eta_2 = \frac{C_{23} - C'_{21}}{d + B_2} = [\bar{3},706 -],$$
$$\eta_3 = \frac{C'_{32}}{d + B_3} = [\bar{4},536],$$

et il serait facile d'aller plus loin.

Mais nous mettrons les valeurs de η_1, η_2, η_3, qui sont d'ordre $\frac{1}{2}$, sous une forme spéciale, non explicite ; posons

$$\begin{aligned}
A_{12} &= C_{12} + 2D_{12}\eta_1 + 2E_{12}\eta_2, & A_{21} &= C_{21} + 2D_{21}\eta_1 + 2E_{21}\eta_2,\\
A'_{12} &= C'_{12} + 2E_{12}\eta_1 + 2D'_{12}\eta_2, & A'_{21} &= C'_{21} + 2E_{21}\eta_1 + 2D'_{21}\eta_2,\\
A_{23} &= C_{23} - 2D_{23}\eta_2 - 2E_{23}\eta_3, & A_{32} &= C_{32} - 2D_{32}\eta_2 - 2E_{32}\eta_3,\\
A'_{23} &= C'_{23} - 2E_{23}\eta_2 - 2D'_{23}\eta_3, & A'_{32} &= C'_{32} - 2E_{32}\eta_2 - 2D'_{32}\eta_3,
\end{aligned}$$

les premières équations (7) peuvent s'écrire, en laissant de côté les

termes d'ordre 2 dans les seconds membres

$$
\begin{aligned}
(d+B_1)\eta_1 &= B_{12}\eta_2 + B_{13}\eta_3 - A_{12} + D_{12}\eta_1 + E_{12}\eta_2,\\
(d+B_2)\eta_2 &= B_{21}\eta_1 + B_{23}\eta_3 - A'_{21} + A_{23} + E_{21}\eta_1 + (D'_{21}+D_{23})\eta_2 + E_{23}\eta_3,\\
(d+B_3)\eta_3 &= B_{31}\eta_1 + B_{32}\eta_2 + A'_{32} + E_{32}\eta_2 + D'_{32}\eta_3,
\end{aligned}
$$

faisons alors d'une façon generale, en designant par T_{pq} l'un quelconque des coefficients $A_{12}, \ldots, E_{32}$,

$$t_{pq} = \frac{T_{pq}}{d+B_p},$$

il vient immediatement

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= -(1+d_{12})a_{12} + (b_{12}+e_{12})(a_{23}-a'_{21}) + b_{13}a'_{32},\\
\eta_2 &= \quad (1+d'_{21}+d_{23})(a_{23}-a'_{21}) - (b_{21}+e_{21})a_{12} + (b_{23}+e_{23})a'_{32},\\
\eta_3 &= \quad (1+d'_{32})a'_{32} + (b_{32}+e_{32})(a_{23}-a'_{21}) - b_{31}a_{12},\\
\eta_4 &= -b_{41}a_{12} + b_{42}(a_{23}-a'_{21}) + b_{43}a'_{32},
\end{aligned}
$$

et l'erreur de ces formules est d'ordre au moins egal a $\frac{3}{2}$.

On vérifiera encore que les valeurs des constantes β_1, β_2, β_3 sont extrêmement petites, comme nous l'avons annoncé, elles sont de l'ordre $\frac{3}{2}$, de sorte que les seconds membres des equations (7) sont exacts jusqu'a l'ordre 2 inclusivement, et que ces equations permettent le calcul des η_p avec une erreur qui n'est elle-même que de l'ordre 2. En se bornant aux valeurs principales, et écrivant simplement n_p au lieu de n_p^0, ainsi que nous le ferons toujours dorenavant, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}n_1\beta_1 &= \quad (3-4D)C_{12}\eta_1 + (2-4D)C'_{12}\eta_2 + \left(B_1 + \frac{1}{2}\Delta B_1\right)\eta_1^2,\\
\frac{3}{4}n_2\beta_2 &= \quad (2-4D)C_{21}\eta_1 + (3-4D)C'_{21}\eta_2 \quad (3-4D)C_{23}\eta_2\\
&\qquad - (2-4D)C'_{23}\eta_3 + \left(B_2 + \frac{1}{2}\Delta B_2\right)\eta_2^2,\\
\frac{3}{4}n_3\beta_3 &= -(2-4D)C_{32}\eta_2 - (3-4D)C'_{32}\eta_3 + \left(B_3 + \frac{1}{2}\Delta B_3\right)\eta_3^2,
\end{aligned}
$$

et l'on peut ajouter la valeur d'ordre 2

$$\frac{3}{4}n_4\beta_4 = \quad (1-2D)B'_{41}\eta_1^2 + (1-2D)B'_{42}\eta_2^2 + (1-2D)B'_{43}\eta_3^2.$$

168. Une fois en possession de la solution particulière que nous venons de déterminer, changeons les quantités ε_p, ε'_p, σ_p en $\eta_p + (\varepsilon_p)$, $\eta_p + (\varepsilon'_p)$, $\beta_p + (\sigma_p)$. Les equations ne contiendront plus aucun terme independant des nouvelles inconnues, qui sont les (σ_p), σ_p,

(ε_p), (ε'_p), γ_p, γ'_p, γ, γ', dans leur ensemble, et si on les réduit à la forme linéaire, elles formeront deux systèmes distincts, que nous allons écrire successivement.

Le premier de ces systèmes sera

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d(\varepsilon_1)}{d\tau} + (d+B_1)(\varepsilon_1) - B_{12}(\varepsilon_2) - B_{13}(\varepsilon_3) - B_{14}(\varepsilon_4) + D_{12}(\varepsilon'_1) \\
&\qquad\qquad + E_{12}(\varepsilon'_2) + A_{12}\varphi + \eta_1\frac{d\psi}{d\tau} + \quad = 0, \\
&\frac{d(\varepsilon_2)}{d\tau} + (d+B_2)(\varepsilon_2) - B_{21}(\varepsilon_1) - B_{23}(\varepsilon_3) - B_{24}(\varepsilon_4) - E_{21}(\varepsilon'_1) \\
&\qquad + (D'_{21}+D_{23})(\varepsilon'_2) + E_{23}(\varepsilon'_3) + (A'_{21}+A_{23})\varphi + \eta_2\frac{d\psi}{d\tau} + \quad = 0, \\
&\frac{d(\varepsilon_3)}{d\tau} + (d+B_3)(\varepsilon_3) - B_{31}(\varepsilon_1) - B_{32}(\varepsilon_2) - B_{34}(\varepsilon_4) + E_{32}(\varepsilon'_2) \\
&\qquad\qquad + D'_{32}(\varepsilon'_3) + A'_{32}\varphi + \eta_3\frac{d\psi}{d\tau} + \quad = 0, \\
&\frac{d(\varepsilon_4)}{d\tau} + (d+B_4)(\varepsilon_4) - B_{41}(\varepsilon_1) - B_{42}(\varepsilon_2) - B_{43}(\varepsilon_3) + \eta_4\frac{d\psi}{d\tau} + \quad = 0, \\
&\frac{d(\alpha_1)}{d\tau} - 4A_{12}[2\eta_1\varphi - (\varepsilon_1) + (\varepsilon'_1)] - 4A'_{12}[2\eta_2\varphi - (\varepsilon_2) + (\varepsilon'_2)] + \quad = 0, \\
&\frac{d(\alpha_2)}{d\tau} + 8A_{21}[2\eta_1\varphi - (\varepsilon_1) + (\varepsilon'_1)] + 8A'_{21}[2\eta_2\varphi - (\varepsilon_2) + (\varepsilon'_2)] \\
&\qquad - 4A_{23}[2\eta_2\varphi + (\varepsilon_2) - (\varepsilon'_2)] - 4A'_{23}[2\eta_3\varphi + (\varepsilon_3) - (\varepsilon'_3)] + \quad = 0, \\
&\frac{d(\alpha_3)}{d\tau} + 8A_{32}[2\eta_2\varphi + (\varepsilon_2) - (\varepsilon'_2)] + 8A'_{32}[2\eta_3\varphi + (\varepsilon_3) - (\varepsilon'_3)] + \quad = 0, \\
&\frac{d(\alpha_4)}{d\tau} = 0 \\
&\frac{d\sigma_1}{d\tau} + \left(\frac{3}{2}n_1 + 4B_1\right)(\alpha_1) - [(2B_1+\Delta B_1)\eta_1 + (3-4D)C_{12}][(\varepsilon_1)+(\varepsilon'_1)] \\
&\qquad\qquad - (2-4D)C'_{12}[(\varepsilon_2)+(\varepsilon'_2)] + \quad = 0, \\
&\frac{d\sigma_2}{d\tau} + \left(\frac{3}{2}n_2 + 4B_2\right)(\alpha_2) \\
&\qquad - [(2B_2+\Delta B_2)\eta_2 + (3-4D)C'_{21} - (3-4D)C_{23}][(\varepsilon_2)+(\varepsilon'_2)] \\
&\qquad - (2-4D)C_{21}[(\varepsilon_1)+(\varepsilon'_1)] + (2-4D)C'_{23}[(\varepsilon_3)+(\varepsilon'_3)] + \quad = 0, \\
&\frac{d\sigma_3}{d\tau} + \left(\frac{3}{2}n_3 + 4B_3\right)(\alpha_3) - [(2B_3+\Delta B_3)\eta_3 - (3-4D)C'_{32}][(\varepsilon_3)+(\varepsilon'_3)] \\
&\qquad\qquad + (2-4D)C_{32}[(\varepsilon_2)+(\varepsilon'_2)] + \quad = 0, \\
&\frac{d\sigma_4}{d\tau} + \left(\frac{3}{2}n_4 + 4B_4\right)(\alpha_4) + \quad = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

mais l'on doit faire à son sujet les quelques observations qui suivent.

Les quatre premières équations doivent être redoublées, en permutant les ε_p avec les ε'_p, en même temps qu'on change le signe de φ, ψ, τ; les quatre équations suivantes ne contiennent aucun terme en (σ_p), et les quatre dernières ne contiennent aucun terme dépendant de la combinaison φ, en dehors de laquelle les σ_p ne figurent pas; les coefficients des dérivées $\frac{d(\varepsilon_1)}{d\tau}$, $\frac{d\psi}{d\tau}$, ... sont tous exacts; on a négligé les coefficients des (σ_p) qui sont d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$, ceux des (ε_p), (ε'_p) qui sont d'ordre supérieur à 1, et ceux de φ qui sont d'ordre supérieur à $\frac{3}{2}$; toutefois, dans les valeurs des $\frac{d(\sigma_p)}{dt}$, on a porté l'approximation plus loin, en prenant les coefficients des (ε_p), (ε'_p) exacts jusqu'à l'ordre $\frac{3}{2}$, et ceux de φ jusqu'à l'ordre 2, inclusivement.

Quant au second système, il ne dépend que des γ_p, γ'_p, γ, γ', et s'écrit

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\gamma_1}{d\tau} + (d - B_1)\gamma_1 + B'_{12}\gamma_2 + B'_{13}\gamma_3 + B'_{14}\gamma_4 + B'_1\gamma \\
&\qquad\qquad + B''_{12}(\gamma'_1 - \gamma'_2) + \ldots = 0, \\
&\frac{d\gamma_2}{d\tau} + (d - B_2)\gamma_2 + B'_{21}\gamma_1 + B''_{23}\gamma_3 + B'_{24}\gamma_4 + B'_2\gamma \\
&\qquad\qquad + B''_{21}(\gamma'_2 - \gamma'_1) + B'_{23}(\gamma'_2 - \gamma'_3) + \ldots = 0, \\
&\frac{d\gamma_3}{d\tau} + (d - B_3)\gamma_3 + B'_{31}\gamma_1 + B'_{32}\gamma_2 + B'_{34}\gamma_4 + B'_3\gamma \\
&\qquad\qquad + B'_{32}(\gamma'_3 - \gamma'_2) + \ldots = 0, \\
&\frac{d\gamma_4}{d\tau} + (d - B_4)\gamma_4 + B'_{41}\gamma_1 + B'_{42}\gamma_2 + B'_{43}\gamma_3 + B'_4\gamma + \ldots = 0, \\
&\frac{d\gamma}{d\tau} + (d - K')\gamma + K_1\gamma_1 + K_2\gamma_2 + K_3\gamma_3 + K_4\gamma_4 + \ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme ci-dessus, ces équations doivent être redoublées, en permutant les lettres γ, γ' et changeant le signe de τ; les coefficients des inconnues sont exacts jusqu'à l'ordre 1, inclusivement.

Étudions en premier lieu le système (8), du seizième ordre, et remarquons que nous en connaissons à l'avance six solutions particulières, dont il n'y a pas lieu de tenir compte; en premier lieu en effet, on peut donner aux σ_p des valeurs constantes arbitraires liées

par la relation $\varphi = 0$, toutes les autres inconnues étant nulles, en second lieu, on peut encore donner aux σ_p des valeurs de la forme $\sigma_p^0 \tau$, les σ_p^0 étant des constantes arbitraires vérifiant la relation $\sigma_1^0 - 3\sigma_2^0 + 2\sigma_3^0 = 0$, et l'on en peut manifestement conclure pour les autres inconnues des valeurs constantes, telles que l'on ait $(\varepsilon_p) = (\varepsilon'_p)$ Mais ces six solutions sont en réalité superflues, les constantes qu'elles introduisent allant se fondre, dans les expressions des coordonnées ou des éléments, avec celles qui définissent les arguments N_p, c'est-à-dire n_p et l_p^0

Pour déterminer les solutions nouvelles des équations (8), nous devons poser, conformément à la théorie générale des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants,

$$(\varepsilon_p) = \xi_p \, e^{-iG}, \qquad (\varepsilon'_p) = \xi'_p \, e^{-iG}, \qquad (\alpha_p) = \omega_p \, e^{-iG}, \qquad \sigma_p = \zeta_p \, e^{-iG},$$

en désignant par ξ_p, ξ'_p, ω_p, ζ_p des coefficients constants, et par G un argument de la forme $gt + G_0$, g et G_0 étant deux autres constantes dont la dernière est arbitraire En portant ces valeurs dans les équations (8), nous aurons seize équations linéaires homogènes entre les seize inconnues ξ_p, ξ'_p, ω_p, ζ_p, et en écrivant qu'elles sont compatibles, nous obtiendrons une équation finale propre à déterminer la dernière inconnue g une fois obtenue la valeur de g, les rapports mutuels des ξ_p, ξ'_p, ω_p, ζ_p en résulteront, et l'une quelconque de ces quantités pourra être choisie arbitrairement

L'équation en g, du seizième degré *a priori*, ne sera en réalité que du dixième degré, d'après ce que nous avons dit des solutions déjà connues, il est clair d'ailleurs qu'elle ne contiendra que les puissances paires de g, car, d'après leur forme même, si les équations (8) admettent la solution que nous venons de définir, elles admettront aussi la solution

$$(\varepsilon_p) = \xi'_p \, e^{iG}, \qquad (\varepsilon'_p) = \xi_p \, e^{iG}, \qquad (\alpha_p) = \omega_p \, e^{iG}, \qquad \sigma_p = -\zeta_p \, e^{iG},$$

c'est-à-dire la solution conjuguée de la première, l'expérience montrant que les valeurs de g, et par suite des coefficients ξ_p, , sont toutes réelles On voit par là comment ces nouvelles solutions introduisent les dix nouvelles constantes arbitraires nécessaires

En raison du grand nombre des inconnues, il ne paraît pas simple de procéder aux calculs que nous venons d'indiquer autrement que par approximations successives, purement numériques de préférence

mais ici, nous ne pouvons qu'amorcer ces approximations, sous forme partiellement analytique.

L'examen le plus superficiel montre que la quantité g est nécessairement petite, supposons-la d'abord d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$, et en fait, comme le montre un premier calcul rapide, d'ordre $\frac{3}{4}$, regardons aussi ζ_1, ζ_2, ζ_3 comme les inconnues principales, c'est-à-dire d'ordre zéro, et posons

$$\zeta = \zeta_1 - 3\zeta_2 + 2\zeta_3, \qquad \zeta' = \zeta_1 - \zeta_2 - 2\zeta_3,$$

en même temps que

$$g_1 = \frac{g}{d + B_1}, \qquad g_2 = \frac{g}{d + B_2}, \qquad g_3 = \frac{g}{d + B_3}.$$

Les inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont d'ordre $\frac{1}{2}$, et avec une erreur d'ordre supérieur à 1, on trouve sans peine

$$2\xi_1 = \eta'_1(1 + g_1 + g_1^2)\zeta + \eta_1 g_1(1 + g_1)\zeta',$$
$$2\xi_2 = \eta'_2(1 + g_2 + g_2^2)\zeta + \eta_2 g_2(1 + g_2)\zeta',$$
$$2\xi_3 = \eta'_3(1 + g_3 + g_3^2)\zeta + \eta_3 g_3(1 + g_3)\zeta',$$

en appelant η'_1, η'_2, η'_3 les expressions précédemment obtenues pour η_1, η_2, η_3, où l'on a changé le signe de a_{23} et a'_{32}, quant aux valeurs de ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, elles se déduisent des précédentes en changeant le signe de ζ, ζ', g. Ceci résulte immédiatement de la comparaison des équations (8) et des équations (7), mises sous la forme spéciale que nous leur avons donnée en dernier lieu.

Si l'on fait encore

$$\eta''_1 = \eta_1 - \eta'_1(1 + g_1^2), \qquad \eta''_2 = \eta_2 - \eta'_2(1 + g_2^2),$$
$$\eta'''_2 = -\eta_2 - \eta'_2(1 + g_2^2), \qquad \eta'''_3 = -\eta_3 - \eta'_3(1 + g_3^2),$$

de sorte que

$$\eta''_1 = 2(b_{12} + e_{12})a_{23} + 2b_{13}a'_{32} - \eta'_1 g_1^2,$$
$$\eta''_2 = 2(1 + d'_{21} + d_{23})a_{23} + 2(b_{23} + e_{21})a'_{32} - \eta'_2 g_2^2,$$
$$\eta'''_2 = 2(1 + d'_{21} + d_{23})a'_{21} + 2(b_{21} + e_{21})a_{12} - \eta'_2 g_2^2,$$
$$\eta'''_3 = 2(b_{31} + e_{32})a'_{21} + 2b_{31}a_{12} - \eta'_3 g_3^2,$$

les dernières équations (8) donneront, avec une erreur d'ordre supé-

rieur à 2

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{g^2\zeta_1}{6n_1+16B_1} + (A_{12}\eta''_1 + A'_{12}\eta''_2)\zeta - (A_{12}\eta_1 g_1^2 + A'_{12}\eta_2 g_2^2)\zeta' = 0 \\[2ex] \dfrac{g^2\zeta_2}{6n_2+16B_2} - (2A_{21}\eta''_1 + 2A'_{21}\eta''_2 + A_{23}\eta'''_2 + A'_{23}\eta'''_3)\zeta \\ \qquad + (2A_{21}\eta_1 g_1^2 + 2A'_{21}\eta_2 g_2^2 + A_{23}\eta_2 g_2^2 + A'_{23}\eta_3 g_3^2)\zeta' = 0, \\[2ex] \dfrac{g^2\zeta_3}{6n_3+16B_3} + (2A_{32}\eta'''_2 + 2A'_{32}\eta'''_3)\zeta - (2A_{32}\eta_2 g_2^2 + A'_{32}\eta_3 g_3^2)\zeta = 0 \end{cases}$$

On peut résoudre ces équations en laissant d'abord de côté les termes qui dépendent de g_1^2, g_2^2, g_3^2, pour en tenir compte ensuite, et l'on trouve

$$g = 0{,}00297, \qquad \zeta_1 = 0{,}134\,\zeta, \qquad \zeta_2 = -0{,}273\,\zeta, \qquad \zeta_3 = 0{,}023\,\zeta,$$

la période de l'argument G est par suite de 2110 jours environ.

Cette solution constitue ce que Laplace a appelé la *libration* des trois premiers satellites ; la constante ζ paraît d'ailleurs insensible, c'est-à-dire que la libration ne donne aucun effet appréciable à l'observation.

Si l'on s'était borné à prendre la partie principale, d'ordre $\frac{3}{2}$, de g^2, on aurait dû négliger complètement les termes en g_1^2, g_2^2, g_3^2 dans les équations précédentes, et faire

$$\eta''_1 = \eta''_3 = 0, \qquad \eta''_2 = 2c_{23}, \qquad \eta'''_2 = 2c'_{21},$$

en même temps que

$$A'_{12} = C'_{12}, \qquad A'_{21} = C'_{21}, \qquad A_{23} = C_{23}, \qquad A_{32} = C_{32},$$

on aurait eu ainsi

$$g^2\zeta_1 = -\frac{12n_1}{d+B_2}C'_{12}C_{23}\zeta,$$

$$g^2\zeta_2 = \frac{36n_2}{d+B_2}C'_{21}C_{23}\zeta,$$

$$g^2\zeta_3 = -\frac{24n_3}{d+B_2}C'_{21}C_{32}\zeta,$$

d'où

$$g^2 = -\frac{12}{d+B_2}(n_1 C'_{12}C_{23} + 9n_2 C'_{21}C_{23} + 4C'_{21}C_{32}),$$

c'est-à-dire

$$g = 0{,}00382, \qquad \zeta_1 = 0{,}133\,\zeta, \qquad \zeta_2 = -0{,}274\,\zeta, \qquad \zeta_3 = 0{,}023\,\zeta,$$

la période de G étant de 1630 jours environ.

C'est l'approximation dont se sont contentes Laplace, et plus recemment M Souillart on voit qu'elle donne pour g une valeur beaucoup trop grande, en conservant a peu pres exactement les rapports des coefficients ζ_1, ζ_2, ζ_3. Cette nouvelle experience confirme que pour obtenir des resultats valables, il est necessaire de porter assez loin les approximations, et de les traiter plutot numeriquement

169 Supposons maintenant la quantite g d'ordre $\frac{1}{\nu}$, et de plus positive, ainsi que nous en avons le droit, et regardons ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 comme les inconnues principales, on voit tout de suite que dans ces conditions, les coefficients ζ_1, ζ_2, ζ_3 seront du même ordre, c'est-a-dire de l'ordre zero, tandis que les autres inconnues ω_1, ω_2, ω_3, ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 seront d'ordre $\frac{1}{\nu}$

Nous ne pouvons ici que montrer comment on pourra diriger les approximations successives, et nous nous limiterons a cet effet à la consideration des seuls termes d'ordre minimum dans les equations (8) ce ne sera, nous le savons, qu'une approximation insuffisante, permettant cependant de se rendre compte de la facon dont se présente la solution, ainsi que des difficultes du problème, et des procedes propres a les surmonter

Avec cette limitation, le systeme (8) se reduit à sept equations, et en faisant

$$g = d + g', \qquad \zeta = \zeta_1 - 3\zeta_2 - 2\zeta_3, \qquad \zeta' = \zeta_1 - \zeta_2 - 2\zeta_3,$$

on peut ecrire

$$(11)\quad \begin{cases} (B_1 - g')\xi_1 - B_{12}\xi_2 - B_{13}\xi_3 - B_{14}\xi_4 + \frac{1}{\nu}A_{12}\zeta + \frac{1}{\nu}g\eta_1\zeta = 0, \\ (B_2 - g')\xi_2 - B_{21}\xi_1 - B_{23}\xi_3 - B_{24}\xi_4 + \frac{1}{\nu}(A'_{21} + A_{23})\zeta + \frac{1}{\nu}g\eta_2\zeta' = 0, \\ (B_3 - g')\xi_3 - B_{31}\xi_1 - B_{32}\xi_2 - B_{34}\xi_4 + \frac{1}{\nu}A'_{32}\zeta + \frac{1}{\nu}g\eta_3\zeta' = 0, \\ (B_4 - g')\xi_4 - B_{41}\xi_1 - B_{42}\xi_2 - B_{43}\xi_3 = 0, \\ g^2\zeta_1 = 6n_1(A_{12}\xi_1 + A'_{12}\xi_2), \\ g^2\zeta_2 = -6n_2(2A_{21}\xi_1 + 2A'_{21}\xi_2 + A_{23}\xi_2 + A_{23}\xi_3), \\ g^2\zeta_3 = 6n_3(2A_{32}\xi_2 + 2A'_{32}\xi_3) \end{cases}$$

Il convient alors d'eliminer ζ_1, ζ_2, ζ_3 pour former quatre équations

la désignation générale γ_p, il faut entendre non seulement γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, mais aussi γ.

Comme précédemment, on obtiendra une équation en h du dixième degré, ne contenant que les puissances paires de h, à chaque valeur positive de h, par exemple, correspondra un système de valeurs des coefficients γ_p, γ'_p dont les rapports mutuels seront déterminés, et nous aurons introduit finalement les dix dernières constantes arbitraires nécessaires pour compléter la solution générale du problème.

La quantité h étant supposée d'ordre $\frac{1}{2}$, et positive, regardons les γ_p comme les inconnues principales, les γ'_p seront de l'ordre $\frac{1}{2}$, et en se bornant comme ci-dessus à la seule considération des termes d'ordre minimum, le système (9) se réduira aux cinq équations suivantes, où l'on a remplacé h par $d+h'$

$$(13)\quad \begin{cases} (h'+B_1)\gamma_1 - B'_{12}\gamma_2 - B'_{13}\gamma_3 - B'_{14}\gamma_4 - B'_1\gamma = 0, \\ (h'+B_2)\gamma_2 - B_{21}\gamma_1 - B'_{23}\gamma_3 - B'_{24}\gamma_4 - B'_2\gamma = 0, \\ (h'+B_3)\gamma_3 - B'_{31}\gamma_1 - B'_{32}\gamma_2 - B'_{34}\gamma_4 - B'_3\gamma = 0, \\ (h'+B_4)\gamma_4 - B'_{41}\gamma_1 - B'_{42}\gamma_2 - B'_{43}\gamma_3 - B'_4\gamma = 0, \\ (h'+K')\gamma - K_1\gamma_1 - K_2\gamma_2 - K_3\gamma_3 - K_4\gamma_4 = 0, \end{cases}$$

les valeurs numériques des coefficients ont été données précédemment.

En résolvant ces équations toujours d'après les mêmes principes, on trouvera les cinq solutions suivantes, où l'on doit regarder γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ successivement comme une constante arbitraire

$$h' = -[\bar{3},370], \qquad \gamma_2 = -[2,533]\gamma_1, \qquad \gamma_3 = -[3,400]\gamma_1,$$
$$\gamma_4 = -[\bar{4},415]\gamma_1, \qquad \gamma = -[3,243]\gamma_1,$$

$$h' = -[\bar{4},764], \qquad \gamma_1 = [\bar{5},362]\gamma_2, \qquad \gamma_3 = -[\bar{5},269]\gamma_2,$$
$$\gamma_4 = -[\bar{3},052]\gamma_2, \qquad \gamma = -[\bar{3},056]\gamma_2,$$

$$h' = -[\bar{4},092], \qquad \gamma_1 = [\bar{3},377]\gamma_3, \qquad \gamma_2 = [\bar{1},123]\gamma_3,$$
$$\gamma_4 = -[\bar{1},231]\gamma_3, \qquad \gamma = -[3,664]\gamma_3$$

$$h' = -[\bar{5},498], \qquad \gamma_1 = -[\bar{3},294]\gamma_4, \qquad \gamma_2 = [\bar{5},256]\gamma_4,$$
$$\gamma_3 = [\bar{1},091]\gamma_4, \qquad \gamma = -[3,298]\gamma_4,$$

$$h' = -[\bar{8},60\ ], \qquad \gamma_1 = \gamma, \qquad \gamma_2 = [\bar{1},998]\gamma,$$
$$\gamma_3 = [\bar{1},988]\gamma, \qquad \gamma_4 = [\bar{1},936]\gamma$$

D'après les résultats de M. Sampson, on peut d'ailleurs prendre,

d'une façon au moins approchée, successivement

$$\gamma_1=[\bar{4},377], \quad \gamma_2=[\bar{3},611], \quad \gamma_3=[\bar{3},192], \quad \gamma_4=[\bar{3},375], \quad \gamma=[\bar{3},432]$$

Ces nombres suffisent à montrer que l'équateur de Jupiter conserve une inclinaison à très peu près constante, égale à 3°,10 environ, sur le plan fixe de référence, c'est-à-dire sur le plan moyen de l'orbite de Jupiter à l'origine du temps, de plus le nœud ascendant de l'équateur de Jupiter sur le plan fixe a un mouvement rétrograde très lent défini par la valeur $h' = -[\bar{8},00]$, et par suite égal à 3″,0 par an c'est le phénomène qui correspond à la précession terrestre

Et sans entrer dans le détail d'interprétations géométriques inutiles en fait, nous pouvons ajouter qu'il ressort clairement des nombres ci-dessus que les satellites S_p s'écartent toujours fort peu de l'équateur de Jupiter

Il sera facile maintenant d'intégrer plus exactement le système (9) en particulier, on aurait immédiatement les valeurs approchées des coefficients γ'_p, qui résultent des calculs effectués pour obtenir les γ_p

171 Pour achever la solution du problème, il ne reste plus qu'à compléter les équations (8) et (9), en écrivant dans leurs seconds membres d'abord les termes de degré supérieur au premier par rapport aux (ε_p), (ε'_p) (σ_p), σ_p, γ_p, γ'_p, γ, γ', puis les termes qui proviennent de la considération des équations (5) et (6), en ayant soin de tenir compte des changements de variables que nous avons été amenés à effectuer c'est-à-dire que l'on doit prendre les seconds membres des équations (5) et (6), en y remplaçant ε_p, ε'_p, γ_p, γ'_p, par

$$[\eta_p + (\varepsilon_p)]\, e^{i(N_1-2N_2)+\psi}, \qquad [\eta_p + (\varepsilon'_p)]\, e^{-i(N_1-2N_2)-\psi},$$
$$\gamma_p\, e^{i(N_1-2N_2)+\psi}, \qquad \gamma'_p\, e^{-i(N_1-2N_2)-\psi},$$

et de plus, les seconds membres des équations en $\frac{d\varepsilon_p}{d\tau}$, $\frac{d\gamma_p}{d\tau}$, $\frac{d\gamma}{d\tau}$ doivent être multipliés par $e^{-i(N_1-2N_2)-\psi}$, tandis que ceux des équations conjuguées doivent l'être par l'exponentielle conjuguée $e^{i(N_1-2N_2)+\psi}$

On sera ainsi amené à intégrer des équations linéaires non homogènes à coefficients constants, dont les seconds membres ou bien sont immédiatement connus, ou bien peuvent être facilement déterminés par des approximations successives, et comme on connaît déjà la solution générale de ces équations privées de leurs seconds membres, il suffira de déterminer les solutions particulières qui

correspondent aux différents termes des seconds membres. La méthode des coefficients indéterminés y conduira facilement, sans qu'il soit nécessaire en général d'avoir recours à des approximations successives ; mais on devra tenir compte des petits changements que celles-ci pourront apporter aux coefficients mêmes des inconnues dans les premiers membres des équations (8) et (9).

On ne rencontrerait quelque difficulté dans l'application de cette méthode que si l'on cherchait la solution particulière qui correspond à des termes des seconds membres dont la période serait ou bien très longue, ou bien très voisine de celle des arguments G ou H (la libration étant exclue) : ce qui correspond au phénomène bien connu de *résonance*. Le second cas ne se présente pas, si on laisse de côté les termes qui dépassent le second degré par rapport aux (ε_p), (ε'_p), ..., ce qui est évidemment légitime : il suffira donc d'examiner de plus près le premier cas, celui des inégalités à très longue période.

Supposons, ainsi qu'il arrivera le plus souvent, que les quatre dernières équations (8) seules comportent des seconds membres de la forme $\mu_p e^{iG'}$, G′ étant un argument linéaire par rapport au temps, dont la vitesse g' est fort petite, et mettons la solution correspondante sous la forme

$$(\varepsilon_p)=\xi_p e^{iG'}, \qquad (\varepsilon'_p)=\xi'_p e^{iG'}, \qquad (\varpi_p)=\omega_p e^{iG'}, \qquad \sigma_p=\zeta_p e^{iG'},$$

en posant encore

$$\zeta=\zeta_1-3\zeta_2+2\zeta_3.$$

On aura d'abord

$$g'\zeta_1=\mu_1,$$

mais il serait inexact de déterminer ζ_1, ζ_2, ζ_3 de la même façon.

Il faudra procéder comme dans l'étude de la libration : les $\zeta_p\,(p=1, 2, 3)$ étant pris comme inconnues principales, et l'ordre de g' étant supposé égal à k, on voit que l'on devra regarder ζ comme de l'ordre $2k-\frac{3}{2}$, les $\xi_p-\xi'_p$ comme de l'ordre $2k-1$, les ω_p comme de l'ordre k.

On obtiendra en effet les même formules que dans le cas de la libration, en ayant soin de remplacer g par $-g'$, et par suite g_1, par $g'_1=-\frac{g'}{d+B_1}$, ..., et en donnant aux équations finales (10) les seconds membres $\frac{g'\mu_p}{6n_p+16B_p}$. Négligeons alors l'effet des très petites

quantités g_1^2, $g_1'^2$, , et appelons ζ_1^0, ζ_2^0, ζ_3^0 les coefficients ζ_1, ζ_2, ζ_3 déterminés à propos de la libration (quand on y fait $\zeta = 1$), en employant la lettre g_0 pour le mouvement de l'argument G de ce phénomène, les nouvelles équations (10) s'écriront sous la forme simple

$$g'^2\zeta_p - g'\mu_p - g_0^2\zeta_p^0\zeta = 0,$$

et, en vertu de la relation

$$\zeta_1^0 - 3\zeta_2^0 + 2\zeta_3^0 = 1,$$

donneront

$$\zeta = -\frac{g'}{g_0^2 - g'^2}(\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3),$$

$$g'\zeta_p = \mu_p - \frac{g_0^2\zeta_p^0}{g_0^2 - g'^2}(\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3)$$

On voit ainsi que la somme $\zeta_1 - 3\zeta_2 + 2\zeta_3$ ou ζ sera d'autant plus petite que la quantité g' sera elle-même plus petite, c'est-à-dire que, suivant l'expression de Laplace, les inégalités à longue période de σ_1, σ_2, σ_3 se coordonnent de façon à ne pas troubler la relation singulière qui existe entre les longitudes moyennes des trois satellites

Appliquons ces résultats aux inégalités qui ont pour argument la longitude moyenne du Soleil, analogues à l'équation annuelle de la théorie de la Lune D'après les équations (5), il faudra prendre

$$\mu_p\, e^{iG'} = -6\,\mu_{p0}\,\varepsilon_0\,\lambda_0,$$

avec $g' = n_0$, en supposant l'excentricité e_0 de l'orbite du Soleil égale à $[\bar{2},684]$, et appelant justement G' l'anomalie moyenne du Soleil, on aura

$$\zeta_1 = -[\bar{5},137], \qquad \zeta_2 = -[\bar{5},963], \qquad \zeta_3 = -[\bar{4},068], \qquad \zeta_4 = -[\bar{4},446]$$

172 Dans tout ce qui précède, on a fait abstraction des perturbations du mouvement keplérien du Soleil, ou plutôt de Jupiter il faut encore dire quelques mots de la façon dont on devra en tenir compte

Supposons d'abord que l'on prenne en considération les inégalités à longue période des éléments, parmi lesquelles on devra distinguer surtout les grandes inégalités qui dépendent de l'argument $2N_0 - 5N_0'$, en appelant N_0' la longitude moyenne de Saturne On voit tout de suite que, pour tenir compte des inégalités de la longitude moyenne N_0 et de la longitude du périjove ϖ_0, il suffira précisément d'augmenter

ces éléments de leurs perturbations dans les formules primitives, et ceci est conforme à ce que nous avons déjà dit plusieurs fois dans des circonstances semblables. Les inégalités de l'inclinaison γ_0 et de la longitude du nœud θ_0 ne donnent lieu à aucune difficulté; enfin on obtiendra l'effet des inégalités δa_0 et δe_0 du demi-grand axe et de l'excentricité en appliquant les mêmes règles que ci-dessus, après avoir mis dans les seconds membres des quatre dernières équations (8) les quantités telles que

$$6\mu_{10}\left(\frac{\delta a_0}{a_0} - e_0\,\delta e_0\right);$$

c'est ce qui résulte immédiatement des formules (3), en tenant compte de la vraie valeur de A_p, ainsi que des expressions des coefficients B'_{p0}, DB'_{p0}.

Il faut envisager maintenant l'effet des variations séculaires des éléments de l'orbite solaire. Pour tenir compte d'abord de la variation séculaire de ϖ_0, il suffira encore de la joindre à ϖ_0 dans les formules primitives. La variation séculaire de l'excentricité e_0, soit $e'_0 t$, produira, comme dans la théorie de la Lune, des accélérations séculaires dans le mouvement des satellites; on les obtiendra en mettant encore dans les seconds membres des quatre dernières équations (8) les quantités telles que $-6\mu_{10}e_0e'_0 t$, et en recherchant l'effet de cette addition comme au numéro précédent, quand il s'agissait d'inégalités à longue période.

Supposons d'une façon générale que les dernières équations (8) comportent des seconds membres de la forme $\mu_p\tau$, et cherchons la solution particulière correspondante de l'ensemble de ces équations. On aura d'abord

$$\sigma_4 = \frac{1}{2}\mu_4\tau^2,$$

et pour $p = 1, 2, 3$, on voit sans peine, d'après la constitution même de ces équations, que l'on peut prendre

$$\sigma_p = \zeta_p + \frac{1}{2}\zeta'_p\tau^2, \qquad (\alpha_p) = \omega_p\tau, \qquad (\varepsilon_p) = \xi_p + \xi'_p\tau, \qquad (\varepsilon'_p) = -\xi_p + \xi'_p\tau,$$

en désignant par ζ'_p, ω_p, ξ_p, ξ'_p des constantes déterminées, dont les premières vérifient la relation

$$\zeta'_1 - 3\zeta'_2 + 2\zeta'_3 = 0,$$

tandis que les ζ_p sont des constantes partiellement arbitraires, pour lesquelles la somme $\zeta_1 - 3\zeta_2 + 2\zeta_3$ a seule une valeur déterminée ζ, de plus, on voit encore que si les ζ'_p sont d'ordre zéro, les coefficients ω_p, ξ'_p seront du même ordre, les ξ_p seront d'ordre -1, et ζ sera d'ordre $-\frac{3}{2}$

Reprenant encore une fois les mêmes calculs que pour la libration, on a alors

$$2\xi_p = \eta_p \zeta,$$

et en désignant comme plus haut par g_0, ζ_1^0, ζ_2^0, ζ_3^0 les quantités g, ζ_1, ζ_2, ζ_3 relatives à la libration, on tombe, si l'on néglige dans la détermination de ce phénomène l'effet des petites quantités g_1^2, g_2^2, g_3^2, sur les équations simples

$$\zeta_p - \mu_p - g_0^2 \zeta_p^0 \zeta = 0,$$

d'où l'on tire

$$\zeta = \frac{1}{g_0^2}(\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3),$$

$$\zeta_p = \mu_p - \zeta_p^0(\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3)$$

La variation séculaire de l'excentricité e_0 de l'orbite de Jupiter n'altère par suite que d'une quantité constante, dont l'effet est entièrement insensible, la relation qui existe entre les longitudes moyennes des trois satellites S_1, S_2, S_3 Les accélérations séculaires ζ'_p sont elles-mêmes insensibles

En dernier lieu, nous avons à chercher l'influence du déplacement séculaire de l'orbite de Jupiter, et pour cela, d'après les hypothèses faites sur le plan de référence, nous devons prendre les quantités primitives γ_0, γ'_0 sous la forme $\chi_0 t$, $\chi'_0 t$, en désignant par χ_0, χ'_0 deux constantes conjuguées très petites En se reportant aux équations (3), qu'il suffit de considérer, on doit donc donner aux équations (9) les seconds membres $-B'_{p0}\chi_0 t e^{-i(N_1-2N_2)}$, le coefficient B'_{p0} étant remplacé par K_0 quand il s'agit de l'équation en $\frac{d\gamma}{d\tau}$; et si l'on fait

$$\mu_0 = -i\chi_0 e^{-i(N_1-2N_2)},$$

ces seconds membres deviennent, dans les mêmes conditions,

$$-B_{p0}\mu_0\tau,$$

pour les équations conjuguées, ils seront de même $B'_{p0}\mu'_0\tau$, en appelant μ'_0 la quantité conjuguée de μ_0

On voit alors que les valeurs précédemment trouvées pour les γ_p, γ'_p, γ, γ', doivent être augmentées d'une solution particulière des nouvelles équations (9), que l'on peut prendre sous la forme

$$\gamma_p = (\psi_p + \chi_p\tau)\mu_0 + (\psi'_p + \chi'_p\tau)\mu'_0,$$
$$\gamma'_p = (\psi'_p - \chi'_p\tau)\mu_0 + (\psi_p - \chi_p\tau)\mu'_0,$$

en appelant ψ_p, χ_p, ψ'_p, χ'_p des coefficients constants à déterminer Mais les ψ'_p, χ'_p sont d'ordre $\frac{1}{2}$ par rapport aux coefficients correspondants ψ_p, χ_p, et nous nous occuperons seulement de ces derniers, qui au surplus, interviennent seuls pour donner les inégalités de caractère non périodique des γ_p, γ'_p primitifs

En substituant les valeurs supposées des inconnues dans les équations (9), on voit d'abord que les χ_p vérifient les équations

$$B_1\chi_1 - B'_{12}\chi_2 - B'_{13}\chi_3 - B'_{14}\chi_4 - B'_1\chi = B'_{p0},$$

$$K'\chi - K_1\chi_1 - K_2\chi_2 - K_3\chi_3 - K_4\chi_4 = K'_0,$$

d'après la définition des quantités B_p et K', la solution de ces équations est en évidence on a

$$\chi_p = \chi = 1$$

Il vient ensuite, pour déterminer les ψ_p,

$$B_1\psi_1 - B'_{12}\psi_2 - B'_{13}\psi_3 - B'_{14}\psi_4 - B'_1\psi = 1,$$

$$K'\psi - K_1\psi_1 - K_2\psi_2 - K_3\psi_3 - K_4\psi_4 = 1,$$

et il est facile de voir que si l'on appelle h'_0 la dernière valeur de h' calculée au n° 170, on a très sensiblement

$$\psi = -\frac{1}{h'_0}, \qquad \psi_1 = \psi, \qquad \psi_2 = [\bar{1},998]\psi, \qquad \psi_3 = [\bar{1},988]\psi, \qquad \psi_4 = [\bar{1},936]\psi,$$

c'est-à-dire que les rapports mutuels des quantités ψ_p et ψ sont les mêmes que ceux des quantités χ_p et χ relatives à h'_0.

Désignons encore par H_0 et par χ_0 l'argument H et le coefficient χ du n° 170 qui correspondent à la racine h'_0, nous voyons qu'en résumé, on passera des valeurs déterminées dans ce numéro pour les γ_p et γ

aux vraies valeurs de ces quantités en les augmentant de $\mu_0\tau$ d'une part, et d'autre part en y remplaçant $e^{-i\Pi_0}$ par $e^{-i\Pi_0} - \frac{\mu_0}{h'_0\chi_0}$, et de même on aura les vraies valeurs des γ'_p, γ', en augmentant les anciennes de $-\mu'_0\tau$, et en remplaçant $e^{i\Pi_0}$ par $e^{i\Pi_0} - \frac{\mu'_0}{h'_0\chi_0}$.

Si l'on veut prendre le plan variable de l'orbite de Jupiter comme plan de référence, il suffira de faire les substitutions relatives à $e^{-i\Pi_0}$ et $e^{i\Pi_0}$, en supprimant l'addition des termes $\mu_0\tau$, $-\mu'_0\tau$.

Tout ce que nous venons de dire montre bien que la théorie des satellites de Jupiter ne présente pas de difficultés insurmontables, tant que l'on suppose connues les constantes dont elle dépend. La véritable difficulté consiste dans la détermination effective de ces constantes, en particulier des masses des satellites, car les développements analytiques suivant les puissances de ces masses ne présentent qu'une convergence insuffisante. Mais nous ne pouvons aborder ici ce problème, qui nous entraînerait en dehors des limites que nous nous sommes fixées.

FIN

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE III (*suite*).

Théorie des planètes (*suite*).

Pages.

LIVRE IV.

Théorie de la Lune.

LIVRE V

Théorie du mouvement de rotation de la Terre et de la Lune autour de leurs centres de gravité

LIVRE VI

Theorie des anciens satellites de Jupiter

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES